

*Luiz Alberto Rezende de Oliveira*

INTEGRAIS DE CAMINHO PARA  
TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS ARBITRÁRIAS

Tese de

**MESTRADO**

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

1980

- a meus pais

- a Anthony Middleton

- a M.

## AGRADECIMENTOS

A T. Kodama, pela personalidade humana e científica, pelo muito que ensinou e pelas pedras mais distanciadas do que meu passo podia alcançar, todo o meu apreço.

A Filadelfo C. Santos, pela colaboração inumerável, e permanentemente bem-humorada, agradeço muitíssimo.

A meus colegas de departamento, Sergio B. Duarte, Chung K. Cheong (que leu — sabe-se lá como — os manuscritos), Luiz Carlos Santos e até mesmo J. Maki, sou grato pelas ferozes discussões, sugestões variadas e bons astrais.

A C. A. de Moura, pelo espalhamento só meio inverso (e alguns milhões de hemácias), obrigado.

A Helena S. Ferreira agradeço a paciência hieroglífica, a boa datilografia e a bondade mal-disfarçada.

À FINEP e ao CBPF/CNPq, agradeço o manah que cai dos céus.

Obrigado ainda a um mundo de gente:

A Carmen, Miry, Nilson, Aldo e Inês; a Luiz e Livia, e aos sobrinhos do tio Friedrich Shree; a J.A. da Nova Monteiro e suas mãos ricas de parafusos.

A B. e S., próximos, fundos, irremediáveis: irmãos.

A Hugo S. e Easy R., em virtude do vasto Kharkhom; a Takezo H., por velas e vento.

A L., C. e M., por vários belos blues; a V., pelo instante da troca.

A G. devo espessura; a L., um desvario lúcido.

O lago de prata devo a M. e a mim.

Para se cumprir o Caminho Integral  
Hã dois caminhos a seguir.  
O primeiro caminho é qualquer caminho,  
é todos os caminhos.  
O segundo caminho  
nã é um caminho.

Chuang Tzu

Sã quatro os feiticeiros (...) dos Yahoos, e este número é o maior que abarca sua aritmética. Contam nos dedos, um, dois, três, quatro, muitos. O infinito começa no polegar.

J.L.Borges, O Informe de Brodie

Bump-ah-dah-cum-dum-pah-dah-cum-dah-pah-dum-dum!

R.P. Feynman, Drums

## RESUMO

Estudam-se alguns aspectos da formulação de integrais de caminho da mecânica quântica. Este formalismo é generalizado para transformações canônicas arbitrárias, por meio de uma associação entre amplitudes de probabilidade, análogas à expressão usual no espaço de fase para a evolução Hamiltoniana no tempo, e geradores clássicos de transformações. Tal associação resulta ser equivalente à regra de quantização de Weyl; mostra-se, também, que este formalismo provê uma representação por integrais de caminho para uma álgebra de Lie de um dado conjunto de geradores clássicos. Discutem-se ainda algumas considerações físicas acerca do procedimento de quantização por integrais de caminho e acerca da relação entre as estruturas dinâmicas clássica e quântica.

## SUMMARY

Some aspects of the path integral formulation of quantum mechanics are studied. This formalism is generalized to arbitrary canonical transformations, by means of an association between path integral probability amplitudes and classical generators of transformations, analogous to the usual Hamiltonian time development phase space expression. Such association turns out to be equivalent to the Weyl quantization rule, and it is also shown that this formalism furnishes a path integral representation for a Lie algebra of a given set of classical generators. Still, some physical considerations about the path integral quantization procedure and about the relationship between classical and quantum dynamical structures are discussed.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTO .....	iii
RESUMO .....	iv
SUMMARY .....	iv
LISTA DE FIGURAS .....	v
<u>CAPÍTULO 1</u> - INTRODUÇÃO .....	1
1.1 - APRESENTAÇÃO .....	1
1.2 - INTEGRAIS DE CAMINHO: HISTÓRICO E STATUS ATUAL .....	7
<u>CAPÍTULO 2</u> - INTEGRAIS DE CAMINHO .....	13
2.1 - NOÇÃO DE FUNCIONAL — MOVIMENTO BROWNIANO .....	14
2.2 - NOÇÃO DE INTEGRAL FUNCIONAL .....	18
2.3 - A INTEGRAL DE CAMINHO DE FEYNMAN .....	24
2.4 - INTEGRAL DE CAMINHO NO ESPAÇO DE FASE .....	31
<u>CAPÍTULO 3</u> - DINÂMICA HAMILTONIANA .....	37
3.1 - INTRODUÇÃO .....	37
3.2 - MÉTODO HAMILTONIANO: FORMALISMO DE PBs .....	38
3.3 - TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS .....	41
3.4 - TCs A UM PARÂMETRO NO FORMALISMO DE PBs .....	45
<u>CAPÍTULO 4</u> - QUANTIZAÇÃO POR INTEGRAIS DE CAMINHO: GENERALIZAÇÃO , APLICAÇÕES .....	50
4.1 - GENERALIZAÇÃO .....	50
4.2 - PÓLOS E AUTOVALORES .....	53
4.3 - APLICAÇÕES .....	56
4.4 - MEDIÇÕES .....	68
<u>CAPÍTULO 5</u> - PROPRIEDADES DE GRUPO NO FORMALISMO DE   INTEGRAIS   DE CAMINHO .....	74

5.1 - SEMELHANÇA ESTRUTURAL ENTRE A MECÂNICA CLÁSSICA E A MECÂNICA QUÂNTICA .....	74
5.2 - CONEXÃO ENTRE O COLCHETE DE POISSON CLÁSSICO E O COMUTADOR QUÂNTICO .....	78
5.3 - PROPRIEDADES DE GRUPO .....	89
5.4 - SIMETRIAS E QUANTIDADES CONSERVADAS .....	97
<u>CAPÍTULO 6</u> - DISCUSSÃO E CONCLUSÕES .....	101
<u>APÊNDICE A</u> - GRUPOS E REPRESENTAÇÕES .....	106
<u>APÊNDICE B</u> - TÉCNICA DE GRÁFICOS .....	110
BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS .....	123

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>	<u>Pág.</u>
2.1.1 - Diagrama de forças .....	17
4.3.1 - Partição isométrica .....	57
5.2.1 - Partição isométrica .....	82
5.2.2 - Partição isométrica .....	82



## Um Teorema

Para se cumprir o Caminho Integral

Há dois caminhos a seguir.

O primeiro caminho é qualquer caminho,

é todos os caminhos.

O segundo caminho

não é um caminho.

*Chuang Tzu*

De fato, visto que

São quatro os feiticeiros (...) dos Yahoos, e este número é o maior que abarca sua aritmética. Contam nos dedos, um, dois, três, quatro, muitos. O infinito começa no polegar.

*J.L. Borges, o "Informe de Brodie".*

então, naturalmente,

Bump-ah-dah-cum-dum-pah-dah-cum-dah-pah-dum-dum!

*R.P. Feynman,*  
"Congas"

cqd.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 - APRESENTAÇÃO

Este trabalho visa a ser um estudo em profundidade da formulação de integrais de caminho da mecânica quântica.

São tantos os campos de aplicação, na atualidade, do método de integrações funcionais que este pode ser considerado, a bem dizer, o cálculo integral da Física moderna. De fato, o chamado método das integrais de caminho, idealizado por Feynman em 1948 em sua "abordagem espaço-tempo" da mecânica quântica, já provou sua utilidade, tanto teórica quanto prática, em áreas tantas e tão distintas como a teoria quântica de campos, a física nuclear, a física de plasma, a física do estado sólido, a teoria de renormalização, a mecânica estatística, a hidrodinâmica e muitas outras. Embora não tenha ainda sido fundamentada com todo o rigor, ou com rigor que se desejaria, esta técnica, como bem se vê pela enumeração acima de áreas de utilização, possui uma flexibilidade de aplicações muito compensadora, e muitas vezes não só permite a solução de um dado problema matemático como também conduz a argumentos heurísticos sobre suas propriedades. Uma séria limitação, contudo, ligada à carência de uma fundamentação matemática mais precisa referida há pouco, é a de não sabermos realizar com exatidão mais que algumas manipula -

ções pouco complicadas, sendo muito difíceis os cálculos em vários casos de importância.

Nosso particular interesse nesta técnica, todavia, retoma o tema que lhe serviu de local de origem, a mecânica quântica não-relativística e sua relação com a mecânica clássica, e concerne principalmente à compreensão mesma dos princípios que estruturam a teoria quântica atual. Conquanto a formulação usual da teoria quântica, em termos de operadores diferenciais num espaço de Hilbert, tenha tido, como é notório e já até histórico, um imenso sucesso, ajudando a revolucionar as concepções físicas dos séculos passados, não obstante permanecem um tanto obscuros certos aspectos de algumas questões fundamentais, por exemplo acerca dos processos quânticos de medição. O caráter estocástico destas medições (muito distinto do que ocorre nos processos da mecânica estatística clássica), do qual deriva a natureza estocástica ou probabilística atribuída à própria mecânica quântica, e suas possíveis interpretações físicas têm sido exaustivamente debatidos na literatura (vide discussões sobre variáveis ocultas, teoria dos muitos universos, teorias microscópicas, etc), ao longo de décadas sem que entretanto se tenha conseguido alguma conclusão ampla e firme. A formulação de integrais de caminho, por outro lado, ainda que não removendo o problema, permite uma visão geométrica de diversos conceitos e procedimentos quânticos característicos que nos auxilia a compreender alguns aspectos da teoria, que resultam menos transparentes na linguagem tradicional.

Neste trabalho, assim, procuramos empregar o estudo da formulação de integrais de caminho como um eixo central para uma discussão acerca das estruturas dinâmicas formais da mecânica

ca clássica e da mecânica quântica e também dos processos de quantização que conectam uma e outra teoria. Feynman, originalmente, utilizou o formalismo de integrais de caminho para expressar a solução do problema fundamental da mecânica quântica não-relativística, o de encontrar o propagador (ou função de Green) para a evolução temporal de um dado sistema, expressa por meio da equação de Schrödinger. Notando que a evolução Hamiltoniana é apenas uma das representantes da ampla classe das transformações canônicas clássicas, procuramos investigar algumas das propriedades básicas do procedimento de quantização por integrais de caminho através de uma generalização deste método para geradores clássicos de transformações canônicas arbitrárias. Esta generalização, a par de nos revelar certas facetas da similaridade formal entre as estruturas dinâmicas da mecânica clássica e da mecânica quântica (não obstante as profundas diferenças entre os aspectos observacionais de ambas), permitirá também obtermos uma representação por integrais de caminho de uma álgebra de Lie associada a um conjunto de geradores clássicos<sup>(\*)</sup>.

O conteúdo desta tese está pois articulado como segue: numa primeira parte, que compreende os três primeiros capítulos, expomos de um ponto de vista essencialmente informativo a fundamentação conceitual e o instrumental matemático necessários para o desenvolvimento de nossas idéias; na parte final, que abrange os três capítulos restantes, realizamos as aplicações propriamente ditas de nossos métodos.

---

(\*) Muitos dos resultados aqui apresentados foram publicados num artigo: F. C. Santos, L.A.R. Oliveira and T. Kodama, "Path Integrals for Arbitrary Canonical Transformations", Nuovo Cimento 58B, 251(1980).

Assim, em seguida a esta apresentação temos, além de um breve histórico dos conceitos de integração funcional e integral de caminho, um rápido panorama de seu estágio atual de desenvolvimento e de seu espectro de aplicações físicas. No capítulo 2 apresentamos a noção de integral de caminho; inicialmente, a título de complementação didática e assim despreocupados do rigor, introduzimos as noções elementares de funcional e de integração funcional, por meio de exemplos retirados da teoria do movimento Browniano onde, historicamente, estes conceitos foram empregados extensivamente pela primeira vez. A formulação de Feynman propriamente dita, isto é, a expressão do propagador ou função de Green para a equação de Schrödinger por meio de uma integral de caminho no espaço das configurações, é apresentada a seguir; escolhemos para sua derivação um método dedutivo de base Hamiltoniana, para compará-lo ao procedimento postulativo e essencialmente de base Lagrangeana que o próprio Feynman seguiu. Obtemos, enfim, a versão no espaço de fase da integral de caminho para a evolução Hamiltoniana, que será o elemento básico de todos os nossos cálculos.

Terminamos a parte inicial de fundamentação apresentando, no capítulo 3, alguns elementos de Dinâmica Clássica que serão convenientes ao nosso estudo posterior do procedimento de quantização por integrais de caminho. Discutimos, na introdução, a relação entre simetrias dinâmicas sob transformações e conservação de quantidades no contexto clássico. A seguir, expomos resumidamente a formulação Hamiltoniana clássica usual, e introduzimos o formalismo de colchetes de Poisson que nos será muito útil no futuro. Discutimos então a noção de transformações canônicas, para nós importantíssima, e analisamos em algum detalhe

a estrutura dinâmica formal da mecânica clássica, em termos de uma álgebra de Lie de geradores de transformações canônicas. Na última seção continuamos esta exploração, obtendo a expressão para transformações canônicas a um parâmetro, por meio do formalismo de colchetes de Poisson; discutimos o conceito de simetria sob uma transformação canônica a partir desta expressão, e finalizamos obtendo uma solução formal por operadores para ela.

Tendo completado a fase inicial de conceituação, estamos aptos agora a desenvolver alguns resultados próprios fazendo uso do material exposto anteriormente. Princípios o capítulo 4 estabelecendo uma associação entre geradores clássicos de transformações canônicas arbitrárias e certas amplitudes de probabilidade "generalizadas", por meio de integrais de caminho similares à integral de Feynman no espaço de fase, de modo que qualquer transformação canônica, e não mais apenas a evolução Hamiltoniana, terá agora uma expressão em termos de integrais de caminho no espaço de fase; discutimos ainda, em algum pormenor, os aspectos e motivações desta definição. Para tornar a generalização acima efetivamente operacional, contudo, necessitamos ainda definir um processo de extrair a informação fornecida por nossas amplitudes generalizadas; assim, na seção 4.2 revisamos alguns resultados da literatura que nos fornecerão a inspiração para uma definição apropriada de autovalores associados a estas amplitudes. Na seção seguinte realizamos aplicações de nossa formulação, reproduzindo os resultados usuais para os autovalores dos operadores momento angular  $L^2$ , componente-z do momento angular  $L_z$ , e carga  $Q$  (aqui associada a um campo escalar). Abordamos então a questão das medições quânticas, propondo um mecanismo de "medição" em termos de integrais de caminho, e es-

tudamos suas propriedades, que corresponderão aos requisitos habituais da teoria.

Retornando a nosso estudo da formulação de integrais de caminho, observamos na seção inicial do capítulo 5 a grande proximidade formal das estruturas dinâmicas da mecânica clássica e da mecânica quântica, enquanto diferentes realizações de álgebras de Lie de observáveis, num caso, por meio de funções reais no espaço de fase, no outro, por operadores num espaço de Hilbert; esta semelhança estrutural nos induz a crer que, sendo a formulação de integrais de caminho um procedimento de quantização, ou seja, um modo de estabelecer uma correspondência entre sistemas clássicos e sistemas quânticos, deverá ela própria revelar certos aspectos da equivalência formal referida acima. Efetivamente, na seção 5.2 verificamos, a partir do estudo das propriedades de amplitudes "infinitesimais", que efetivamente nossa associação geradores clássicos—amplitudes de probabilidade, proposta na seção 4.1, resulta equivalente à regra de quantização de Weyl, e assim encontramos uma correspondência entre o colchete de Poisson clássico e o comutador quântico que, a nosso ver, reflete a semelhança de estruturas assinalada anteriormente. Prosseguindo, examinamos as propriedades de transformações sucessivas e verificamos a partir daí que a associação geradores—amplitudes, em termos de integrais de caminho, fornece uma representação de uma álgebra de Lie associada a um conjunto de geradores pertencentes a um grupo de transformações clássicas. Finalmente, empregamos os resultados da seção anterior para retomar a investigação do papel de simetrias e quantidades conservadas na formulação de integrais de caminho, e observamos que, se uma dada transformação clássica deixa invarian

te um sistema, então em termos de nosso esquema de medição via integrais de caminho o observável quântico correspondente será também uma constante de movimento.

No capítulo 6 procuramos empreender uma discussão crítica de nossos estudos, assinalando o caráter essencialmente formal de alguns de nossos resultados e ressaltando algumas dificuldades técnicas e conceituais que observamos. Concluimos, todavia, reafirmando o interesse genérico de nossas concepções, dado ser sempre esclarecedor observar um saber já constituído a partir de um ponto de vista alternativo, e especulamos — acometidos de alguma temeridade — acerca de algumas aplicações possíveis de nossos métodos e resultados. À guisa de complementação, no Apêndice A apresentamos, de forma sumaríssima, alguns elementos de teoria de grupos e suas representações. No Apêndice B, enfim, utilizamos uma técnica de diagramas para demonstrar um resultado importante referente ao capítulo 5.

## 1.2 - INTEGRAIS DE CAMINHO: HISTÓRICO E STATUS ATUAL

Historicamente, o desenvolvimento sistemático do cálculo funcional começou com Volterra<sup>(1)</sup> no princípio deste século. Em seu trabalho, vários conceitos da análise de funções, tais como continuidade e diferenciabilidade, foram adequadamente transcritos ao regime funcional. Talvez a contribuição mais importante de Volterra tenha sido um método geral para operações com funcionais. Este método consiste em se aproximar um funcional por uma função de  $n$  variáveis, reduzindo então o problema de um contínuo de graus de liberdade a um caso envolvendo ape



nas funções de  $n$  variáveis discretas. Os resultados assim obtidos dependem de  $n$ , que ao final é levado ao infinito. Um exemplo deste tipo de procedimento é a bem conhecida técnica para resolver a equação integral de Fredholm<sup>(2)</sup>.

Um dos primeiros a estabelecer a integração de funcionais foi Daniell, em 1918, em conexão com o valor médio de um funcional<sup>(3)</sup>. A integração funcional como um meio para a solução de equações diferenciais parciais de natureza estocástica foi imaginada por Wiener na década de 20<sup>(4)</sup>.

Em geral, a integração de um funcional sobre todas as suas variáveis, em analogia com a integração de funções multivariadas, conduz a divergências. Contudo, nos casos de interesse físico há uma saída, ditada pelas circunstâncias físicas do problema, que consiste na introdução de um fator peso para cada variável de integração, ou uma função peso conjunta. O peso conjunto para todas as variáveis constitui a medida de integração, que para muitos fins é uma probabilidade, embora não necessariamente. A escolha apropriada da medida de integração para funcionais especiais leva à solução de certas equações diferenciais parciais da física matemática. Foi deste modo que Wiener teve sucesso em obter a solução fundamental (propagador) da equação de difusão, usando como medida no espaço das funções contínuas a expressão de Einstein para a distribuição de probabilidades para trajetórias distintas de uma partícula Browniana, ou seja, para a probabilidade conjunta de se encontrar uma partícula Browniana numa dada sucessão de intervalos espaciais durante uma sucessão correspondente de intervalos de tempo; esta medida terminou por receber seu nome. Em 1943, Chandrasekhar<sup>(5)</sup> tratou de modo definitivo a teoria do movimento Browniano atra-

vés da integração funcional (embora em lugar algum ele o afirme explicitamente), e em 1944 Cameron, Martin e seus colaboradores<sup>(6)</sup> iniciaram uma longa série de trabalhos, dedicada a investigações sobre a medida de Wiener em espaços funcionais.

Já em 1933, num curto comunicado a uma conferência, Kirkwood<sup>(7)</sup> havia especulado que a integração no sentido de Wiener de funcionais especiais poderia ser aplicada à física quântica em conexão com o cálculo de somas estatísticas; contudo, o começo da penetração dos métodos de integração em espaços funcionais na física quântica deve aparentemente ser remetido a 1942, quando a dissertação de R.P. Feynman sobre o princípio de mínima ação, contendo uma nova derivação da equação de Schrödinger, foi defendida em Princeton<sup>(8)</sup>. Esta tese nunca foi publicada ao todo, mas uma importante parte está contida no famoso artigo de Feynman de 1948<sup>(9)</sup>, no qual, inspirado por um artigo de Dirac<sup>(10)</sup>, de 1932, e lançando mão do formalismo de integração funcional, produziu sua assim chamada "abordagem espaço-tempo" da mecânica quântica não relativística. Os trabalhos subsequentes de Feynman em eletrodinâmica quântica, no tratamento estatístico do hélio líquido, e em outras áreas<sup>(11)</sup>, elevaram o assunto à categoria de uma nova disciplina.

Em 1949 surgiu o interessante trabalho matemático de Kac<sup>(12)</sup> (sob a inspiração, segundo o autor, da dissertação de Feynman), dedicado ao cálculo do valor médio de alguns funcionais sobre as trajetórias de uma partícula Browniana, através da redução do problema à solução de equações diferenciais relacionadas à equação de Schrödinger e do emprego da medida de Wiener. A partir daí seguiram-se diversos trabalhos matemáticos por autores de diversos países; dentre os físicos, todavia, o

trabalho pioneiro de Feynman não foi devidamente apreciado no começo, aparentemente devido à novidade e singularidade da idéia de integração em espaços funcionais, e houve uma certa demora até que ocorresse a devida assimilação pela comunidade da física teórica. De todo modo, nos primeiros anos após o surgimento do novo aparato matemático exposto no trabalho original de Feynman, apenas o próprio autor o utilizou em investigações físicas. É somente em 1954 que, simultaneamente, Edwards e Peierls<sup>(13)</sup>, e Gel'fand e Minlos<sup>(14)</sup>, publicam artigos aplicando à teoria quântica dos campos os métodos que Feynman havia desenvolvido para a mecânica quântica não relativística.

A partir destes artigos, surgiu de imediato uma série de trabalhos análogos devotados à exposição dos fundamentos da teoria quântica de campos na linguagem de integrais funcionais; nomes como Schrödinger, Bogoliubov, Salam, Matthews, Friedrichs, Shapiro, Segal e outros estão associados a estes estudos<sup>(15)</sup>. Em 1956 o artigo, hoje clássico, de Gel'fand e Yaglom<sup>(16)</sup> resume as aplicações da integração em espaços funcionais à física quântica.

O primeiro formalismo funcional para a hidrodinâmica, por sua vez, foi obtido por Hopf<sup>(17)</sup> em 1952. Ele obteve um funcional característico, abarcando toda a informação hidrodinâmica, e assim acreditou poder tratar o problema da turbulência. Entretanto, só pôde extrair informações muito limitadas de seu funcional característico. Em 1966 Brittin e Chappell<sup>(18)</sup> conseguiram um formalismo para a Magnetohidrodinâmica.

A teoria clássica de muitos corpos foi atacada por Bogoliubov<sup>(19)</sup>, já em 1946, quando desenvolveu um funcional gerador contendo todas as distribuições reduzidas para qualquer

número de partículas; este funcional obedece a uma equação de movimento linear, de primeira ordem no tempo. Hosokawa<sup>(20)</sup> em 1967 obteve uma representação integral para o funcional gerador de Bogoliubov, cujo formalismo pode também ser transcrito quanticamente. O aspecto mais importante das teorias funcionais de muitos corpos e da hidrodinâmica é sua linearidade, devido à capacidade dos funcionais de encamparem um sistema infinito de equações lineares, relativas às diversas distribuições reduzidas, no qual a equação de movimento não linear original pode ser decomposta; o ganho em linearidade é, todavia, dissipado na complexidade crescente das manipulações funcionais. Na área de estado sólido, recentemente Edwards<sup>(21)</sup> aplicou métodos de integração de caminho à matéria polimerizada. Podemos mencionar também, dentre as aplicações integrais de caminho em física do estado sólido, a teoria de Thornber-Feynman<sup>(22)</sup> da condutividade.

Esta exposição mostra com clareza que praticamente não há ramo da física teórica em que não se faça uso do formalismo funcional. No problema do polaron, inclusive, o tratamento por integrais de caminho prevaleceu sobre todos os outros métodos, dado que as diversas expansões perturbativas em integrais funcionais não dependem do tamanho do parâmetro de expansão. No momento, uma desvantagem é a dificuldade em se realizar, numa forma fechada, cálculos em coordenadas curvilíneas. Entretanto, desde o artigo pioneiro de Edwards e Guliaev<sup>(23)</sup>, a integral de caminho curvilínea passou por diversos estágios de elaboração, e hoje sua compreensão já é satisfatória<sup>(24)</sup>. Recentemente, Kleinert e Duru obtiveram a solução para o átomo de hidrogênio através de integrais de caminho<sup>(25)</sup>.

Em virtude do reconhecimento e larga aplicação que seu

método passou a receber, em 1965 Feynman retorna, em seu conhecido livro-texto com A.R. Hibbs<sup>(26)</sup>, ao lugar original da formulação de integrais de caminho: a mecânica quântica não-relativística. Algumas lacunas ainda existentes na formulação foram pouco a pouco sendo preenchidas. Por exemplo, Schulman<sup>(27)</sup>, em 1968, obteve sucesso em introduzir o spin no formalismo funcional da mecânica quântica, como Feynman já havia insinuado desde seu trabalho inicial; também no estudo da conexão spin-estatística seu método foi útil<sup>(28)</sup>. Nos últimos anos, ocorreram progressos na inclusão do spin em cálculos por integrais de caminho relacionados à equação de Dirac<sup>(29)</sup>; por outro lado, também fenômenos semi-clássicos têm sido adequadamente tratados por este formalismo<sup>(30-32)</sup>.

A fundamentação matemática de que carece o método de integração funcional tem sido objeto de vários autores, como Cecille de Witt<sup>(33)</sup> (através da introdução do conceito de pro-distribuições), Simon<sup>(34)</sup>, Høegh-Krøhn<sup>(35)</sup> e outros. Tentativas de obter um formalismo covariante para integrais de caminho relativísticas foram realizadas, dentre outros, por Miura<sup>(36)</sup> e Deininghaus e Graham<sup>(37)</sup>.

Como se vê por este rápido perpasso pela literatura, o método de integrais funcionais encontra-se amplamente difundido<sup>(38-40)</sup>, e nos anos mais recentes testemunha-se mesmo uma penetração cada vez maior em todas as áreas; citemos como exemplo, para finalizar, sua aplicação à teoria quântica dos campos<sup>(41)</sup> e à física nuclear (no tratamento de campos quânticos coletivos<sup>(47)</sup>), à teorias de campo com vínculos de segunda classe<sup>(43)</sup> e à quantização em espaços multiplamente conexos<sup>(44)</sup>, bem como à própria gravitação<sup>(45)</sup>.

## CAPÍTULO 2

### INTEGRAIS DE CAMINHO

O método de integrais de caminho estabelecido por Feynman, que empregaremos intensamente ao longo de todo este trabalho, consiste essencialmente numa técnica para o cálculo da amplitude de probabilidade mecânico-quântica  $K(b,a)$  de um dado sistema quântico realizar uma transição entre estados, caracterizados por coordenadas  $\vec{x}_a$  e  $\vec{x}_b$ , no intervalo de tempo  $[\underline{t}_a, \underline{t}_b]$ . Esta amplitude é relacionada à soma (por meio de uma integral funcional), sobre todas as possíveis trajetórias  $\vec{x}(t)$  que conectam os pontos  $\vec{x}_a$  e  $\vec{x}_b$ , de certas contribuições complexas  $k[\vec{x}(t)]$ , atribuídas a cada uma das trajetórias ou caminhos da seguinte forma: a fase de cada contribuição complexa é a ação clássica  $S[\vec{x}(t)]$  do sistema, definida ao longo do caminho correspondente, dividida pela constante  $\hbar$  que caracteriza os processos quânticos; e a magnitude de cada contribuição é uma constante (ou seja, um valor independente do caminho) escolhida de modo a normalizar adequadamente a amplitude total  $K(b,a)$ . A razão desta definição se torna clara se observarmos que no limite clássico  $\hbar \rightarrow 0$ , os únicos caminhos que necessitaremos considerar serão aqueles para os quais a variação da ação  $S[\vec{x}(t)]$  seja justamente da ordem de  $\hbar$ , ou seja, caminhos essencialmente idênticos ao caminho clássico do sistema, para o qual, por definição, a variação da ação é nula – reproduzindo assim, no limite, o caso

clássico.

Nas formulações usuais de Schrödinger e Heisenberg, em termos de operadores diferenciais, a amplitude (ou função de Green)  $K(b,a)$  é em geral calculada resolvendo-se uma equação diferencial, ou uma equação integral, ou ainda somando-se autoestados. A abordagem por integrais de caminho, embora seja equivalente às de Schrödinger e Heisenberg, no sentido de que cada uma pode ser derivada da outra, tem não obstante um interesse particular na medida em que a idéia básica de "soma sobre todos os caminhos" possibilita uma certa visão geométrica dos processos quânticos. Isto nos facilita a compreensão de alguns conceitos quânticos típicos, como por exemplo medições, que nas formulações por operadores não são tão claros.

Vamos neste capítulo apresentar, numa extensão suficiente para nossos interesses, a noção de integral de caminho. Inicialmente revemos, de um ponto de vista abrangente e portanto sem preocupação de rigor, as noções básicas de funcional e de integral funcional através do exemplo histórico do movimento Browniano. Apresentamos a seguir a formulação de Feynman para a mecânica quântica, primeiramente em sua forma original de integral no espaço das configurações, e finalmente em sua versão Hamiltoniana no espaço de fase.

## 2.1 - NOÇÃO DE FUNCIONAL - MOVIMENTO BROWNIANO

Quando se tem partículas macroscópicas num ambiente líquido, elas sofrem continuamente colisões com as moléculas do meio circundante devido à agitação térmica destas últimas. Como

resultado das flutuações térmicas da velocidade devidas a estes choques, uma partícula aproximadamente do tamanho coloidal ( $\sim 1$  micron) percorre um trajeto aleatório; esta é a concepção de Einstein do movimento Browniano. Langevin<sup>(46)</sup> tomou este quadro e lhe deu uma roupagem matemática, produzindo deste modo sua equação dinâmica para o movimento de uma partícula Browniana. O modelo de Langevin simula a interação de muitos-corpos da partícula com o meio através de uma força hidrodinâmica dissipativa e de uma força "aleatória" (com propriedades estatísticas derivadas do estado térmico do meio).

Por simplicidade, vamos escrever a equação de Langevin para uma partícula Browniana livre a uma dimensão:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{m}{t_0} \frac{dx}{dt} + f(t) \quad , \quad (2.1.1)$$

onde  $t_0$  é o tempo de relaxação da partícula,  $-(m/t_0)\dot{x}$  é a força friccional e  $f(t)$  é a força aleatória, a soma das duas dando conta da interação total da partícula Browniana com o meio.

Vamos, agora, escrever a solução da eq. (1) para a velocidade  $v(t)$ , que satisfaz à condição inicial  $\dot{x}(t')=v(t')=v'$ :

$$v(t) = \exp \left[ \frac{(t'-t)}{t_0} \right] v' + \int_{t'}^t \exp \left[ \frac{(\tau-t)}{t_0} \right] m^{-1} f(\tau) d\tau \quad (2.1.2)$$

Para se ter a velocidade no instante  $t$  o conhecimento completo da força  $f(\tau)$  de  $t'$  a  $t$  é necessário. Mudando  $f(\tau) \Big|_{t' \leq \tau \leq t}$  teremos outra  $v(t)$ , visto que  $v(t)$  depende de toda a faixa de valores da força  $f$  de  $t'$  a  $t$ . A cada função  $f(\tau) \Big|_{[t', t]}$  está associado um valor de  $v(t)$  de acordo com a eq. (2). Temos, assim, um



funcional e o indicamos pela notação  $v[f(\tau)]_t^t$ .

Na realidade, a equação de Langevin é uma equação de movimento que é compartilhada por cada membro de um conjunto de partículas Brownianas, cada uma das quais experimenta, em geral, uma sucessão diferente de forças aleatórias  $f(\tau)$  durante o intervalo de tempo  $[t', t]$ . A eq. (2) dá a velocidade da partícula Browniana no instante  $t$  sob a influência de uma particular força aleatória  $f(\tau)$  ao longo do intervalo  $[t', t]$ . Para uma outra partícula Browniana, temos uma força aleatória diferente, digamos  $f'(\tau)$ , durante o mesmo intervalo. Para descobrir a velocidade associada à força aleatória  $f'(\tau)$  (mesmas condições iniciais), nós apenas removemos a força  $f(\tau)$  da eq. (2) e inserimos a força  $f'(\tau)$  em seu lugar. Assim, o conjunto de partículas do meio gera durante o intervalo de tempo  $[t', t]$  uma coleção de forças  $f(\tau)$ , a cada uma das quais uma velocidade de partícula está associada, e esta associação constitui o funcional da velocidade.

Em geral, um funcional é um instrumento matemático que liga cada função  $f$ , de uma dada coleção de funções, a um valor  $v[f]$ . Um funcional pode ser pensado como sendo uma função de infinitas variáveis tituladas por um índice contínuo. Em nosso exemplo de funcional do movimento Browniano eq. (2), os valores da função  $f(\tau)$  são as variáveis e  $\tau$  forma o índice contínuo. Para esclarecer o enunciado acima traçamos um diagrama com algumas forças aleatórias (Fig. 1).

Os vários  $f_j \equiv f(\tau_j)$  são usados como variáveis e são aptos a representar quaisquer funções  $f$  sobre o intervalo  $[t', t]$ . Se utilizarmos uma partição  $P_N$  do intervalo  $[t', t]$ , com pontos  $\tau_0 = t' < \tau_1 < \dots < \tau_{N-1} < \tau_N = t$ , podemos escrever

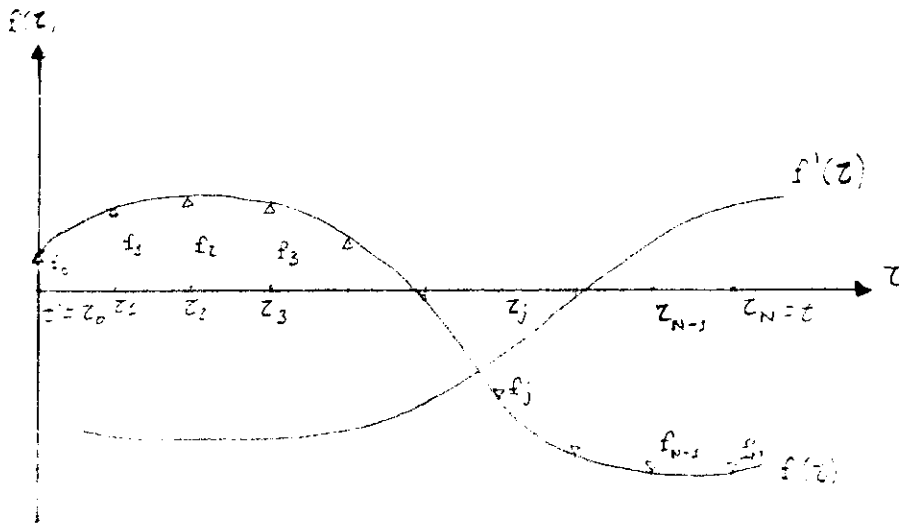


Fig. 2.1.1 - Diagrama de forças.

aproximadamente nosso funcional  $v[f]$  para uma dada função ar-  
gumento  $f$  como

$$v[f] \approx \exp\left[\frac{(t'-t)}{t_0}\right] v' + m^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left[\frac{(\tau_j-t)}{t_0}\right] f(\tau_j) \Delta\tau_j =$$

$$= v_{P_N}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \quad , \quad (2.1.3)$$

onde  $\Delta\tau_j = (\tau_{j+1} - \tau_j) = \epsilon$ .

Se tomarmos outra força  $f$ , o que temos a fazer para ob-  
ter a velocidade correspondente  $v[f]$  é trocar os vários  $f_j$  de  
modo que eles agora representem a nova força. Por este procedi-  
mento, podemos aproximar um dado funcional para qualquer função  
argumento. Agora, se quisermos aumentar a precisão da aproxima-  
ção, o que temos a fazer é usar partições mais e mais refinadas,  
tendendo a cobrir ao máximo o intervalo contínuo  $[t', t]$ . Dado  
um funcional  $\phi[f]$ , o resultado de se empregar uma sucessão des-  
tas partições cada vez mais finas,  $\{P_N\}$ , é obter uma sucessão  
correspondente de funções,  $\{\phi_{P_N}\}$ , com um número crescente de va

riáveis, que no limite  $N \rightarrow \infty$  tende ao próprio funcional em questão, isto é,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_{P_N} = \phi[f] .$$

As partições empregadas, como se disse, devem cobrir o intervalo  $[t', t]$ , à medida que  $N \rightarrow \infty$ . Esta condição será assegurada se usarmos uma sucessão de partições  $\{P_N\}$  para a qual  $\max\{\Delta\tau_j(P_N)\} \rightarrow 0$  à medida que  $N \rightarrow \infty$ . A partição isométrica (todos os  $\Delta\tau_j$  iguais) é a que empregamos no exemplo acima.

A discussão precedente claramente estabelece uma relação íntima entre funcionais e funções de muitas variáveis. É através desta relação que seremos capazes de transferir a bem conhecida análise de funções de muitas variáveis ao regime funcional para assim obtermos, de maneira natural, o cálculo funcional. Mas, ainda mais importante, é que assim podemos definir um funcional (com ampla generalidade) usando uma sucessão de funções de muitas variáveis associada com uma sucessão de partições tendendo a cobrir um dado intervalo de índices. Esta será a situação na construção de integrais de caminho para o propagador da equação de Schrödinger, na formulação de Feynman (ver seção 2.3).

Vamos, no que se segue, definir e exemplificar o conceito de integral funcional.

## 2.2 - NOÇÃO DE INTEGRAL FUNCIONAL

Os propagadores de diversas equações diferenciais importantes da física matemática, como a equação de Schrödinger

a equação de Fokker-Planck e outras equações de natureza estocástica <sup>(47,48)</sup>, podem ser expressos em termos de integrais funcionais. Vamos, a seguir, introduzir genericamente a noção de integral funcional.

Suponhamos que

$$\phi_{P_N} = \phi_{P_N}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \quad , \quad (2.2.1)$$

uma função de muitas variáveis, seja uma aproximação para o funcional  $\phi[f]$  associada com uma partição  $P_N$  do intervalo  $[t', t]$ . Se temos uma função de  $N$  variáveis, sabemos qual é sua integral múltipla sobre uma certa região  $R$ :

$$J_{P_N} = \int_R \dots \int \phi_{P_N}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) df_0 \dots df_{N-1} \quad . \quad (2.2.2)$$

Com partições cada vez mais refinadas, tendendo a cobrir o intervalo  $[t', t]$ , o número de variáveis cresce mais e mais e esperamos encontrar um limite para a sucessão  $J_{P_N}$ , que será então nossa integral funcional. Mas, em geral, o aumento ilimitado no número de variáveis leva ao aparecimento de divergências. Contudo, nos casos de interesse físico há sempre uma saída, condicionada pelo problema sob estudo. A solução, como afirmamos anteriormente (Sec. 1.2) ao discutir o tratamento de Wiener, é a de introduzir um fator peso associado a cada variável, ou uma função peso conjunta para todas as variáveis. A função peso forma a medida de integração, que para muitos fins é uma probabilidade (mas não é necessário que sempre o seja) <sup>(16)</sup>.

Suponhamos que temos para a medida  $\omega_{P_N}$  associada à

partição  $P_N$  a expressão

$$\omega_{P_N} \prod_{j=0}^{N-1} df_j = \omega_{P_N}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \prod_{j=0}^{N-1} df_j \quad (2.2.3)$$

Formamos agora uma nova sucessão de integrais múltiplas:

$$I_{P_N} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \phi_{P_N}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \omega_{P_N}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \prod_{j=0}^{N-1} df_j \quad (2.2.4)$$

Com funções peso "físicas" teremos boa matemática, isto é, limites finitos. Definimos agora: se existe o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_{P_N} = I[f] \quad , \quad (2.2.5)$$

independentemente da sucessão de partições  $\{P_N\}$ , supondo, é claro, que o maior subintervalo de  $P_N$  tenda sempre a zero, então  $I[f]$  é a integral funcional do funcional  $\phi[f]$  dado a partir da sucessão eq. (1), com respeito à medida de integração fornecida pela sucessão peso eq. (3). Claramente, a integral funcional  $I[f]$  é, por sua vez, um novo funcional.

Embora seja inútil procurar o limite da sucessão  $\omega_{P_N}$  dada pela eq. (3) sozinho, independentemente do processo de integração múltipla eq. (4), ainda assim podemos denotar o processo de limite eq. (5), que dá a integral funcional  $I[f]$ , pela seguinte notação sugestiva:

$$I[f] = \int \phi[f(\tau)] \cdot \omega[f(\tau)] \cdot \prod_{t' \leq \tau \leq t} df(\tau) \quad (2.2.6)$$

Costuma-se denominar de diferencial funcional a quantidade denotada pelo símbolo  $\omega[f(\tau)] \cdot \prod_{t' \leq \tau \leq t} df(\tau)$ , cujo significado preciso é obtido através da sucessão eq. (4). Quando a medida de integração,  $\omega_{P_N}$ , é uma densidade de probabilidade, então a integral funcional  $I[f]$  é o valor médio do funcional  $\phi[f]$ , e em tal caso faremos uso da notação  $I[f] = \langle \phi[f] \rangle$ .

Vamos exemplificar o conceito de integral funcional seguindo o procedimento que Chandrasekhar<sup>(5)</sup> aplicou ao estudo de uma partícula Browniana sujeita à ação de uma dada força externa,  $\vec{F}(\tau)$ . A equação de movimento de uma tal partícula será a equação de Langevin (1.1) com o termo da força externa agregado:

$$m\ddot{\vec{x}} = -m/t_0 \dot{\vec{x}} + \vec{f}(\tau) + \vec{F}(\tau) \quad . \quad (2.2.7)$$

A equação de Langevin, como vimos, é uma equação de movimento compartilhada por cada membro de uma assembléia de partículas Brownianas, sendo a força térmica  $\vec{f}(\tau)$  a representante do efeito aleatório da agitação térmica do meio. Devido à altíssima frequência de colisão ( $\sim 10^{20} \text{ s}^{-1}$ ) para uma partícula Browniana típica, podemos falar numa distribuição de força aleatória, aproximadamente, a cada instante, isto é, em intervalos muito curtos, e podemos assim definir uma distribuição funcional para a força térmica. Deste modo, as quantidades derivadas da eq. (1.1) serão funcionais da força térmica, sendo então obtidas por integração funcional a partir das seguintes hipóteses sobre a natureza desta força térmica:

- i) a distribuição (normalizada) da força aleatória  $\vec{f}(\tau)$  é gaussiana:

$$\omega \left[ \vec{f}(\tau) \right] d\vec{f}(\tau) = \left( \frac{\Delta\tau}{2\pi C} \right)^{3/2} \exp \left[ -1/2C \vec{f}^2(\tau) \Delta\tau \right] d\vec{f}(\tau) \quad , \quad (2.2.8)$$

se  $\Delta\tau \ll t_0$ , sendo  $C$  a constante de normalizaçãõ;

ii) forças aleatórias em tempos distintos não se correlacionam – então a probabilidade conjunta para a força aleatória (ao longo de subintervalos muito pequenos de uma partiçãõ  $P_N$  do intervalo  $[t', t]$ ) será o produto das probabilidades individuais em cada subintervalo da partiçãõ:

$$\omega_{P_N} \left[ \vec{f}_j \right] \prod_{j=0}^{N-1} d\vec{f}_j = \exp \left[ - \sum_{j=0}^{N-1} \left( 1/2C \vec{f}_j^2 \Delta\tau_j \right) \right] \prod_{j=0}^{N-1} \left( \frac{\Delta\tau_j}{2\pi C} \right)^{3/2} d\vec{f}_j \quad . \quad (2.2.9)$$

Com a probabilidade funcional eq. (9) podemos realizar a integração funcional necessária para obter a velocidade média de uma partícula Browniana: a solução da eq. (7) para a velocidade  $\vec{v}(t)$ , satisfazendo a condição inicial  $\vec{v}(t') = \vec{v}'$ , é dada pelo funcional

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'_t \left[ \vec{f}(\tau) \right] = \exp \left[ \frac{(t'-t)}{t_0} \right] \vec{v}' + \int_{t'}^t \exp \left[ \frac{(\tau-t)}{t_0} \right] m^{-1} \vec{f}(\tau) d\tau + \int_{t'}^t \exp \left[ \frac{(\tau-t)}{t_0} \right] m^{-1} \vec{f}(\tau) d\tau \quad , \quad (2.2.10)$$

como se vê por simples substituição.

Para obter a média funcional da eq. (10) construímos uma sequência  $\{V_{P_N}\}$  de funções de  $N$ -variáveis usando uma sequência de partições  $P_N$  com  $\max(\Delta\tau(N)) \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ :

$$\vec{v}_{P_N} = \overline{\vec{v}(t)} + \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left[\frac{(\tau_j - t)}{t_0}\right] \vec{f}_j / m \Delta\tau_j \quad , \quad (2.2.11)$$

onde

$$\overline{\vec{v}(t)} = \exp\left[\frac{(t' - t)}{t_0}\right] \vec{v}' + \int_{t'}^t \exp\left[\frac{(\tau - t)}{t_0}\right] \frac{\vec{F}}{m}(\tau) \Delta\tau \quad (2.2.12)$$

é a velocidade produzida apenas pela ação da força externa.

A seguir, obtemos o valor médio de  $v_{P_N}$  em relação à distribuição de probabilidade  $\omega_{P_N}$  dada pela eq. (9):

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_{P_N} \rangle &= \int \vec{v}(t) \omega_{P_N} \prod_{j=0}^{N-1} d\vec{f}_j = \\ &= \int \overline{\vec{v}(t)} \omega_{P_N} \prod_{j=0}^{N-1} d\vec{f}_j + \int \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left[\frac{(\tau_i - t)}{t_0}\right] \vec{f}_i / m \Delta\tau_i \omega_{P_N} \prod_{j=0}^{N-1} d\vec{f}_j = \\ &= \overline{\vec{v}(t)} \int \omega_{P_N} \prod_{j=0}^{N-1} d\vec{f}_j + \int \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left[\frac{(\tau_i - t)}{t_0}\right] \frac{\vec{f}_i}{m} \Delta\tau_i \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left[-\sum_{j=0}^{N-1} \left(1/2C \vec{f}_j^2 \Delta\tau_j\right)\right] \cdot \prod_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\Delta\tau_j}{2\pi C}\right)^{3/2} d\vec{f}_j = \\ &= \overline{\vec{v}(t)} + \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left[\frac{(\tau_i - t)}{t_0}\right] \frac{\Delta\tau_i}{m} \int \vec{f}_i \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left[-\sum_{j=0}^{N-1} \left(1/2C \vec{f}_j^2 \Delta\tau_j\right)\right] \cdot \prod_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\Delta\tau_j}{2\pi C}\right)^{3/2} d\vec{f}_j = \overline{\vec{v}(f)} \quad , \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

onde usamos o fato de que  $\omega_{P_N}$  é uma distribuição normalizada, e que, além disso, é um produto de gaussianas, cada uma com média nula, isto é,

$$\int \omega_{P_N} \prod_{j=0}^{N-1} d\vec{f}_j = 1$$



e

$$\int f_k^{(\alpha)} \omega_{p_N} \prod_{j=0}^{N-1} d\vec{f}_j = 0,$$

$\alpha = 1, 2, 3$  índice das componentes de  $\vec{f}$ .

Passando ao limite, obtemos então o valor médio desejado do funcional velocidade, ou seja, se  $N \rightarrow \infty$  temos

$$\langle \vec{v}_t^t, [f] \rangle = \overline{\vec{v}(t)}, \quad (2.2.14)$$

completando a integração.

### 2.3 - A INTEGRAL DE CAMINHO DE FEYNMAN

Vamos agora reproduzir a formulação de Feynman para a mecânica quântica, construindo sua integral de caminho para o propagador da equação de Schrödinger<sup>(9)</sup>, no caso de uma Hamiltoniana independente do tempo; por simplicidade de exposição, vamos restringir-nos a coordenadas cartesianas. O procedimento que vamos seguir<sup>(47)</sup> difere da abordagem de Feynman no sentido de ser não-axiomático e dedutivo, enquanto Feynman optou por uma apresentação essencialmente postulativa (ver o final desta seção).

Como é bem conhecido, o propagador da equação de Schrödinger de um sistema é suposto conter toda a informação quântica acerca deste sistema. Assim, seria apropriado começar nosso estudo considerando o que é um propagador e como ele surge nos problemas quânticos.

Consideremos um sistema com a Hamiltoniana

$$H(\vec{x}) = (-\hbar^2/2m)\nabla^2 + U(\vec{x}), \quad (2.3.1)$$

O problema que enfrentamos é o de descrever a evolução no tempo da função de onda do sistema, que num dado instante ( digamos  $t = 0$ ) é expressa por  $\psi_0(\vec{x})$ . A resposta é obtida resolvendo a equação de Schrödinger,

$$\left[ i\hbar \partial/\partial t - H(\vec{x}) \right] \psi(\vec{x}, t) = 0 \quad , \quad (2.3.2)$$

com a condição inicial  $\psi(\vec{x}, 0) = \psi_0(\vec{x})$ .

Em termos do operador de evolução,  $\exp[-iHt/\hbar]$ , esta solução é dada por

$$\psi(\vec{x}, t) = \exp\left\{-i/\hbar H(\vec{x})t\right\} \psi_0(\vec{x}) \quad , \quad (2.3.3)$$

que claramente satisfaz tanto a equação de Schrödinger, quanto a condição inicial. Na eq. (3) o operador de evolução atua localmente sobre a função de onda inicial, que se transforma no tempo obedecendo à equação de Schrödinger. Se agora quisermos dissociar o processo de propagação do conteúdo particular da função de onda, reescrevemos a eq. (3) como segue:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) &= \int \exp\left[-i/\hbar H(\vec{x})t\right] \delta(\vec{x}-\vec{x}') \psi_0(\vec{x}') d\vec{x}' = \\ &= \int K(\vec{x}, \vec{x}'; t, 0) \psi_0(\vec{x}') d\vec{x}' \quad , \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

onde  $K(\vec{x}, \vec{x}'; t, 0)$  é o núcleo (kernel) ou função de Green<sup>(48)</sup> associada ao problema eq. (2).

O núcleo

$$K(\vec{x}, \vec{x}'; t, 0) = \exp\left[-i/\hbar H(\vec{x})t\right] \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.3.5)$$

é o propagador de evolução no tempo na representação das coordenadas. Ele fornece a função de onda no instante  $t$  (não obrigatoriamente posterior) a partir da informação transportada pela função de onda em  $t = 0$ , e satisfaz a equação de Schrödinger,

$$H(\vec{x})K(\vec{x}, \vec{x}'; t, 0) = i\hbar \partial/\partial t K(\vec{x}, \vec{x}'; t, 0) \quad ,$$

ou

$$\left[i\hbar \partial/\partial t + \hbar^2/2m\nabla^2 - U(\vec{x})\right]K(\vec{x}, \vec{x}'; t, 0) = \delta(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad . \quad (2.3.6)$$

Como

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \int d\vec{k} \langle \vec{x} | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \vec{x}' \rangle = \langle \vec{x} | \vec{x}' \rangle \quad ,$$

onde os  $\langle \vec{x} | \vec{k} \rangle$  formam um conjunto completo de funções de onda, o núcleo  $K$  pode assumir a forma de um elemento de matriz do operador de evolução,

$$\begin{aligned} K(\vec{x}, \vec{x}'; t) &= K(\vec{x}, \vec{x}'; t, 0) = \exp\left[-i/\hbar H(\vec{x})t\right] \langle \vec{x} | \vec{x}' \rangle = \\ &= \langle \vec{x} | \exp\left[-i/\hbar H(\vec{x})t\right] | \vec{x}' \rangle \quad . \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Expandindo em série o operador de evolução, obtemos uma expressão explícita para o propagador eq. (5) pelo seguinte processo aditivo:

$$K = \left[ 1 - i/\hbar Ht + 1/2! (-i/\hbar)^2 H^2 t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{-iHt}{\hbar}\right)^n + \dots \right] \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Outro modo, que costuma ser empregado na construção

de integrais de caminho, seria via uma expansão multiplicativa do operador de evolução,

$$K = \left( 1 - i/\hbar \frac{Ht}{N} \right)^N \delta(x=x') \quad , \quad (2.3.8)$$

uma vez que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - i/\hbar \frac{Ht}{N} \right)^N = \exp \left[ -i/\hbar Ht \right] \quad .$$

Observemos que se adicionarmos termos da ordem de  $(\Delta t)^2$ ,  $\Delta t = t/N$ , a quaisquer dos fatores  $(1 - i/\hbar H\Delta t)$  na eq. (8), o limite do produto destes N fatores, quando  $N \rightarrow \infty$ , não é afetado. Assim, podemos obter nosso propagador como um caso limite do elemento de matriz abaixo,

$$\langle \vec{x} | (1 - i/\hbar H\Delta t) \cdot (1 - i/\hbar H\Delta t) \cdot \dots \cdot (1 - i/\hbar H\Delta t) | \vec{x}' \rangle \quad . \quad (2.3.9)$$

Inserindo conjuntos completos de autofunções entre os vários operadores, temos

$$K_N(\vec{x}, \vec{x}'; t) = \int \dots \int \langle \vec{x} | \left( 1 - i/\hbar H(\vec{x}) \Delta t \right) | \vec{x}_{N-1} \rangle \langle \vec{x}_{N-1} | \left( 1 - i/\hbar H(\vec{x}) \Delta t \right) | \vec{x}_{N-2} \rangle \dots \dots \langle \vec{x}_1 | \left( 1 - i/\hbar H(\vec{x}) \Delta t \right) | \vec{x}' \rangle d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \dots d\vec{x}_{N-1} \quad . \quad (2.3.10)$$

Temos na eq. (10) o produto de N elementos de matriz de propagadores de "tempo curto" da forma

$$\langle \vec{x}_{j+1} | \left( 1 - i/\hbar H(\vec{x}_{j+1}) \Delta t \right) | \vec{x}_j \rangle = \left( 1 - i/\hbar H(\vec{x}_{j+1}) \Delta t \right) \delta(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j) \quad , \quad (2.3.11)$$

ocorrendo correspondentemente (N-1) integrações tridimensionais.

Para obter a fórmula da integral de Feynman, empregamos a decomposição em ondas planas da transformação identidade, isto é,

$$\delta(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j) = 1/(2\pi\hbar)^3 \int d\vec{p} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot (\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)\right], \quad (2.3.12)$$

que é feita empregando, essencialmente, a completicidade das auto-funções do operador momentum  $\vec{p}$ .

Colocando a Hamiltoniana eq. (1) em seu lugar na expressão eq. (11) para o elemento de matriz de um dos N propagadores de tempo curto e com o uso da eq. (12), temos a aproximação

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_{j+1} | \left[ 1 - i/\hbar \left( -\hbar^2/2m\nabla_{j+1}^2 + U(\vec{x}_{j+1}) \right) \Delta t \right] | \vec{x}_j \rangle &= \\ &= \left[ 1 - i/\hbar \left( -\hbar^2/2m\nabla_{j+1}^2 + U(\vec{x}_{j+1}) \right) \Delta t \right] \cdot \delta(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j) = \\ &= 1/(2\pi\hbar)^3 \int d\vec{p} \left\{ 1 - \frac{1}{\hbar} \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{x}_j) \right] \Delta t \right\} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot (\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)\right], \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

onde em virtude da função delta trocamos  $U(\vec{x}_{j+1})$  por  $U(\vec{x}_j)$ .

Como notamos anteriormente, podemos adicionar aos operadores de tempo curto quaisquer termos de ordem mais alta que  $\Delta t$ , sem que isso afete o limite do produto de operadores na eq. (8). Como a expansão de  $\exp[-i/\hbar H \Delta t]$  é, até a ordem  $\Delta t$ , idêntica a  $[1 - i/\hbar H \Delta t]$ , podemos modificar a expressão (13) e integrar:

$$\langle \vec{x}_{j+1} | \left[ 1 - i/\hbar H(\vec{x}_{j+1}) \Delta t \right] | \vec{x}_j \rangle =$$

$$\begin{aligned}
 &= 1/(2\pi\hbar)^3 \int d\vec{p} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{x}_j)\right)\Delta t\right] \cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar}\vec{p} \cdot (\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)\right] = \\
 &= \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{3/2} \cdot \exp\left[i/\hbar \left(m/2 \left(\frac{(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)}{\Delta t}\right)^2 - U(\vec{x}_j)\right)\Delta t\right] \quad (2.3.14)
 \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na eq. (10), temos para o propagador aproximado o resultado

$$\begin{aligned}
 K_N(\vec{x}, \vec{x}'; t) &= \int \exp\left[i/\hbar \left(m/2 \left(\frac{(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)}{\Delta t}\right)^2 - U(\vec{x}_j)\right)\Delta t\right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{3/2} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{3/2} d\vec{x}_j \quad , \quad (2.3.15)
 \end{aligned}$$

onde  $\vec{x}_0 = \vec{x}'$  e  $\vec{x}_N = \vec{x}$ .

Observemos que na eq. (15) o argumento da exponencial,

$$i/\hbar \left[ m/2 \left( \frac{(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)}{\Delta t} \right)^2 - U(\vec{x}_j) \right] \Delta t$$

não é senão a Lagrangeana  $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$  usual do sistema, em forma discretizada, multiplicada pelo fator  $i/\hbar \Delta t$ . O produto que na eq. (15) acompanha a exponencial é o chamado diferencial de caminho  $D[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{N-1}]$ , que contém os fatores corretos de normalização (ou seja, a medida de integração) para obter o propagador desejado, através do processo de integração múltipla (em cada  $dx$ ) no limite de infinitas subdivisões do intervalo  $[0, t]$ . Em outras palavras, no limite  $N \rightarrow \infty$  a sucessão  $K_N(\vec{x}, \vec{x}'; t)$  tende a  $K(\vec{x}, \vec{x}'; t)$ .

Neste limite, costuma-se fazer uso da seguinte nota - ção, naturalmente induzida da eq. (15):

$$\begin{aligned}
 K(\vec{x}, \vec{x}'; t) &= \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^t \left\{ \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2(\tau) - U(\vec{x}(\tau)) \right\} d\tau \right] D[\vec{x}(t)] = \\
 &= \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^t L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) d\tau \right] D[\vec{x}(t)] = \\
 &= \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right] D[\vec{x}(t)] \quad , \quad (2.3.16)
 \end{aligned}$$

onde

$$S = \int_0^t L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \tau) d\tau \quad (2.3.17)$$

é a ação clássica do sistema e com

$$D[\vec{x}(t)] = \left( \frac{m}{2\pi i \hbar d\tau} \right)^{3/2} \prod_{0 < \tau < t} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar d\tau} \right)^{3/2} d\vec{x}(\tau)$$

e

$$\vec{x}(0) = \vec{x}' \quad \text{e} \quad \vec{x}(t) = \vec{x} \quad .$$

Esta notação procura indicar as integrações múltiplas (integrações sobre caminhos); contudo, ela pode obscurecer certas dificuldades que advêm da contribuição provinda dos caminhos descontínuos (49,50).

O método de construção da integral de caminho de Feynman acima é essencialmente dedutivo e com base numa formulação Hamiltoniana. O próprio Feynman<sup>(9)</sup> partiu de uma formulação dinâmica Lagrangeana e procedeu através da constituição de dois postulados, um prescrevendo a estrutura matemática necessária para o cálculo de probabilidades associadas a caminhos na mecânica quântica, e o outro estipulando o cômputo da contribuição de cada caminho:

POSTULADO I: "Se uma medição ideal (mínimo distúrbio para máxima informação) é realizada para determinar se uma partícula tem um caminho passando numa dada região do espaço-tempo, então a probabilidade de que o resultado seja afirmativo é dada pelo módulo quadrado de uma soma de contribuições complexas, uma de cada caminho na região".

POSTULADO II: "Os caminhos contribuem igualmente em magnitude, mas a fase de suas contribuições é a ação clássica (em unidades de  $\hbar$ ), isto é, a integral no tempo da Lagrangeana da partícula, tomada ao longo do caminho".

Feynman teve em mente, assim, criar um modelo de mecânica quântica associando a mecânica clássica (ação clássica  $S$ ) ao princípio quântico da Superposição (soma de contribuições complexas).

#### 2.4 - INTEGRAL DE CAMINHO NO ESPAÇO DE FASE

A integral de Feynman eq. (2.16) traduz, na forma de uma integral funcional no espaço das configurações, a conexão entre a mecânica clássica e a mecânica quântica na formulação de Feynman; contudo, é conveniente aqui a introdução do espaço de fase  $(q,p)$  para uma formulação Hamiltoniana<sup>(40,51,52)</sup> do processo de quantização por integrais de caminho, mais apropriada para a descrição de transformações dinâmicas do sistema, o alvo que temos em vista.

Consideremos então o problema de obter a amplitude de



probabilidade ou propagador  $K_H(q',q;t)$ , um núcleo ou função de Green para a equação de Schrödinger (como visto na relação eq. (3.4)) na representação de coordenadas, quando temos conjuntos completos de vetores de estado  $|q\rangle$  e  $|p\rangle$  de posições e momenta, respectivamente. O propagador para uma transição entre estados  $|q,t\rangle$  e  $|q',t'\rangle$ , ou elemento de matriz do operador de evolução  $\exp[-i/\hbar H(q,p)t]$  para esta transição, na representação das coordenadas, é

$$K_H(q',q;t',t) = \langle q',t' | q,t \rangle = \langle q' | \exp \left[ -i/\hbar H(q,p)(t'-t) \right] | q \rangle, \quad (2.4.1)$$

de acordo com a expressão (3.7). A partir de uma partição do intervalo temporal  $[t,t']$  em  $N$  subintervalos de comprimento  $\Delta_i$  temos para o propagador (1), inserindo completitudes em  $q$

$$\int dq_i |q_i\rangle \langle q_i| = 1$$

nos instantes  $t_i$ ,  $i = N-1, \dots, 1$ , a expressão

$$\begin{aligned} K_H(q',q;t',t) &= \langle q',t' | q,t \rangle = \\ &= \langle q',t' | \left\{ \int dq_{N-1} dq_{N-2} \dots dq_1 |q_{N-1},t_{N-1}\rangle \langle q_{N-1},t_{N-1}| \dots \langle q_1,t_1| \right\} |q,t\rangle = \\ &= \int dq_{N-1} \dots dq_1 \cdot \langle q_N | \exp \left[ -i/\hbar H(t_N - t_{N-1}) \right] |q_{N-1}\rangle \dots \\ &\quad \dots \langle q_1 | \exp \left[ -i/\hbar H(t_1 - t) \right] |q\rangle = \\ &= \int dq_{N-1} \dots dq_1 \cdot \prod_{i=1}^N \langle q_i | \exp \left[ -i/\hbar \hat{H}(t_i - t_{i-1}) \right] |q_{i-1}\rangle, \quad (2.4.2) \end{aligned}$$

onde  $q_N = q'$  e  $q_0 = q$ .



Inserindo agora completitudes em  $p$  (normalizadas por  $2\pi\hbar$ ),

$$\int \frac{dp_i}{2\pi\hbar} |p_i\rangle\langle p_i| = 1$$

no termo genérico  $\langle q_i | \exp[-i/\hbar H(t_i - t_{i-1})] | q_{i-1} \rangle$ , com  $\Delta_i = (t_i - t_{i-1})$ , temos

$$\begin{aligned} \langle q_i | \exp[-i/\hbar H(t_i - t_{i-1})] | q_{i-1} \rangle &= \int \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \int \frac{dp_{i-1}}{2\pi\hbar} \langle q_i | p_i \rangle \langle p_i | \cdot \\ &\cdot \exp[-i/\hbar H(q, p) \Delta_i] | p_{i-1} \rangle \langle p_{i-1} | q_{i-1} \rangle = \\ &= 1/2\pi\hbar \int dp_i \int dp_{i-1} e^{i/\hbar p_i q_i} \exp[-i/\hbar H(q_{i-1}, p_{i-1}) \Delta_i] \cdot \\ &\cdot \delta(p_i - p_{i-1}) \cdot e^{-i/\hbar p_{i-1} q_{i-1}}, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

onde usamos a expressão da onda plana  $\langle q | p \rangle = e^{i/\hbar pq}$  e a relação de ortogonalidade  $\langle p_i | p_{i-1} \rangle = 2\pi\hbar \delta(p_i - p_{i-1})$ .

Integrando em  $p_i$ , vem

$$\begin{aligned} \langle q_i | \exp[-i/\hbar H(t_i - t_{i-1})] | q_{i-1} \rangle &= \\ &= 1/2\pi\hbar \int dp_{i-1} \exp\left[i/\hbar \left\{ p_{i-1} (q_i - q_{i-1}) - H(q_{i-1}, p_{i-1}) \Delta_i \right\}\right] = \\ &= 1/2\pi\hbar \int dp_{i-1} \exp\left[i/\hbar \left\{ p_{i-1} \left( \frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta_i} \right) - H(q_{i-1}, p_{i-1}) \right\} \Delta_i\right]. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Retornando ao produtório da eq. (2), segue que

$$\prod_{i=1}^N \langle q_i | \exp[-i/\hbar H(t_i - t_{i-1})] | q_{i-1} \rangle =$$

$$= 1/(2\pi\hbar)^N \int dp_{N-1} \dots \int dp_0 \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N \left\{ p_{i-1} \cdot \left( \frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta_i} \right) - H(q_{i-1}, p_{i-1}) \right\} \Delta_i \right] \quad (2.4.5)$$

Portanto, somando nos caminhos (ou seja, integrando nos  $q_i$ ) e tomando o limite da repartição infinita ( $N \rightarrow \infty \implies \Delta_i \rightarrow 0$ ) obtemos o propagador  $K_H(q', q; t', t)$  da eq. (1):

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta_i \rightarrow 0} \int \dots \int \prod_i [dq_i] \int \dots \int \prod_i \left[ \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N \left\{ p_{i-1} \left( \frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta_i} \right) - H(q_{i-1}, p_{i-1}) \right\} \Delta_i \right] &= \\ = K_H(q', q; t', t) = \int D \left[ \frac{p}{2\pi\hbar} \right] \int D [q] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} \left\{ p(t) \dot{q}(t) - H(q, p) \right\} dt \right] &. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Na notação de Fadeev <sup>(41)</sup>,

$$K_H(q', q; t', t) = \int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} \prod_t \left[ \frac{dq(t) dp(t)}{2\pi\hbar} \right] e^{i/\hbar S} \quad , \quad (2.4.7)$$

onde novamente  $S = \int_t^{t'} (pq - H) dt = \int_t^{t'} L dt$  é a ação clássica associada ao sistema.

Esta amplitude de probabilidade não é a de Feynman (eq. (3.16)), pois que deriva propriamente de uma formulação dinâmica Hamiltoniana (enquanto na construção de Feynman, como vimos, a ação  $S$  é definida a partir da Lagrangeana do sistema), sendo expressa em termos de integrais funcionais no espaço de fase (e não em integrais no espaço das configurações). Para ob-

ter a forma de Feynman, tomamos na eq. (6) uma Hamiltoniana do tipo

$$H(p_i, q_i) = p_i^2/2m + U(q_i) \quad ;$$

como uma integral gaussiana vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(ap - bp^2)\right] = \frac{e^{ia^2/4b\hbar}}{2\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{b}} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{i}} \quad , \quad (2.4.8)$$

teremos na eq. (6)

$$\begin{aligned} \int \prod_i \left[ \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \right] \exp\left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N \Delta_i \left\{ p_{i-1} \left( \frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta_i} \right) - H(q_{i-1}, p_{i-1}) \right\} \right] = \\ = \left[ \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i \Delta_i}} \right]^N \exp\left[ \frac{i}{\hbar} \sum_i \left\{ m/2 \left( \frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta_i} \right)^2 - U(q_{i-1}) \right\} \Delta_i \right], \end{aligned}$$

e portanto no limite

$$K(q', q; t', t) = \int D[q(t)] \exp\left[ \frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} \left\{ \frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q) \right\} dt \right] \quad , \quad (2.4.9)$$

que corresponde à expressão eq. (3.16) para a integral de Feynman. Assim, ao menos no caso simples em que  $H = (p^2/2m + U(q))$ , a formulação Hamiltoniana eq. (6) da integral de caminho no espaço de fase é equivalente à formulação anterior no espaço das configurações. No argumento da exponencial na eq. (9) encontramos sem dificuldade a Lagrangeana  $L$  do sistema, tal como após a eq. (2.15).

Percebemos, em resumo, que o processo de quantização

por meio de integrais funcionais consiste essencialmente na passagem da mecânica clássica ao regime quântico pelo uso de uma integral de caminho para expressar a função de Green ou propagador  $K(q',q;t)$ . Podemos nos interrogar agora acerca da quantização de outras transformações dinâmicas clássicas, que não a evolução Hamiltoniana, por este método, em especial transformações canônicas arbitrárias, cuja expressão por integrais de caminho procuraremos obter no cap. 4. Apresentaremos a seguir, para tanto, alguns elementos de Dinâmica Clássica convenientes a este estudo.

## CAPÍTULO 3

### DINÂMICA HAMILTONIANA

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

É um fato conhecido da experiência que, a par da multiplicidade de propriedades que variam incessantemente com o tempo exibidas pelos sistemas físicos, algumas grandezas permanecem constantes, sem modificação — como dizemos, são conservadas. Estas propriedades invariantes ocorrem em tantos e tão diversos sistemas físicos que seu estudo se confunde à própria essência da Física, e as considerações a seu respeito constituem as mais fundamentais leis físicas conhecidas <sup>(53)</sup>.

Foi a partir das assertivas de Jacobi de que a invariância sob translações da Lagrangeana de um sistema mecânico clássico implicaria na conservação do momentum linear total (1842) que ficou estabelecida a conexão entre estas leis de conservação de grandezas e as simetrias, ou invariâncias, que a descrição dos sistemas físicos apresenta sob certas transformações dinâmicas <sup>(54)</sup>. Cabe aqui observar que o termo simetria, para os gregos, significava algo bem proporcionado, bem equilibrado, e era portanto associado ao conceito clássico de beleza. Na ciência moderna, contudo, o termo simetria está ligado aos conceitos de igualdade (identidade, mesmidade) e constância. Assim, em relação a uma dada transformação, simetria (da estrutura intrín

seca do sistema físico em questão) e invariância (da forma matemática das equações que o descrevem) resultam sinônimos na Física da atualidade <sup>(55)</sup>.

De particular importância para nós, todavia, é a relação entre simetrias e leis de conservação na formulação Hamiltoniana, apropriada para a descrição de sistemas tanto clássicos quanto quânticos <sup>(56)</sup>. Em ambos os casos, a conservação de quantidades fundamentais como momentum, momento angular e energia, deriva de simetrias da Hamiltoniana do sistema sob as transformações correspondentes, translações, rotações e deslocamentos temporais. Genericamente, sempre que uma lei de conservação rege a evolução dinâmica de um sistema, sua Hamiltoniana é invariante sob o respectivo grupo de transformações (visto que um conjunto de transformações de simetria num sistema físico apresenta as propriedades matemáticas atribuídas a um grupo <sup>(\*)</sup>) <sup>(54)</sup>. Apresentamos neste capítulo, portanto, um esboço da mecânica clássica Hamiltoniana e neste contexto algumas propriedades básicas de simetrias e transformações dinâmicas que serão de utilidade posteriormente.

### 3.2 - MÉTODO HAMILTONIANO: FORMALISMO DE PBs

A mecânica clássica é construída usualmente a partir de um princípio de ação. A partir da variação da ação S definida por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad , \quad (3.2.1)$$

---

<sup>(\*)</sup> Ver Apêndice A.

onde  $L = L(q, \dot{q}, t)$  é a Lagrangeana do sistema (ver eq. (2.3.17)), impondo a invariância variacional de  $S$  (Princípio de Hamilton) obtemos as equações de movimento de Euler-Lagrange<sup>(57)</sup>. Desta formulação Lagrangeana da dinâmica podemos obter a formulação Hamiltoniana (que pode ser considerada como um limite ou uma primeira aproximação para um sistema quântico), através, essencialmente, de uma definição apropriada do momentum canônico e de uma transformação de Legendre, como veremos a seguir:

Supondo um número finito de graus de liberdade (seria apenas uma questão formal a extensão ao número infinito de graus de liberdade necessários no caso de uma teoria de campo), seja um conjunto de coordenadas generalizadas  $q = \{q_n\}$ ,  $n=1, \dots, N$ , onde  $N$  é o número de graus de liberdade do sistema. Temos então as velocidades  $\dot{q}_n = dq_n/dt$ ; a Lagrangeana é uma função  $L = L(q, \dot{q}, t)$  das coordenadas e velocidades e (possivelmente) do tempo. Obtemos as equações de movimento de Euler-Lagrange variando a integral de ação:

$$\delta S = 0 \implies \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \quad , \quad n = 1, \dots, N \quad . \quad (3.2.2)$$

Para passar ao formalismo Hamiltoniano, introduzimos as variáveis momentum  $p_n$ , definidas por

$$p_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \quad . \quad (3.2.3)$$

Consideremos então a quantidade  $\sum p_n \dot{q}_n - L$ . Vamos fazer variações nas coordenadas  $q$  e nas velocidades  $\dot{q}$ ; como resultado destas variações, temos (índices repetidos indicam soma):



$$\begin{aligned}\delta(p_n \dot{q}_n - L) &= \delta p_n \dot{q}_n + p_n \delta \dot{q}_n - \left( \frac{\partial L}{\partial q_n} \right) \delta q_n - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \delta \dot{q}_n = \\ &= \delta p_n \dot{q}_n - \left( \frac{\partial L}{\partial q_n} \right) \delta q_n \quad , \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

em virtude da definição eq. (3); a expressão (4), como vemos, envolve apenas variações das coordenadas q's e dos momenta p's, sendo  $p = \{p_n\}$ , não envolvendo variação das velocidades. Isto significa que, se realizamos uma transformação de Legendre tal como

$$H = p_n \dot{q}_n - L \quad , \quad (3.2.5)$$

a quantidade resultante H pode ser expressa apenas em termos de q's e p's, independentemente das velocidades. Neste caso, ela é chamada Hamiltoniana H do sistema. Definimos então o espaço (q,p) como o espaço de fase W do sistema, atribuindo um significado físico específico para cada coordenada  $q_n$  e  $p_n$ , as quais serão agora tomadas como independentes. Assim temos da eq. (4) que

$$\delta H = \dot{q}_n \delta p_n - \left( \frac{\partial L}{\partial q_n} \right) \delta q_n \quad ; \quad (3.2.6)$$

levando em conta a independência dos p's e q's no espaço de fase, variando  $H = H(q,p)$  obtemos

$$\delta H = \partial H / \partial q_n \delta q_n + \partial H / \partial p_n \delta p_n$$

e igualando, chegamos então às equações de movimento de Hamilton:

$$\dot{q}_n = \partial H / \partial p_n \quad , \quad \dot{p}_n = -\partial H / \partial q_n \quad . \quad (3.2.7)$$

Estas são as equações que regem a evolução no tempo do sistema físico descrito pelas variáveis  $(q,p)$ . É simples a extensão ao caso de um sistema com vínculos<sup>(56)</sup>. É conveniente, por outro lado, a introdução de um certo formalismo que nos capacita a escrever compactamente estas expressões, por meio dos colchetes de Poisson (PBs) definidos como segue:

Sejam  $f(q,p)$  e  $g(q,p)$  funções de  $q$  e  $p$ ; o colchete de Poisson de  $f$  e  $g$  é dado por definição pela expressão

$$\{f,g\}_{PB} = \sum_n \left( \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial q_n} \right), \quad (3.2.8)$$

sendo as seguintes suas propriedades fundamentais:

- i) Antisimetria:  $\{f,g\}_{PB} = -\{g,f\}_{PB}$ .
- ii) Linearidade:  $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\}_{PB} = c_1 \{f_1, g\}_{PB} + c_2 \{f_2, g\}_{PB}$ ;  $c_1, c_2$  números. (3.2.9)
- iii) Elemento neutro:  $\{c, f\}_{PB} = 0$ .
- iv) Identidade de Jacobi;  $\sum_{\substack{f,g,h \\ \text{cíclicos}}} \{\{f,g\}_{PB}, h\}_{PB} = 0$ .

Para incorporar este formalismo em nossa formulação Hamiltoniana tomamos um observável  $f$  (isto é, uma função real sobre o espaço de fase  $W$ <sup>(58)</sup>) relativo a um sistema descrito por uma Hamiltoniana  $H$ . A variação no tempo de  $f$  é dada por

$$\dot{f} = df(q,p)/dt = \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial p_n} \dot{p}_n,$$

mais um termo adicional  $\partial f/\partial t$  caso  $f$  seja função explícita do tempo. Empregando as equações de Hamilton (7), obtemos

$$\dot{f} = \left( \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial q_n} \right) = \{f, H\}_{PB} \quad , \quad (3.2.10)$$

de acordo com a definição eq. (8). Deste modo, a variação no tempo de um observável qualquer de um dado sistema é obtida através do PB do observável com a Hamiltoniana  $H$  do sistema (mais o termo  $\partial f/\partial t$ , se for o caso) e portanto a grandeza  $f$  será uma constante de movimento caso seu PB com a Hamiltoniana se anule. Os observáveis  $f$  que satisfazem a esta relação constituem o conjunto das simetrias da Hamiltoniana  $H$  do sistema físico em questão, como veremos na seção 4 adiante.

Este resultado mostra que as equações de movimento de Hamilton (7) para as variáveis  $q$  e  $p$  são apenas casos particulares de (10):

$$\dot{q}_n = \{q_n, H\} \quad e \quad \dot{p}_n = \{p_n, H\} \quad . \quad (3.2.11)$$

Estas são as equações que regem a evolução no tempo do sistema em termos de PBs. O formalismo de PBs, por outro lado, é útil no estudo de transformações dinâmicas do sistema, como veremos a seguir.

### 3.3 - TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

Dentre as transformações dinâmicas usualmente estudadas na mecânica clássica, são especialmente interessantes as transformações que preservam a estrutura Hamiltoniana das equações

de movimento de um sistema no espaço de fase. Ou seja, considerando um conjunto de  $2N$  coordenadas generalizadas  $(q,p)$ , coloquemos sob exame as transformações gerais de coordenadas do tipo

$$(q,p) \rightarrow (Q,P) \quad ,$$

envolvendo  $2N$  funções independentes, de tal modo que as equações de Hamilton mantenham sua forma; isto é, que as equações de movimento (2.11),

$$\dot{q} = \{q, H\}_{PB} \tag{3.3.1}$$

$$\dot{p} = \{p, H\}_{PB}$$

satisfeitas no sistema de coordenadas  $(q,p)$ , sejam satisfeitas também no novo sistema,

$$\dot{Q} = \{Q, H'\}_{PB} \tag{3.3.2}$$

$$\dot{P} = \{P, H'\}_{PB}$$

onde  $H'$  é a Hamiltoniana expressa em termos das novas variáveis, assim como o próprio PB. Variáveis que obedecem ao esquema Hamiltoniano acima são chamadas de canônicas.

Para a validade das eqs. (2), o princípio de ação requer <sup>(58)</sup> que existam as seguintes relações, os PBs fundamentais, entre as variáveis novas e antigas:

$$\{Q_n, Q_{n'}\}_{PB} = \{P_n, P_{n'}\}_{PB} = 0 \quad ; \quad \{Q_n, P_{n'}\}_{PB} = \delta_{nn'} \tag{3.3.3}$$

(os PBs são computados em relação às variáveis originais); ou

por outra, introduzindo a notação

$$\omega_n = \begin{cases} q_n, n = 1, \dots, N \\ p_n, n = N+1, \dots, 2N \end{cases}$$

podemos resumir estas condições como segue:

$$\{\omega_n, \omega_{n'}\}_{PB} = \epsilon_{nn'} \quad (3.3.4)$$

onde a matriz simplética  $\epsilon_{nn'}$  é dada por

$$\epsilon_{nn'} = \begin{cases} 0, & \text{se } n, n' \leq N \text{ ou } n, n' > N, \\ 1, & \text{se } n \leq N, n' = n+N, \\ -1, & \text{se } n' \leq N, n = n'+N. \end{cases}$$

Nesta notação, as equações de Hamilton (1) tornam-se simplesmente:

$$\dot{\omega}_n = \{\omega_n, H\}_{PB} \quad (3.3.5)$$

Transformações entre sistemas de coordenadas canônicas, ou seja, transformações que respeitam a estrutura Hamiltoniana, são igualmente chamadas transformações canônicas (TCs).

As TCs num dado espaço de fase  $2N$ -dimensional que não são explicitamente dependentes do tempo formam um grupo de infinitos elementos, o grupo canônico. As condições necessárias para a existência de um grupo são trivialmente obedecidas graças às propriedades dos PBs fundamentais.

De fato, as propriedades de linearidade, antisimetria e identidade de Jacobi apresentadas pelo PB no espaço de fa-

se (ver eq.(2.9,i-iv)) permitem caracterizá-lo como a realização de um colchete de Lie<sup>(\*)</sup>, o elemento de derivação de uma álgebra de Lie cuja estrutura é descrita, justamente pelos PBs fundamentais eq. (4).

Dizemos que, tendo recebido o conjunto de observáveis clássicos uma estrutura de Lie, cada observável (i.e., uma função real no espaço de fase) gera um grupo de TCs a um parâmetro, ou seja, existe um mapeamento de observáveis em geradores de subgrupos de transformações a um parâmetro, o que inclusive é a característica básica de um "sistema dinâmico" abstrato, quer clássico quer quântico<sup>(59)</sup>. Como observaremos mais tarde (ver seção 5.1), a posse desta estrutura de Lie conferirá um arcabouço dinâmico comum à mecânica clássica e à mecânica quântica.

No caso clássico, de modo a obter uma realização por TCs (realização canônica) de um grupo de Lie qualquer  $G$  devemos procurar uma realização por PBs de sua álgebra de Lie associada  $L$ ; por outro lado, o conhecimento das propriedades de  $L$  permite uma reconstrução do grupo  $G$ , por exemplo, através da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (ver seção 5.3). Vários grupos clássicos importantes, como o grupo Euclidiano tridimensional e os grupos de Lorentz e Poincaré, que são grupos de Lie associados a propriedades geométricas do espaço e do tempo, partilham da realização canônica por PBs<sup>(58)</sup>. No esquema Hamiltoniano, portanto, as TCs representam as mudanças físicas no estado do sistema, conforme percebido por um observador. O grupo das TCs, sob o qual o próprio PB é invariante (i.e., o valor do PB não depende de um particular sistema de coordenadas canônicas ;

---

(\*) Ver Apêndice A.

ver por exemplo Goldstein<sup>(57)</sup>) pode assim ser considerado como o grupo de simetria "intrínseco", ou mais geral, da mecânica clássica como um todo, independentemente do sistema específico em questão. Apenas estas transformações, repetidas, deixarão invariáveis as equações de Hamilton, por preservarem os PBs fundamentais que são diretamente requeridos pelo princípio de ação.

O grupo canônico é caracterizado pela dimensão  $2N$  do espaço de fase, e para interpretar as TCs como elementos do grupo devemos admitir que cada transformação é inteiramente especificada pela forma funcional das funções  $\phi_n$  que expressam um sistema de coordenadas em relação a outro.

### 3.4 - TCs A UM PARÂMETRO NO FORMALISMO DE PBs

Para esclarecer a importante noção de gerador de uma TC e obter a expressão de uma TC a um parâmetro no formalismo de PBs, consideremos  $2N$  mapeamentos  $\phi_n$ ,  $n = 1, \dots, 2N$ , do espaço de fase sobre si mesmo, isto é, as funções  $\phi_n$  levam pontos  $\omega = (q, p)$  do espaço de fase em pontos  $\omega' = (q', p')$ . Formalmente, podemos escrever

$$\omega'_n = \phi_n(\omega) \quad .$$

Estes mapeamentos podem naturalmente ser encarados como transformações entre sistemas de coordenadas, os  $\phi_n$  sendo justamente as coordenadas do conjunto imagem em termos do sistema inicial. Se desejamos que estas transformações sejam canônicas, a condição eq. (3.4) de serem válidos os PBs fundamentais conduz de

imediatamente a

$$\{\phi_n(\omega), \phi_{n'}(\omega)\}_{PB} = \epsilon_{nn'} \quad (3.4.1)$$

Suponhamos que as coordenadas de um dado conjunto tenham certas faixas de valores, determinadas pela interpretação física destas coordenadas. Se os mapeamentos  $\phi_n$  forem um-a-um e inversíveis, então os pontos  $\phi_n(\omega)$  variarão precisamente nas mesmas faixas de valores que os pontos  $\omega_n$ ; uma TC deste tipo será denominada regular. As TCs regulares formam um subgrupo do grupo canônico.

Podemos aqui especular sobre a relação entre observáveis clássicos e TCs. Para explorar esta idéia, consideremos transformações (regulares) infinitesimais (i.e., próximas à identidade) do tipo

$$\omega'_n = \omega_n + \delta\alpha\phi_n(\omega) \quad (3.4.2)$$

onde  $\delta\alpha$  é um parâmetro infinitesimal e  $\phi_n$  são funções de  $\omega = (q,p)$ . Então a condição (1) para que a transformação seja canônica,

$$\{\omega_n + \delta\alpha\phi_n(\omega), \omega_{n'} + \delta\alpha\phi_{n'}(\omega)\}_{PB} = \epsilon_{nn'} \quad ,$$

conduz em primeira ordem em  $\delta\alpha$  à relação

$$\{\omega_n, \phi_{n'}\}_{PB} = \{\omega_{n'}, \phi_n\}_{PB} \quad ,$$

que em virtude da Identidade de Jacobi eq. (2.9-iv) será satisfeita se introduzirmos uma função arbitrária  $G(\omega)$  tal que



$$\phi_n = \{\omega_n, G(\omega)\}_{PB} \quad , \quad (3.4.3)$$

Assim, substituindo em (2) temos a forma geral de uma TC (regular) infinitesimal dada por

$$\omega'_n = \omega_n + \delta\alpha \{\omega_n, G(\omega)\}_{PB} \quad , \quad (3.4.4)$$

ou, convertendo numa equação diferencial,

$$d\omega_n/d\alpha = \{\omega_n, G(\omega)\}_{PB} \quad , \quad (3.4.5)$$

que é a expressão usual de uma TC a um parâmetro. Em particular, se a transformação  $\omega \rightarrow \omega'$  for regular, podemos obter uma expressão similar para funções no espaço de fase, da qual (5) será um caso especial:

$$df(\omega)/d\alpha = \{f(\omega), G(\omega)\}_{PB} \quad . \quad (3.4.6)$$

A função  $G$  costuma ser chamada de gerador da transformação, na medida em que rege a evolução do sistema, em relação ao parâmetro  $\alpha$ , segundo o esquema dinâmico determinado pela eq. (5): a modificação no sistema se dá como se houvesse um contínuo "desdobramento" de TCs, cobrindo o grupo canônico, ao se percorrer o índice  $\alpha$ ; as órbitas do subgrupo a um parâmetro gerado pelo observável  $G$  são dadas justamente pela eq. (5). Esta conotação se esclarece se tomarmos  $G$  como sendo a Hamiltoniana de um sistema cujo espaço de fase é  $W$ ; neste caso, o parâmetro é identificado com o tempo  $t$  e a eq. (5) não é senão a própria expressão das equações de Hamilton (3.5) que descrevem o desenvolvimento no tempo do sistema.

Para considerar o conceito de simetria sob uma TC, observemos que as eqs. (4) e (5) traduzem uma deformação infinitesimal do espaço de fase do sistema, se admitirmos que todos os possíveis estados iniciais  $\omega$  são levados a estados  $(\omega+d\omega)$  no intervalo elementar  $d\alpha$ . As eqs. (4)–(5), portanto, asseguram que uma tal deformação no espaço de estados do sistema é uma TC infinitesimal, tendo  $G(\omega)$  como gerador<sup>(60)</sup>. Fica claro, assim, que, se uma dada grandeza resulta invariante sob uma TC infinitesimal, ou seja, se é preservada sob uma tal deformação do espaço de fase, então o valor do observável que a representa não será alterado – caso, naturalmente, das constantes de movimento em relação à evolução Hamiltoniana, definidas anteriormente na seção 2.

Observemos por outro lado que, como

$$\{f, H\}_{PB} = 0 \quad (3.4.7)$$

é um resultado simétrico em  $f$  e  $H$ , não apenas  $f$  será uma tal constante de movimento, como também a própria Hamiltoniana será preservada sob o subgrupo a um parâmetro gerado pelo observável  $f$ <sup>(57)</sup>.

Nas eqs. (4)–(7), outrossim, transparece a relação entre simetrias no espaço de fase, invariância sob TCs, associadas a observáveis, e conservação de quantidades na mecânica clássica.

Podemos obter uma solução formal para a eq. (5) realizando uma expansão em potências de  $\alpha$ , correspondente a uma transformação ao longo do intervalo  $[0, \alpha]$ :

$$\begin{aligned} \omega'_n &= \omega_n + \alpha d\omega_n/d\alpha + \alpha^2/2! d^2\omega_n/d\alpha^2 + \dots = \\ &= \omega_n + \alpha \{\omega_n, G(\omega)\}_{PB} + \alpha^2/2! \{\{\omega_n, G(\omega)\}_{PB}, G(\omega)\}_{PB} + \dots \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Em termos do gerador  $G(\omega)$ , vamos definir o operador diferencial parcial linear  $D[G(\omega)]$  pela relação

$$D[G(\omega)] \cdot f(\omega) = i\{f(\omega), G(\omega)\}_{PB} \quad , \quad (3.4.9)$$

onde  $f(\omega)$  é uma função arbitrária do espaço de fase; empregando esta definição podemos reescrever a eq. (8) como

$$\begin{aligned} \omega'_n &= \omega_n - i\alpha D[G(\omega)] \cdot \omega_n + \alpha^2/2! D[G(\omega)] \cdot D[G(\omega)] \cdot \omega_n - \dots = \\ &= \exp \left[ -i\alpha D[G(\omega)] \right] \cdot \omega_n \quad , \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

ou seja, a TC a um parâmetro  $\omega = (q, p) \xrightarrow{G} \omega' = (q', p')$  será dada por <sup>(61)</sup>

$$\begin{cases} q'_n = e^{-i\alpha D[G(q,p)]} \cdot q_n \\ p'_n = e^{-i\alpha D[G(q,p)]} \cdot p_n \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Desenvolveremos no capítulo seguinte uma representação por integrais de caminho para estas TCs a um parâmetro, procurando assim generalizar, para transformações dinâmicas mais amplas, o procedimento de quantização por integrais de caminho estabelecido no capítulo 2.

## CAPÍTULO 4

### QUANTIZAÇÃO POR INTEGRAIS DE CAMINHO: GENERALIZAÇÃO, APLICAÇÕES

Tendo compilado nos capítulos 2 e 3 a fundamentação conceitual e técnica necessária, vamos desenvolver alguns resultados próprios neste capítulo e no seguinte.

#### 4.1 - GENERALIZAÇÃO

Como vimos no cap. 2, a formulação de Feynman da mecânica quântica descreve a evolução no tempo de um sistema físico através da amplitude de probabilidade  $K(q',q,t)$  (um núcleo ou função de Green associada à equação de Schrödinger; ver equação (2.3.4)), escrita inicialmente sob a forma de uma integral funcional no espaço das configurações, eq.(2.3.16), e a seguir no espaço de fase, eq. (2.4.6), mais conveniente para a expressão de transformações dinâmicas. A probabilidade  $P_H(q',t;t)$  de se encontrar o sistema, cuja configurações inicial  $\{q\}$  evolui para uma certa configuração final  $\{q'\}$  após decorrido um tempo  $t$ , é dada por

$$P_H(q',q,t) = |K_H(q',q;t)|^2, \quad (4.1.1)$$

traduzindo, de acordo com os postulados de Feynman (ver seção

2.3), o Princípio da Superposição.

Assim, a quantização de um sistema, cujo desenvolvimento temporal clássico corresponde a uma transformação dinâmica gerada pela Hamiltoniana  $H(q,p)$  e regida pelas equações de Hamilton (3.2.11), é essencialmente alcançada calculando-se a integral de caminho eq. (2.4.6),

$$K_H(q',q;t) = \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S \right], \quad (4.1.2)$$

onde  $D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right]$  indica dupla integração funcional e  $S$  é a ação clássica (ver eq. (2.3.17)),

$$S = \int_0^t [p\dot{q} - H(q,p)] dt.$$

Contudo, considerando que as equações de Hamilton na notação de PBs, eq. (3.2.11), são apenas um representante da ampla classe de TCs a um parâmetro encontradas na mecânica clássica (ver seção 3.3), somos de imediato levados a generalizar para TCs contínuas arbitrárias o procedimento de quantização do esquema dinâmico clássico delineado acima.

Vamos então definir uma amplitude de probabilidade  $K_G(q',q,t)$  para um gerador  $G(q,p)$  responsável por uma TC arbitrária do tipo (ver eq. (3.4.5))

$$\begin{cases} dq_i/d\alpha = \{q_i, G\}_{PB} \\ dp_i/d\alpha = \{p_i, G\}_{PB} \end{cases}, \quad (4.1.3)$$

associada a um dado parâmetro de evolução  $\alpha$ , pela seguinte relação:

$$K_G(q', q; \alpha) = \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^\alpha \left[ p \, dq/d\alpha - G(q, p) \right] d\alpha \right] \quad (4.1.4)$$

Completamos a analogia postulando que a probabilidade de se encontrar o sistema na configuração final  $\{q'\}$ , após a transformação gerada por  $G$  a partir da configuração inicial  $\{q\}$ , será também uma soma de amplitudes do tipo mecânico-quântico:

$$P_G(q', q; \alpha) = |K_G(q', q; \alpha)|^2 \quad . \quad (4.1.5)$$

Deste modo, podemos considerar uma generalização por integrais de caminho do esquema dinâmico Hamiltoniano: a variação da "ação" generalizada (para o gerador  $G$ ) no argumento da exponencial da integral de caminho eq. (4) será responsável pelas equações de movimento do tipo Hamilton eq. (3) que descrevem a TC arbitrária a um parâmetro; além disso, de modo análogo à formulação de Feynman, a amplitude  $K_G(q', q; \alpha)$  será uma função de Green associada a uma equação diferencial tipo Schrödinger (ver eq. (2.3.5)), e assim a probabilidade de transição entre as configurações  $\{q\}$  e  $\{q'\}$  será dada pela superposição eq. (5).

Qualquer transformação canônica a um parâmetro, portanto, e não apenas as geradas por Hamiltonianas, têm agora sua expressão quântica em termos de PIs no espaço de fase.

Para tornar nossa formulação realmente operacional, contudo, precisamos ainda estabelecer um processo apropriado de

extrair a informação fornecida pela amplitude generalizada eq. (4); com este fim em vista, vamos inicialmente comentar alguns resultados da literatura e então introduzir uma definição conveniente de autovalores de observáveis quânticos.

Iremos, a seguir, verificar a plausibilidade de nossa generalização realizando algumas aplicações elementares, em especial em relação à obtenção de autofunções e autovalores consistentes com os produzidos por métodos habituais; mais tarde, discutiremos neste contexto o problema das medições.

#### 4.2 - PÓLOS E AUTOVALORES

Campbell et al. <sup>(62)</sup> aplicaram de modo interessante , ainda que com uma finalidade diferente, uma generalização similar à proposta acima, demonstrando que a amplitude de probabilidade  $K_G(q', q; \alpha)$  é a expressão, em termos de uma integral de caminho idêntica à eq. (1.4), de uma equação de operadores diferenciais, em tudo semelhante à equação de Schrödinger eq. (2.3.6), que representa a evolução quântica de um dado sistema, em relação a um certo parâmetro  $\alpha$ , gerada por um operador  $\hat{G}$ , e à qual a própria  $K_G$  satisfaz:

$$\hat{G}(\hat{q}, \hat{p}; \alpha) K_G(q', q; \alpha) = i\hbar \partial / \partial \alpha K_G(q', q; \alpha) \quad (4.2.1)$$

(com a condição inicial  $K_G(q', q; 0) = \delta(q' - q)$ ). A conversão da equação diferencial à fórmula de integral de caminho é baseada numa identidade integral para operadores que permite exprimi-los por meio de funções ordinárias de  $q$  e  $p$ .

Além disso, demonstram que  $K_G$  satisfaz também a uma equação de autovalores tal como

$$\hat{Q}(\hat{q}, \hat{p}; \alpha) K_G(q', q; \alpha) = q K_G(q', q; \alpha) \quad . \quad (4.2.2)$$

onde o operador  $\hat{Q}$  se relaciona com o gerador  $\hat{G}$  através de uma equação diferencial tipo Heisenberg:

$$d/d\alpha \hat{Q}(\hat{q}, \hat{p}; \alpha) = i/\hbar \left[ \hat{Q}(\hat{q}, \hat{p}; \alpha), \hat{G}(\hat{q}; \hat{p}; \alpha) \right] \quad (4.2.3)$$

(com a condição inicial  $\hat{Q}(\hat{q}, \hat{p}; 0) = \hat{q}$ ;  $[\hat{A}, \hat{B}]$  é o comutador usual).

Se  $\hat{G}$  não é explicitamente dependente do parâmetro  $\alpha$ , então a eq. (3) acima é o análogo quântico de uma TC a um parâmetro eq. (3.4.5), cujo gerador  $G$  tem por sua vez como equivalente quântico (a menos de sinal) o operador de evolução  $\hat{G}$ . Assim, se encontrarmos um gerador clássico  $G(q, p)$  que leve o sistema de um estado inicial  $\{q, p\}$  até um estado final  $\{q', p'\} = \{Q, P\}$ , então a integral de caminho eq. (1.4), que define a amplitude de probabilidade para uma transformação gerada por  $G$ , é uma autofunção, no sentido da eq. (2) acima, do operador quântico  $\hat{Q}$  cujo correspondente clássico é  $Q(q, p)$ . Este resultado é plausível se considerarmos que a integral de caminho dá a função de transformação (ou a amplitude de transição) da base de coordenadas  $\{|q\rangle$  à base  $\{|q'\rangle\}$ , cujos estados  $|q'\rangle$  são autofunções do operador  $\hat{Q}$  com autovalor  $q' = Q$ .

Como assinalam Campbell et al., a importância da equação de autovalores eq. (2) deriva da possibilidade de, a partir de um gerador  $\hat{G}$  apropriado, obter autovalores de operado-



res quânticos  $\hat{Q}$  de interesse físico, por exemplo, Hamiltonianas; através de um problema clássico associado, desenvolvem também uma técnica geral para construir os geradores adequados, e realizam enfim uma série de aplicações elementares de seu método, reproduzindo, por exemplo, através dos pólos que a integral de caminho exhibe no espectro discreto de autovalores, as autofunções do oscilador harmônico.

A relação pólos-autovalores tem contudo para nós um interesse particular. De fato, de acordo com Rajaraman<sup>(38)</sup>, na mecânica quântica os níveis de energia  $E_m$  da Hamiltoniana de uma partícula num potencial  $V(x)$  são dados pelos pólos do propagador  $G(E)$ ,

$$G(E) = \text{Tr} \left[ \frac{1}{H-E} \right] = \sum_m \frac{1}{E_m - E} = i/\hbar \int_0^\infty dt e^{\frac{iEt}{\hbar}} G(t) \quad , \quad (4.2.4)$$

onde o propagador  $G(t)$  é o traço da matriz de transição  $T$ ,

$$G(t) = \text{Tr} \left[ e^{-iHt/\hbar} \right] = \int dx_0 \langle x_0 | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | x_0 \rangle = \text{Tr} [T] \quad , \quad (4.2.5)$$

cujos elementos, as amplitudes de transição  $\langle x_b | e^{-iHt/\hbar} | x_a \rangle$ , podem ser descritos por integrais de caminho de Feynman:

$$T[\underline{b}, \underline{a}] = \langle x_b | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | x_a \rangle = K(x_b, x_a; t) = \int D[\underline{x}(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[\underline{x}(t)]} \quad , \quad (4.2.6)$$

$S[\underline{x}(t)]$  sendo a ação ao longo do caminho  $x(t)$  (ver seção 2.3).

Deste modo, Rajaraman (empregando técnicas de Feynman-Hibbs<sup>(26)</sup>) obtém, por exemplo, os autovalores do oscilador harmônico.

Ora, podemos considerar que o propagador transformado  $G(E)$  corresponde a uma mudança na representação do propagador quântico  $G(t)$  associado à matriz de transição; assim inspirados, vamos na seção seguinte estender esta concepção de autovalores à amplitude de probabilidade generalizada  $K_G(q',q;\alpha)$ , eq.(1.4), levando em conta mudanças similares de representação através de transformadas de Fourier.

#### 4.3 - APLICAÇÕES

Vamos então definir os autovalores de um observável físico  $G$  na formulação de integrais de caminho como sendo os pólos do traço da transformada de Fourier da amplitude generalizada  $K_G(q',q;\alpha)$ , eq. (1.4),

$$F_G(q',q;\omega) = \int d\alpha K_G(q',q;\alpha) e^{\frac{i\alpha\omega}{\hbar}}, \quad (4.3.1)$$

ou seja,

$$\text{autovalores de } G = \text{pólos de } \text{Tr} \left[ F_G(q',q;\omega) \right]. \quad (4.3.2)$$

Esta definição nos permitirá calcular autovalores, em alguns casos, sem empregar métodos de teoria de grupo. Por exemplo, vamos considerar a amplitude generalizada correspondente a uma das componentes do momento angular  $\vec{L}$ , digamos  $L_Z = xp_y - yp_x$ :

$$K_{L_Z}(\vec{r}',\vec{r};\alpha) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} D[\vec{r}] \int D\left[\frac{\vec{p}}{2\pi\hbar}\right] \cdot \exp \left\{ i/\hbar \int_0^\alpha \left[ \vec{p} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\alpha} - L_Z \right] d\alpha \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} D[\vec{r}] \int D\left[\frac{p_x}{2\pi\hbar}\right] D\left[\frac{p_y}{2\pi\hbar}\right] D\left[\frac{p_z}{2\pi\hbar}\right] \cdot \exp \left\{ i/\hbar \int_0^\alpha \left[ p_x \left( \frac{dx}{d\alpha} + y \right) p_y \left( \frac{dy}{d\alpha} - x \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + p_z \frac{dz}{d\alpha} \right] d\alpha \right\} = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} D[\vec{r}] \cdot \Delta \left[ \frac{dz}{d\alpha} + y \right] \Delta \left[ \frac{dy}{d\alpha} - x \right] \Delta \left[ \frac{dz}{d\alpha} \right], \quad (4.3.3)
 \end{aligned}$$

onde introduzimos o funcional  $\Delta[f]$  definido por

$$\Delta[f] \equiv \int D\left[\frac{u}{2\pi}\right] \exp \left\{ i \int_0^\alpha u f d\alpha \right\}. \quad (4.3.4)$$

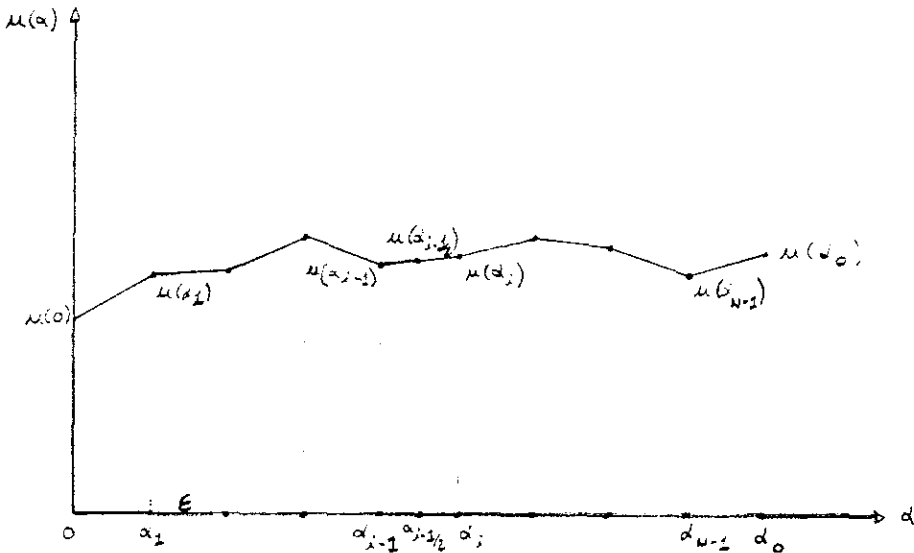


Fig. 4.3.1 - Partição Isométrica.

Empregando uma partição isométrica em  $N$  segmentos do intervalo  $[0, \alpha_0]$  (ver fig. 4.3.1), observamos que o funcional  $\Delta$ , tal como definido acima, pode ser transformado como se segue:

$$\begin{aligned}
 \Delta \left[ \frac{dx}{d\alpha} - f(x, \alpha) \right] &= \int D \left[ \frac{u(\alpha)}{2\pi} \right] e^{i \int_0^{\alpha_0} u(\alpha) \cdot \left[ \frac{dx}{d\alpha} - f(x, \alpha) \right] d\alpha} = \\
 &= \left[ \dots \right] \prod_{i=1}^N \left[ \frac{du}{2\pi} (\alpha_{i-1/2}) \right] e^{i \sum_{i=1}^N u(\alpha_{i-1/2}) \cdot \left[ \frac{dx}{d\alpha} - f(x, \alpha) \right]_{i-1/2} \epsilon} =
 \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^N \delta \left( \left[ \frac{dx}{d\alpha} - f(x, \alpha) \right]_{i-1/2} \epsilon \right) = \prod_{i=1}^N \delta \left\{ (x_i - x_{i-1}) - \epsilon f \left( \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \alpha_{i-1/2} \right) \right\} . \quad (4.3.5)$$

Por outro lado, se usarmos a relação (6.3)

$$\delta(f(x)) = \sum_{\{\bar{x}\}} \frac{\delta(x - \bar{x})}{(\partial f / \partial x) |_{\bar{x}}} , \quad (4.3.6)$$

onde os  $\bar{x}$  são raízes da função  $f$ ,

teremos

$$\delta \left\{ (x_i - x_{i-1}) - \epsilon f \left( \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \alpha_{i-1/2} \right) \right\} = \frac{\delta(x_i - \bar{x}_i)}{\left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_i} \right)} , \quad (4.3.7)$$

onde portanto os  $\bar{x}_i$  satisfazem a equação de diferenças

$$\left\{ \frac{dx}{d\alpha} - f(x, \alpha) \right\} \Big|_{i-1/2} = 0 ,$$

com a condição inicial  $\bar{x}(0) = x(0)$ . No limite  $N \rightarrow \infty$ , a equação acima se torna de fato uma equação diferencial, da qual  $\bar{x} = \bar{x}(\alpha)$  será a solução. Assim, se  $\Phi[x]$  é um funcional arbitrário, vemos que  $\Delta$  apresenta a seguinte propriedade:

$$\int_{x(0)=x_0}^{x(\alpha_0)=x_N} D[x] \left[ \frac{dx}{d\alpha} - f(x, \alpha) \right] \Phi[x] =$$

$$= \int \dots \int \prod_{i=1}^N \left[ dx_i \frac{\delta(x_i - \bar{x}_i)}{\left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_i} \right)} \right] \Phi(x_0, x_1, \dots, x_N) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \dots \int dx_1 \dots dx_{N-1} e^{\frac{1}{2} \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_i} \epsilon} \prod_i [\delta(x_i - \bar{x}_i)] \phi(x_0, x_1, \dots, x_N) = \\
 &= \left[ e^{\frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} \frac{\partial f}{\partial x} d\alpha} \cdot \phi[x] \right] \Big|_{x=\bar{x}(\alpha)} \cdot \delta(x(\alpha_0) - \bar{x}(\alpha_0)) \quad , \quad (4.3.8)
 \end{aligned}$$

onde usamos  $1 - \frac{\epsilon}{2} \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_i} \approx e^{-\frac{\epsilon}{2} \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_i}}$  .

Se agora consideramos mais de uma dimensão, por exemplo um espaço descrito por M coordenadas  $x^u$ ,  $u = 1, \dots, M$ , então é imediato que

$$\begin{aligned}
 &\int_{x(0)}^{x(\alpha_0)} D[x] \prod_{u=1}^M \Delta \left[ \frac{dx^u}{d\alpha} - f^u(x, \alpha) \right] \phi[x] = \\
 &= \left[ e^{\frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} \sum_u \frac{\partial f^u}{\partial x^u} d\alpha} \cdot \phi[x] \right] \Big|_{x=\bar{x}} \cdot \prod_{u=1}^M \left[ \delta(x^u(\alpha_0) - \bar{x}^u(\alpha_0)) \right] \quad , \quad (4.3.9)
 \end{aligned}$$

onde  $x = x(\alpha) = (x^1, \dots, x^u)$ , e  $\bar{x} = \bar{x}(\alpha)$  é a solução de uma equação diferencial acoplada de primeira ordem,

$$\frac{d\bar{x}^u}{d\alpha} = f^u(\bar{x}, \alpha) \quad , \quad u = 1, \dots, M \quad ,$$

com a condição inicial  $\bar{x}(0) = x(0)$ .

Empregando este resultado, podemos transformar a eq. (3):

$$K_{LZ}(\vec{r}', \vec{r}; \alpha) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} D[\vec{r}] \cdot \Delta \left[ \frac{dx}{d\alpha} + y \right] \Delta \left[ \frac{dy}{d\alpha} - x \right] \Delta \left[ \frac{dz}{d\alpha} \right] =$$



se comporta como

$$\frac{1}{\text{Det} \begin{bmatrix} 1-\cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & 1-\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2(1-\cos\alpha)} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)^{-1},$$

e de fato a transformada de Fourier de uma função tal como esta diverge:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \frac{e^{i\omega\alpha}}{1-\cos\alpha} \rightarrow \infty. \quad (4.3.14)$$

Podemos argumentar, contudo, que estamos principalmente interessados no comportamento da transformada de Fourier apenas como função de  $\omega$ , de modo que somente as contribuições dos pólos  $\alpha = 2n\pi$  serão, para nós, relevantes. Deste modo, a menos de um fator constante (infinito!) de proporcionalidade, temos

$$\text{Tr} \left[ F_{L_z}(\vec{r}', \vec{r}; \omega) \right] \propto \sum_{u=-\infty}^{\infty} e^{i2n\pi\omega/\hbar} \quad (4.3.15)$$

que apresenta pólos para  $\omega = 0, \pm\hbar, \pm2\hbar, \dots$ . Concluimos, tal como nos métodos habituais, que os valores observados da componente-Z do momento angular  $L$  estão restritos a múltiplos inteiros de  $\hbar$ . Naturalmente, o mesmo resultado é obtido se são empregadas coordenadas polares <sup>(23)</sup>.

De maneira análoga, podemos calcular os autovalores do operador momento angular  $L^2$ . A integral de caminho para a amplitude generalizada eq. (1.4) neste caso é:

$$K_{L^2}(\vec{r}', \vec{r}; \alpha) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} D[\vec{r}] D\left[\frac{\vec{p}}{2\pi\hbar}\right] \exp\left\{i/\hbar \int_0^\alpha (\vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L^2) d\alpha\right\}, \quad (4.3.16)$$

onde  $\mathbf{L}^2 = (\vec{r} \times \vec{p})^2$ .

No entanto, através de uma partição conveniente, e de uma transformação de coordenadas, podemos efetuar a integração em  $\mathbf{p}$  e transformar a expressão acima numa integral de caminho para uma partícula "livre" mas vinculada a mover-se na superfície de uma esfera:

$$K_{\mathbf{L}^2}(\vec{r}', \vec{r}; \alpha) = \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \int_{\vec{r}' = \vec{r}} D[\vec{r}_{\text{esfera}}] e^{i/\hbar} S_{\text{livre}} \quad (4.3.17)$$

O resultado acima pode ser obtido, de maneira não rigorosa, como se segue: empregando uma partição do intervalo  $[0, \alpha]$  (ver fig. 1), temos que

$$K_{\mathbf{L}^2}(\vec{r}', \vec{r}; \alpha) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} \dots \int \prod_i [d\vec{r}_i] \int \dots \int \prod_i \left[ \frac{d\vec{p}_i}{(2\pi\hbar)^3} \right] \cdot \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \vec{p} \cdot \vec{r} - (\vec{r} \times \vec{p})^2 \right]_i \epsilon \right\} \quad (4.3.18)$$

Ora,

$$\begin{aligned} (\vec{r} \times \vec{p})^2 &= (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = (y^2 + z^2) p_x^2 + (z^2 + x^2) p_y^2 + (x^2 + y^2) p_z^2 - 2xyp_x p_y - \\ &\quad - 2yzp_y p_z - 2xzp_x p_z \quad , \end{aligned}$$

ou, em forma matricial,

$$(\vec{r} \times \vec{p})^2 = \langle \vec{p} | \begin{pmatrix} (y^2 + z^2) & -xy & -zx \\ -zy & (z^2 + x^2) & -yz \\ -zx & -zy & (x^2 + y^2) \end{pmatrix} | \vec{p} \rangle =$$



$$= \langle \vec{p} | A | \vec{p} \rangle , \quad (4.3.19)$$

onde por conveniência introduzimos a notação de bras e kets,

$$| \vec{p} \rangle \equiv \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} , \quad \langle \vec{p} | = (p_x p_y p_z) .$$

Observemos que

$$A = \vec{r}^2 \cdot I - | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | = r^2 \left[ I - \frac{| \vec{r} \rangle \langle \vec{r} |}{r^2} \right] ,$$

$| \vec{r} \rangle \langle \vec{r} |$  sendo o produto diádico entre ket e o bra.

$$\text{Com } \tilde{A} \equiv 1/r^2 A = \left[ I - | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | / r^2 \right] , \text{ temos que}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}^2 &= \left[ I - \frac{| \vec{r} \rangle \langle \vec{r} |}{r^2} \right]^2 = I + I/r^4 \cdot | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \cdot | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | - 2/r^2 | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | = \\ &= I - 1/r^2 | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | = \tilde{A} . \end{aligned}$$

Concluimos então que  $\tilde{A}$  apresenta as propriedades de um projetor, e os autovalores de  $\tilde{A}$  são 0 ou 1. Quanto aos autovetores, vemos que  $| \vec{r} \rangle$  é autovetor, porque

$$\tilde{A} | \vec{r} \rangle = | \vec{r} \rangle - 1/r^2 | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \cdot | \vec{r} \rangle = 0 .$$

Sejam, então, vetores  $| \vec{\xi} \rangle$  e  $| \vec{\eta} \rangle$  tais que

$$\langle \vec{\xi} | \vec{r} \rangle = 0, \langle \vec{\eta} | \vec{r} \rangle = 0 , \langle \vec{\xi} | \vec{\eta} \rangle = 0 ,$$

ou por outra, o sistema  $(r, \xi, \eta)$  é ortogonal.

Assim,  $|\vec{\xi}\rangle$  e  $|\vec{\eta}\rangle$  serão também autovetores, porque

$$\bar{A}|\vec{\xi}\rangle = |\vec{\xi}\rangle \quad \text{e} \quad \bar{A}|\vec{\eta}\rangle = |\vec{\eta}\rangle .$$

Por outro lado, temos o operador momentum expresso ,  
nesta representação, por

$$|\vec{p}\rangle = |\hat{r}\rangle(\vec{r}\cdot\vec{p}) + |\vec{\xi}\rangle(\vec{\xi}\cdot\vec{p}) + |\hat{\eta}\rangle(\vec{\eta}\cdot\vec{p}) \quad ,$$

onde o circunflexo indica módulo unitário.

Como  $A = r^2\bar{A}$ , substituindo na eq. (19) e usando a ortogonalidade vem

$$\begin{aligned} \langle\vec{p}|A|\vec{p}\rangle &= r^2\langle\vec{p}|\bar{A}|\vec{p}\rangle = r^2\left[\langle\hat{\xi}|\hat{\xi}\rangle(\vec{\xi}\cdot\vec{p})^2 + \langle\hat{\eta}|\hat{\eta}\rangle(\vec{\eta}\cdot\vec{p})^2\right] = \\ &= r^2\left[(\vec{\xi}\cdot\vec{p})^2 + (\vec{\eta}\cdot\vec{p})^2\right] = r^2\left[p_\xi^2 + p_\eta^2\right] \quad . \end{aligned}$$

Do mesmo modo, se agora chamamos de  $\vec{q}$  o vetor-posição envolvido no argumento da exponencial na eq. (18), temos

$$\dot{\vec{q}}\cdot\vec{p} = \langle\dot{\vec{q}}|\hat{r}\rangle\langle\hat{r}|\vec{p}\rangle + \langle\dot{\vec{q}}|\hat{\xi}\rangle\langle\hat{\xi}|\vec{p}\rangle + \langle\dot{\vec{q}}|\hat{\eta}\rangle\langle\hat{\eta}|\vec{p}\rangle = \dot{q}_r p_r + \dot{q}_\xi p_\xi + \dot{q}_\eta p_\eta \quad .$$

Assim, temos afinal para a amplitude eq. (18):

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{L}2}(\vec{r}', \vec{r}; \alpha) &= \left[ \dots \int \prod_i \left[ d\vec{q}_i \right] \dots \int \prod_i \left[ \frac{d\vec{p}_i}{(2\pi\hbar)^3} \right] \right] \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left[ \left\{ \left[ \dot{q}_r p_r + \dot{q}_\xi p_\xi + \dot{q}_\eta p_\eta \right]_i - r^2 \left[ p_\xi^2 + p_\eta^2 \right]_i \right\} \epsilon \right] \quad . \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Procuramos as componentes dos momenta nas coordenadas

$(r, \xi, \eta)$ . A transformação

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} p_r \\ p_\xi \\ p_\eta \end{pmatrix}$$

é ortogonal; deste modo, seu Jacobiano é a unidade.

Assim,

$$\begin{aligned} K_{L^2}(\vec{r}', \vec{r}; \alpha) = & \left[ \dots \int \prod_i \left[ dq_r^i dq_\xi^i dq_\eta^i \right] \right] \dots \int \prod_i \left[ \frac{dp_r^i dp_\xi^i dp_\eta^i}{(2\pi\hbar)^3} \right] \\ & \cdot \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (p_r \dot{q}_r)_i \varepsilon \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (p_\xi (q_\xi - r^2 p_\xi) + \right. \right. \\ & \left. \left. + p_\eta (\dot{q}_\eta - r^2 p_\eta))_i \varepsilon \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

expressão que envolve uma sucessão de deltas e exponenciais gaussianas, de modo que, ao integrarmos (ver eq. (2.4.8)) encontramos no limite, a menos de constantes, o resultado eq. (17):

$$K_{L^2}(\vec{r}', \vec{r}; \alpha) = \delta(r' - r) \int_{r'=r} D[\vec{r}_{\text{esfera}}] e^{i/\hbar} \int \frac{\dot{r}^2}{r^2} d\alpha. \quad (4.3.22)$$

A integração de caminhos necessária para a dinâmica numa esfera de dimensão arbitrária foi realizada por Marinov e Terentyev<sup>(64)</sup>.

De fato, Marinov e Terentyev demonstram que se pode considerar o movimento numa esfera de dimensão  $n$  como equivalente ao movimento no espaço euclidiano de dimensão  $(n+1)$  sujeito ao vínculo  $\vec{x}^2 = 1$ , onde  $\vec{x}$  é o vetor  $(n+1)$ -dimensional. Vemos em

então que a transformada de Fourier da expressão para  $K_{\mathbf{L}2}(\vec{r}', \vec{r}, \alpha)$  terá pólos (dado que em nosso caso  $(n+1) = 3$ ) em

$$\omega = \hbar^2 \ell(\ell+n-1) \Big|_{n=2} = \hbar^2 \ell(\ell+1), \quad \ell \text{ inteiro positivo,} \quad (4.3.23)$$

novamente reproduzindo o resultado usual.

O método estabelecido acima também pode ser estendido à teoria de campos. Consideremos, por simplicidade, um campo escalar complexo  $\psi$ . As variáveis dinâmicas básicas são, naturalmente, a variável de campo  $\psi(x)$  e seu momentum canônico conjugado  $\pi(x)$ , que admitimos suficientes para a descrição da dinâmica do sistema. Em termos destas variáveis fundamentais, a carga  $Q$  do sistema pode ser definida por <sup>(65)</sup>

$$Q = \frac{ie}{2} \int d^3x \left[ \pi^* \psi^* - \pi \psi \right], \quad (4.3.24)$$

onde  $e$  é a unidade de carga. A amplitude generalizada correspondente à carga  $Q$  como geradora será então dada pela integral de caminho

$$K_Q[\psi', \psi; \alpha] = \int_{\psi}^{\psi'} \left[ D[\psi] D[\psi^*] \right] \left[ D\left[\frac{\pi}{2\pi\hbar}\right] D\left[\frac{\pi^*}{2\pi\hbar}\right] \right] \cdot \left\{ \exp i/\hbar \int_0^\alpha d\alpha \int d^3x \left[ \pi \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \pi^* \frac{\partial \pi^*}{\partial \alpha} - \frac{ie}{2} [\pi^* \psi^* - \pi \psi] \right] \right\}. \quad (4.3.25)$$

Observemos que na eq. (25), quando as variáveis dinâmicas assumem valores complexos, devemos empregar suas partes real e imaginária como as variáveis de integração de caminhos; a saber,

$$= 1/\sqrt{2}(\psi_1+i\psi_2) , \pi = 1/\sqrt{2} (\pi_1+i\pi_2) , \psi_i, \pi_i: \text{ reais} \quad (4.3.26)$$

Empregando a definição eq. (4) de "delta" funcional e também a propriedade eq. (9), podemos transformar a eq. (25) de modo similar ao caso  $L_Z$ :

$$\begin{aligned} K_Q[\psi', \psi; \alpha] &= \int_{\psi}^{\psi'} D[\psi] D[\psi^*] \left\{ \int_0^{\alpha} d\alpha \int d^3x \left[ \pi \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{ie}{2} \psi \right] + \pi^* \left[ \frac{\partial \psi^*}{\partial \alpha} - \frac{ie}{2} \psi^* \right] \right] \right\} \exp \frac{i}{\hbar} \\ &= \int_{\psi}^{\psi'} D[\psi] D[\psi^*] \cdot \Delta \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{ie}{2} \psi \right] \Delta \left[ \frac{\partial \psi^*}{\partial \alpha} - \frac{ie}{2} \psi^* \right] = \\ &= \left[ e^{1/2 \int_0^{\alpha} \left( \frac{ie}{2} - \frac{ie}{2} \right) d\alpha} \cdot 1 \right] [\bar{\psi}, \bar{\psi}^*] \delta([\psi(\alpha) - \bar{\psi}(\alpha)]) \cdot \\ &\quad \cdot \delta([\bar{\psi}^*(\alpha) - \bar{\psi}^*(\alpha)]) = \\ &= \delta([\bar{\psi}' - e^{ie\alpha} \psi]) , \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

visto que a solução  $\bar{\psi}$  da equação

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \alpha} + \frac{ie}{2} \bar{\psi} = 0$$

com condição inicial  $\bar{\psi}(0) = \psi$ , é dada por

$$\bar{\psi}(\alpha) = e^{ie\alpha/2} \psi ,$$

e analogamente para sua conjugada. Observemos que a eq. (27) é justamente o gerador de uma transformação de calibre (ou de gauge) do campo,

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ie\alpha} \psi. \quad (4.3.28)$$

Os autovalores da carga  $Q$  podem ser calculados de modo análogo ao caso  $L_z$ , a partir dos pólos de

$$\text{Tr} \left[ F_G(\psi', \psi; \alpha) \right] = \text{Tr} \left[ \int e^{i\omega\alpha} \delta(\psi' - e^{ie\alpha}\psi) d\alpha \right] \propto \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2n\pi\omega/e},$$

de modo que obtemos

$$Q/e = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.3.29)$$

como seria de esperar. Observemos, ainda, que a relação entre as eqs. (25), (27) e (29) sugere que o valor quantizado da carga  $Q$  pode estar intimamente relacionado à própria natureza da transformação de calibre.

#### 4.4 - MEDIÇÕES

A importante questão das medições quânticas pode ser também abordada por nosso tratamento. Coloquemos do seguinte modo o problema: seja  $G$  um observável físico e  $\{q\}$  a configuração inicial de um dado sistema. Suponhamos que, numa medição, obtemos para  $G$  o valor  $g_0$ ; seguindo o espírito da seção 2, postulamos então que a amplitude de probabilidade de se encontrar o sistema, depois da medição, na configuração  $\{q'\}$ , será dada por

$$A_{g_0}(q', q) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{g_0} d\omega F_G(q', q; \omega) = 1/2\pi i \oint_{g_0} d\alpha \int d\omega e^{\frac{i\omega\alpha}{\hbar}} K_G(q', q; \omega), \quad (4.4.1)$$

onde a integração complexa em  $\omega$  é efetuada em torno do valor observado  $g_0$ .

A idéia subjacente a esta formulação é a de que se a configuração  $\{q'\}$  não corresponder a um autoestado de  $G$ , ou seja, se  $F_G$  não apresentar singularidade na região de integração complexa em torno de  $g_0$  (recordemos a associação polos-autovalores feita anteriormente na seção 3) então (pelo Teorema de Cauchy) a amplitude  $A_{g_0}(q',q)$  definida acima será nula - o que é justamente o que se espera numa medição quântica.

É conveniente aqui expressarmos a integral complexa eq. (1) em termos de integrais em variáveis reais através da relação

$$\oint_{g_0} d\omega f(\omega) = 2\pi i \int_{\Omega} d(\text{Re}\omega) d(\text{Im}\omega) \partial f(\omega) \quad (4.4.2)$$

sendo  $\Omega$  um domínio (arbitrário!) que contém  $g_0$  e onde a partir do teorema de Stokes introduzimos a derivada de Cauchy  $\partial f$ , definida por

$$\partial f(\omega) = 1/2\pi \left( \frac{\partial f_1}{\partial \omega_1} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega_2} \right) + \frac{i}{2\pi} \left( \frac{\partial f_2}{\partial \omega_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \omega_2} \right) \quad , \quad (4.4.3)$$

onde  $f = (f_1 + if_2)$  e  $\omega = (\omega_1 + i\omega_2)$ . A razão desta definição é dada pelas propriedades de  $\partial f$ : se  $f(\omega)$  for analítica em  $\omega$ ,  $\partial f(\omega) = 0$ ; nos pólos de  $f(\omega)$ ,  $f$  se comportará como uma função delta. De fato,

$$\partial f(\omega) = \sum_{\text{pólos } \tilde{\omega}} \delta(\omega_1 - \tilde{\omega}_1) \delta(\omega_2 - \tilde{\omega}_2) \text{Res } f(\tilde{\omega}), \quad (4.4.4)$$

e portanto

$$\oint_{g_0} d\omega f(\omega) = \begin{cases} 0, & f(\omega) \text{ analítica no domínio} \\ \text{ou} \\ 2\pi i \sum_{\{\tilde{\omega}\}} \text{Res } f(\tilde{\omega}), & \{\tilde{\omega}\} \text{ o conjunto de pólos da } f \text{ no} \\ & \text{domínio,} \end{cases}$$

reproduzindo assim a própria definição de resíduo de uma função complexa <sup>(63)</sup>.

Deste modo, podemos reescrever a definição eq.(1) como se segue:

$$A_{g_0}(q', q) = \int_{\Omega} \int d\omega_1 d\omega_2 \partial \left( \int d\alpha e^{\frac{i\omega\alpha}{\hbar}} K_G(q', q; \alpha) \right) . \quad (4.4.5)$$

Consideremos agora duas medições imediatamente consecutivas de um mesmo observável G; a amplitude final para um tal processo será dada pela superposição das amplitudes respectivas de cada medição, a primeira, digamos, em torno do valor  $g_0$ , e a segunda em torno do valor  $g_1$ :

$$\begin{aligned} A_{g_0 \rightarrow g_1}(q', q) &= \int dq'' A_{g_1}(q', q'') A_{g_0}(q'', q) = \\ &= \int_{\Omega \ni g_1} \int d\omega'_1 d\omega'_2 \partial' \cdot \int_{\Omega \ni g_0} \int d\omega_1 d\omega_2 \partial \cdot \int d\alpha' e^{\frac{i\alpha'\omega'}{\hbar}} \int d\alpha e^{\frac{i\alpha\omega}{\hbar}} \cdot \\ &\quad \cdot \int dq'' K_G(q', q''; \alpha') K_G(q'', q; \alpha) = \\ &= \int_{\Omega' \ni g_1} \int d\omega'_1 d\omega'_2 \partial' \cdot \int_{\Omega \ni g_0} \int d\omega_1 d\omega_2 \partial \cdot \int d\alpha' e^{\frac{i\alpha'\omega'}{\hbar}} \int d\alpha e^{\frac{i\alpha\omega}{\hbar}} \cdot \\ &\quad \cdot K_G(q', q; \alpha + \alpha') = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega' \ni g_1} \int d\omega'_1 d\omega'_2 \partial' \cdot \int_{\Omega \ni g_0} \int d\omega_1 d\omega_2 \partial \cdot \int d\alpha' e^{\frac{i\omega'\alpha'}{\hbar}} \left( e^{-\frac{i\omega\alpha'}{\hbar}} F_G(q', q; \omega) \right) = \\
 &= \int_{\Omega' \ni g_1} \int d\omega'_1 d\omega'_2 \partial' \cdot \int d\alpha' e^{\frac{i\omega'\alpha'}{\hbar}} \left\{ \int_{\Omega \ni g_0} \int d\omega_1 d\omega_2 \partial \cdot \left( e^{-\frac{i\omega\alpha'}{\hbar}} F_G(q', q; \omega) \right) \right\} = \\
 &= \int_{\Omega \ni g_1} \int d\omega'_1 d\omega'_2 \partial \cdot \int d\alpha' e^{\frac{i(\omega' - g_0)\alpha'}{\hbar}} A_{g_0}(q', q) \quad , \quad (4.4.6)
 \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade Markoviana das integrais de caminho  $K_G$  <sup>(9, 49)</sup>

$$\int dq'' K_G(q', q''; \alpha') K_G(q'', q; \alpha) = K_G(q', q; \alpha + \alpha') \quad , \quad (4.4.7)$$

o fato de que  $\alpha$  e  $\alpha'$  são independentes e que portanto

$$\begin{aligned}
 \int d\alpha e^{\frac{i\omega\alpha}{\hbar}} K_G(q', q; \alpha + \alpha') &= e^{-\frac{i\omega\alpha'}{\hbar}} \int d\alpha e^{\frac{i\omega\alpha}{\hbar}} K_G(q', q; \alpha) = \\
 &= e^{\frac{i\omega\alpha'}{\hbar}} F_G(q, q'; \omega) \quad ,
 \end{aligned}$$

e também a igualdade

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega \ni g_0} \int d\omega_1 d\omega_2 \partial \cdot \left( e^{-\frac{i\omega\alpha'}{\hbar}} F_G(q', q; \omega) \right) &= \int_{\Omega \ni g_0} \int d\omega_1 d\omega_2 e^{-\frac{i\omega\alpha'}{\hbar}} \partial \cdot \\
 &\cdot \left( F_G(q', q; \omega) \right) =
 \end{aligned}$$

$$= e^{-\frac{ig_0\alpha'}{\hbar}} A_{g_0}(q', q) \quad , \quad (4.4.8)$$

dado que  $\exp\left[\frac{-i\omega\alpha'}{\hbar}\right]$ , é analítica em todo o plano complexo. Mas, sem dificuldade, podemos demonstrar que

$$\int_{\Omega' \ni g_0} \int d\omega'_1 d\omega'_2 \partial' \cdot \int e^{\frac{i(\omega' - g_0)\alpha'}{\hbar}} d\alpha' = \begin{cases} 1, & \text{se } g_0 \text{ pertence ao domínio } \Omega' \\ 0, & \text{se } g_0 \text{ não se encontrar em } \Omega' \end{cases} \quad (4.4.9)$$

visto que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega' \ni g'} \int d\omega'_1 d\omega'_2 \partial' \cdot \int e^{\frac{i(\omega' - g_0)\alpha'}{\hbar}} d\alpha' = \\ & = \int_{\Omega' \ni g'} \int d\omega'_1 d\omega'_2 \delta(\omega - \tilde{\omega}_1) \operatorname{Res}_{\tilde{\omega} = g_0} \left( \frac{e^{\frac{i(\omega' - g_0)\alpha'}{\hbar}}}{(\omega' - g_0)} \right) = \\ & = \begin{cases} 1, & \text{se } g_0 \text{ está no domínio } \Omega' \text{ e portanto é pólo da função.} \\ 0, & \text{se } g_0 \text{ não está no domínio e destarte a função é analítica em } \Omega'. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Portanto,

$$A_{g_0 \rightarrow g_1}(q', q) = \begin{cases} A_{g_0}(q', q) & , \text{ se } g_0 \in \Omega' \\ 0 & , \text{ se } g_0 \notin \Omega' \end{cases} \quad , \quad (4.4.11)$$

o que implica que o mesmo resultado é fornecido por duas medições instantaneamente sucessivas do mesmo observável físico (observemos que a eq. (11) é equivalente a uma  $\delta(g_0 - g_1)$ , pois como o domínio  $\Omega'$  é arbitrário,  $g_0$  deve coincidir com  $g_1$ !), o que

se encontra de acordo com os preceitos usuais da mecânica quântica: se realizamos a medição de um observável de um sistema, então imediatamente após o sistema deverá se encontrar num autoestado da grandeza observada, correspondente ao autovalor medido, e assim uma outra medição instantaneamente consecutiva reproduzirá este resultado. Decorrido um tempo finito entre as medições, contudo, o sistema terá evoluído para uma nova configuração e logo o autovalor que resulta da medição, do mesmo modo, terá mudado, a menos que o observável em questão seja uma quantidade conservada ou constante de movimento (ver seção 3.2).

O passo seguinte em nosso estudo do mecanismo de medição através da formulação de integrais de caminho deverá ser, portanto, o de discutir o papel de quantidades conservadas e simetrias sob transformações dinâmicas neste formalismo; para isso, investigaremos no próximo capítulo, sob este aspecto, as propriedades de grupo apresentadas por transformações sucessivas em nossa formulação.

## CAPÍTULO 5

### PRDPRIEDADES DE GRUPO NO FORMALISMO DE INTEGRAIS DE CAMINHO

#### 5.1 - SEMELHANÇA ESTRUTURAL ENTRE A MECÂNICA CLÁSSICA E A MECÂNICA QUÂNTICA

Como observado por Dirac<sup>(66)</sup>, a mecânica clássica e a mecânica quântica, enquanto teorias, possuem uma certa semelhança estrutural, manifesta já à primeira vista na analogia entre PBs e comutadores e entre as equações de movimento de Hamilton e de Heisenberg, e que se torna mais transparente ao se considerar o importante problema da quantização de sistemas mecânicos clássicos. Este arcabouço dinâmico comum, esta estrutura dinâmica essencial compartilhada por ambas as teorias é a de uma álgebra de Lie de funções das variáveis dinâmicas básicas (observáveis), que proporciona os geradores infinitesimais do grupo de Lie de transformações dinâmicas associado (ver seção 3.2). O elemento de derivação desta álgebra de Lie, o colchete de Lie (LB), é num caso o PB e noutro o comutador (CB), de acordo com a representação particular (funções reais ou operadores) empregada usualmente em cada teoria e que serve para a formulação de sua cinemática; esta escolha, contudo, não é relevante para a estrutura dinâmica em si. Examinemos alguns aspectos desta conexão.

Na mecânica clássica, como visto no Cap. 3 (ver a se-

ção 3.2), os observáveis da teoria são funções reais no espaço de fase, e o grupo de simetria fundamental, intrínseco, é o grupo canônico, sendo o próprio esquema dinâmico Hamiltoniano invariante sob as TCs a um parâmetro, membros deste grupo. Embora, em princípio, nada tenha a ver com ela, a mecânica quântica, em sua generalidade, apresenta uma estrutura formal paralela a esta. Na linguagem de sistemas dinâmicos, costumeira em teoria de grupos, podemos definir um sistema mecânico-quântico genérico por meio de dois objetos: uma álgebra de Lie  $L$  de "observáveis" e uma representação linear desta por uma álgebra de Lie de operadores Hermitianos sobre um espaço de Hilbert  $V$ , cada um destes operadores sendo o gerador de um grupo de transformações unitárias em  $V$ . Os vetores (normalizados) deste espaço constituem os "estados" do sistema, e o conteúdo físico da mecânica quântica, ou seja, a informação física sobre os sistemas quânticos, habitualmente abrange o conjunto dos autovalores e valores esperados dos observáveis relevantes, em cada um dos estados, e a probabilidade relativa de transição entre qualquer par de estados (na mecânica clássica, como se recorda, um estado é um ponto no espaço de fase e o valor de um observável num ponto fixado  $(q,p)$  deste espaço desempenha o mesmo papel que um valor esperado<sup>(\*)</sup>). O LB é realizado pelo CB entre dois quaisquer destes operadores (ver Apêndice A).

Assim, embora a priori a mecânica quântica seja inde-

---

(\*)O valor esperado de um certo observável  $\hat{Q}$  num certo estado  $|q\rangle$  é dado pelo produto interno  $\langle q|\hat{Q}|q\rangle$ . Um estado quântico arbitrário pode, geralmente, ser expandido em termos de uma base ou conjunto completo de autoestados de um dado observável, e a probabilidade de transição entre dois estados quaisquer é dada pelo produto  $\langle q'|q\rangle$  (53).

pendente da mecânica clássica, o envolvimento entre ambas é bem aparente: dado um sistema mecânico-clássico cujo espaço de fase é conhecido, e cujos observáveis (funções reais neste espaço) formam um conjunto fechado sob o PB, para obter o sistema mecânico-quântico equivalente (isto é, para quantizar o sistema clássico) bastaria definirmos os observáveis quânticos por meio das mesmas LAs (usando todavia o comutador como LB) e então procurarmos uma representação unitária desta álgebra para definir os estados. Este procedimento, na verdade, equivale a estabelecer uma correspondência funções-operadores ou, como dizemos, uma regra de quantização<sup>(67)</sup>.

O papel vital de simetria fundamental exercido pelas TCs na mecânica clássica é aqui desempenhado pelas transformações unitárias (TUs) no espaço de Hilbert  $V$ . A unitariedade das transformações entre estados é postulada, em todas as teorias quânticas existentes, para expressar a invariância do produto interno entre os vetores (estados) de  $V$ , requerida por considerações muito básicas de simetria<sup>(53)</sup>. O conjunto de todas as TUs em  $V$  forma um grupo,  $U(V)$ , cuja álgebra de Lie pode ser definida, tal como no caso clássico (ver seção 3.3), justamente como o conjunto dos subgrupos a um parâmetro, sendo o LB entre dois destes subgrupos definido pelo comutador (CB) entre seus geradores.

É esta a álgebra cujos elementos representaremos por operadores Hermitianos; sendo o grupo contínuo, e valendo o princípio de Causalidade, em virtude do teorema de Stone tal procedimento conduz a equações de movimento do tipo mecânico-quântico, de maneira inteiramente análoga ao caso clássico (ver seção 3.4); com efeito, se supomos que TUs lineares a um parâmetro -

tro formam uma representação contínua do grupo de translações temporais, então aplicando a fórmula de Stone obtemos diretamente a equação de Schrödinger <sup>(59,68)</sup>.

Podemos concluir, em resumo, que as dinâmicas clássica e quântica têm ambas a estrutura de um grupo de Lie de transformações associado a uma álgebra de Lie de funções das variáveis básicas; é a representação escolhida para a LA, portanto, que distingue essencialmente as duas mecânicas. Isto torna possível, mesmo, esboçar formalmente uma teoria dinâmica generalizada considerando-se uma classe de LAs que inclua as de ambas as mecânicas como casos particulares <sup>(69)</sup>.

Na mecânica clássica, como vimos, a representação de um grupo de Lie por TCs corresponde à realização por PBs do LB da álgebra de Lie associada. Uma representação relevante para a mecânica quântica usual é por meio de operadores diferenciais lineares, com o comutador destes operadores sendo o LB; uma outra representação, ainda importante para a mecânica quântica, é quando se tem matrizes finitas/infinitas correspondendo a operadores lineares num espaço vetorial linear, com o comutador também como LB <sup>(58)</sup>. Observemos que, por força desta diferença no caráter das representações, no caso quântico as relações da teoria incidem sobre as quantidades físicas em si, ou melhor, sobre os operadores que as representam, enquanto que as relações clássicas condicionam os valores assumidos, em todos os casos específicos, pelos observáveis da teoria <sup>(60)</sup>. É possível, contudo, transcrever uma mecânica na representação natural da outra, já que se tem uma formulação por funções no espaço de fase e uma formulação por operadores num espaço de Hilbert para ambos os casos <sup>(69)</sup>.

Todas estas considerações formais se prendem à seguinte observação: sendo o formalismo de integrais de caminho, ele próprio, um procedimento de quantização, quer dizer, uma conexão entre a mecânica clássica e a mecânica quântica, então é natural esperar que ele revele de algum modo a interrelação conceitual exposta acima. De fato, veremos no que se segue neste capítulo como o formalismo de PIs pode ser empregado para estabelecer uma correspondência entre o comutador quântico e o PB clássico, refletindo assim a equivalência de ambas as mecânicas enquanto álgebras de Lie associadas a grupos de transformações. Demonstraremos a seguir que o formalismo de integrais de caminho é capaz de fornecer uma representação para um grupo de transformações, que vimos ser um conceito de ampla importância dinâmica; efetivamente, se um conjunto de geradores clássicos cuja LA é dada está associado a um grupo de transformações dinâmicas clássicas, então as amplitudes generalizadas definidas na seção 4.1 para estes geradores formam, elas mesmas, uma representação deste grupo. Empregaremos, enfim, o resultado acima para demonstrar que se um observável é conservado classicamente, então a lei de combinação do grupo expressa no formalismo de integrais de caminho vai assegurar que o observável quântico correspondente será também conservado numa medição, esclarecendo assim a relação entre simetrias dinâmicas e conservação de quantidades no esquema de medição sugerido na seção 4.4.

## 5.2 - CONEXÃO ENTRE O COLCHETE DE POISSON CLÁSSICO E O COMUTADOR QUÂNTICO

Começemos procurando obter uma expressão para inte-



grais de caminho associadas a transformações infinitesimais, que será de utilidade quando mais tarde investigarmos transformações sucessivas e propriedades de grupo. Para tanto, consideremos um dado gerador  $G(q,p)$  e sua amplitude generalizada associada eq. (4.1.4), quando o parâmetro de evolução  $\alpha$  varia no intervalo  $[0, \alpha]$  :

$$K_G(q', q; \alpha) = \int_q^{q'} D[q] \int D[p/2\pi\hbar] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^\alpha [p\dot{q} - G(q,p)] d\alpha} \quad (5.2.1)$$

Por meio da mudança de variável

$$\beta \rightarrow \beta' = \beta/\alpha, \quad (5.2.2)$$

vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha [p dq/d\beta - G(q,p)] d\beta &= \int_0^1 [p dq/\alpha d\beta' - G(q,p)] \alpha d\beta' = \\ &= \int_0^1 [p dq/d\beta' - \alpha G(q,p)] d\beta' \quad , \quad (5.2.3) \end{aligned}$$

logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} K_G(q', q; \alpha) &= \int_q^{q'} D[q] \int D[p/2\pi\hbar] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 [p\dot{q} - \alpha G(q,p)] d\alpha} = \\ &= K_{\alpha G}(q', q; 1) \quad (5.2.4) \end{aligned}$$

Vamos agora definir integrais de caminho para amplitu

des generalizadas "infinitesimais" fazendo o parâmetro de evolução  $\alpha$  tender a um valor infinitesimal positivo  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow \epsilon} K_G(q', q; \alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow \epsilon} K_{\alpha G}(q', q, 1) = \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow \epsilon} \left\{ \int_q^{q'} D[q] \int D[p/2\pi\hbar] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\beta} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^1 \alpha G(q, p) d\beta} \right\} = \\
 &= \int_q^{q'} D[q] \int D[p/2\pi\hbar] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\beta} \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon \int_0^1 G(q, p) d\beta \right\} = \\
 &= \delta(q' - q) - \frac{i}{\hbar} \epsilon M_G(q', q) \quad , \quad (5.2.5)
 \end{aligned}$$

onde usamos

$$e^{i\epsilon x} \approx 1 - i\epsilon x \quad , \quad \epsilon \text{ infinitesimal,}$$

e também

$$\begin{aligned}
 \int_q^{q'} D[q] \int D[p/2\pi\hbar] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\beta} &= \int_{q_0=q}^{q_M=q'} \prod_{i=1}^M [dq_i] \cdot \\
 \int \dots \int_{i=1}^M [dp_i/2\pi\hbar] \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^M p_i (q_i - q_{i-1})} &= \\
 = \int_{q_0=q}^{q_M=q'} \prod_{i=1}^M [dq_i] \cdot \prod_{i=1}^M \delta(q_i - q_{i-1}) &= \delta(q' - q) \quad ,
 \end{aligned}$$

e onde por definição

$$M_G(q', q) \equiv \int_q^{q'} D[q] \int D[p/2\pi\hbar] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\beta} \cdot \int_0^1 G(q, p) d\beta \quad (5.2.6)$$

Por outro lado, conforme assinalado anteriormente (ver equação (2.3.4)), a quantidade  $K_G(q', q; \alpha)$  tem o caráter de uma função de Green, ou seja, uma função de transformação entre estados. Assim, se encararmos  $K_G(q', q; \alpha)$  como sendo um elemento de matriz que representa a transição de um sistema entre dois estados quânticos  $|q\rangle$  e  $|q'\rangle$ , gerada por um certo operador quântico  $\tilde{G} = e^{i/\hbar \alpha \hat{G}}$ , ou seja,

$$K_G(q', q; \alpha) = \langle q' | e^{i/\hbar \alpha \hat{G}} | q \rangle \quad (5.2.7)$$

então podemos considerar que, quando o parâmetro  $\alpha$  tende ao valor infinitesimal  $\epsilon$ , temos

$$\begin{aligned} K_G(q', q; \epsilon) &= \langle q' | e^{i/\hbar \epsilon \hat{G}} | q \rangle \approx \langle q' | (1 - i/\hbar \epsilon \hat{G}) | q \rangle = \\ &= \delta(q' - q) - i/\hbar \epsilon \langle q' | \hat{G} | q \rangle \quad (5.2.8) \end{aligned}$$

Outrossim, numa transformação infinitesimal, em virtude da similaridade entre as relações eqs. (5) e (8) somos levados a identificar a quantidade  $M_G(q', q)$ , expressa pela integral de caminho eq. (6), com o elemento de matriz  $\langle q' | \hat{G} | q \rangle$ , do operador quântico  $\hat{G}$  correspondente ao gerador  $G(q, p)$ , que aparece na eq. (8):

$$M_G(q', q) \equiv \langle q' | \hat{G} | q \rangle \quad (5.2.9)$$

Naturalmente, uma tal associação direta entre o gerador clássico  $G(q,p)$  e seu operador mecânico-quântico correspondente  $\hat{G}(\hat{q},\hat{p})$  constitui, sem dúvida, uma regra de quantização <sup>(69,70)</sup>, ou seja, um procedimento para correlacionar funções clássicas e operadores quânticos. De fato, de acordo com a definição eq. (6), a associação eq. (9) é equivalente à regra de quantização de Weyl <sup>(60,71)</sup>, como veremos abaixo.

Inicialmente, empregando uma partição isométrica do intervalo  $[0,1]$  e a regra do ponto médio, vemos que a definição eq. (6) pode ser reescrita como

$$M_G(q',q) = \int_{q=q_0}^{q'=q_N} \left[ \prod_{i=1}^{N-1} [dq_i] \right] \dots \left[ \prod_{i=1}^N [dp_i/2\pi\hbar] \right] \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N p_i (q_i - q_{i-1})} \cdot \sum_{j=1}^N G\left(\frac{q_{j-1} + q_j}{2}, p_j\right) \epsilon, \quad (5.2.10)$$

onde <sup>(41)</sup> consideramos trajetórias nas quais  $p(\beta)$  é uma constante ao longo de cada intervalo  $(\beta_{i-1}, \beta_i)$ , e  $q(\beta)$  uma função linear (ver Figs. 5.2.1 e 5.2.2).

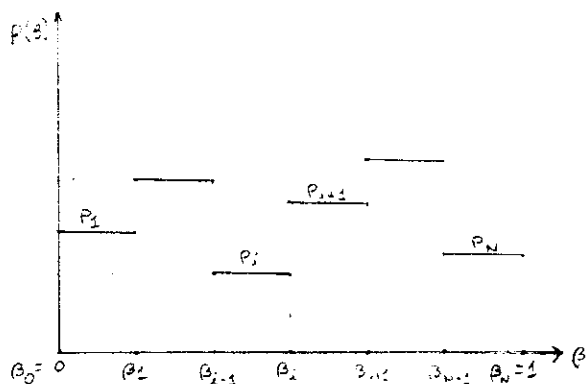


Fig. 5.2.1 - Partição isométrica.

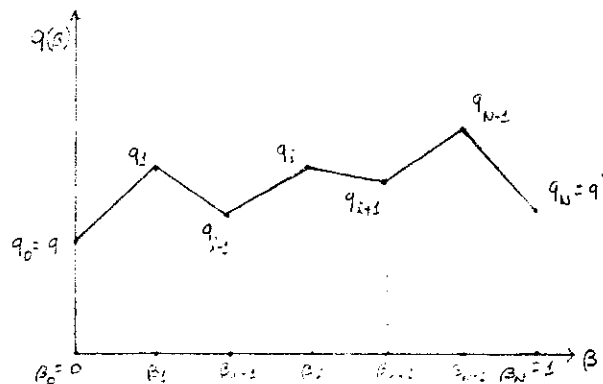


Fig. 5.2.2 - Partição isométrica.

Nesse caso, integrando em todos os  $p_i$  exceto um particular  $p_j$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
 M_G(q', q) &= \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{q=q_0}^{q'=q_N} \dots \int_{i=1}^{N-1} [dq_i] \cdot \dots \int_{i=1}^N [dp_i / 2\pi\hbar] \cdot \right. \\
 &\cdot \left. e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N p_i (q_i - q_{i-1})} \cdot G\left(\frac{q_{j-1} + q_j}{2}, p_j\right) \varepsilon \right\} = \\
 &= \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{q=q_0}^{q'=q_N} \dots \int_{i=1}^{N-1} [dq_i] \cdot \delta(q_1 - q) \delta(q_2 - q_1) \dots \right. \\
 &\quad \dots \delta(q_{j-1} - q_{j-2}) \cdot \delta(q_{j+1} - q_j) \dots \\
 &\quad \left. \delta(q' - q_{N-1}) \cdot \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q_j - q_{j-1})} \cdot G\left(\frac{q_{j-1} + q_j}{2}, p_j\right) \varepsilon \right\} , \\
 & \hspace{20em} (5.2.11)
 \end{aligned}$$

de modo que, integrando em  $q_i$  entre os limites propostos, temos

$$M_G(q', q) = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q' - q)} G\left(\frac{q' + q}{2}, p_j\right) \right\} \varepsilon . \quad (5.2.12)$$

Observemos contudo que o resultado da integral na eq. (12) não irá depender da escolha de um particular índice  $j$ , de modo que no limite  $N \rightarrow \infty$  teremos

$$M_G(q', q) = \int_0^1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p (q' - q)} G\left(\frac{q' + q}{2}, p\right) \right\} d\beta =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 d\beta \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'-q)} G\left(\frac{q'+q}{2}, p\right) \right\} = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'-q)} G\left(\frac{q'+q}{2}, p\right) . \tag{5.2.13}
 \end{aligned}$$

Consideremos agora o caso em que o gerador  $G(q,p)$  é o monômio fundamental  $q^m p^n$ :

$$M_{mn}(q', q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'-q)} \left(\frac{q'+q}{2}\right)^m p^n . \tag{5.2.14}$$

Empregando a expansão binomial do termo em  $q$  e  $q'$ , temos

$$\begin{aligned}
 M_{mn}(q', q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'-q)} p^n \left\{ \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} q'^{m-k} q^k \right\} = \\
 &= \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} q'^{m-k} e^{\frac{i}{\hbar} pq'} p^n e^{-\frac{i}{\hbar} pq} q^k \right\} . \tag{5.2.15}
 \end{aligned}$$

Se recordamos a expressão da onda plana

$$\langle p|q\rangle \equiv e^{-\frac{i}{\hbar} pq} ,$$

(da qual se obtém a correspondência de Schrödinger para o operador momentum,  $\langle q'|\hat{p}|q\rangle = \hbar/i \delta(q'-q) \frac{\partial}{\partial q'}$ ), substituindo temos

$$M_{mn}(q', q) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} q'^{m-k} \langle q'|p\rangle p^n \langle p|q\rangle q^k \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left\{ \langle q' | \left[ \hat{q}^{m-k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle \langle p| p^n \cdot \hat{q}^k \right] | q \rangle \right\} = \\
 &= \langle q' | \left\{ \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \hat{q}^{m-k} \hat{p}^n \hat{q}^k \right\} | q \rangle , \quad (5.2.16)
 \end{aligned}$$

onde usamos a identidade operatorial

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p'\rangle \langle p'| p'^n = \hat{p}^n ,$$

visto que, sendo  $\{|p'\rangle\}$  um conjunto completo de autoestados do operador momentum, para um qualquer autoestado  $|p\rangle$  do momentum vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p'\rangle \langle p'| p'^n \cdot |p\rangle = \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} p'^n \delta(p'-p) |p'\rangle = p^n |p\rangle = \hat{p}^n |p\rangle .$$

Vemos assim que a associação entre a integral de caminho  $M_G(q',q)$  e o elemento da matriz  $\langle q' | \hat{G} | q \rangle$  efetivamente corresponde à regra de quantização de Weyl,

$$q^m p^n \rightarrow \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \hat{q}^{m-k} \hat{p}^n \hat{q}^k , \quad (5.2.17)$$

sendo os usuais os valores esperados dos operadores posição e momentum (na representação das coordenadas),

$$\langle q' | \hat{q} | q \rangle = q \delta(q'-q) \quad e \quad \langle q' | \hat{p} | q \rangle = \frac{\hbar}{i} \delta(q'-q) \frac{\partial}{\partial q'} . \quad (5.2.18)$$

Em virtude dessa relação tão explícita, é lícito espe

rarmos que nosso formalismo de integração de caminho seja apto a expressar a correspondência de Dirac entre o colchete de Poisson clássico e o comutador quântico <sup>(67)</sup>,

$$\{G_1, G_2\}_{PB} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{G}_1, \hat{G}_2], \quad (5.2.19)$$

ao menos para certa classe (a classe de Dirac) de funções clássicas  $G_u(q,p)$ . Ou seja, se definirmos o elemento de matriz correspondente ao comutador de dois operadores  $\hat{G}_1$  e  $\hat{G}_2$  pela igualdade

$$\langle q' | [\hat{G}_1, \hat{G}_2] | q \rangle \equiv \int dq'' \left\{ M_{G_1}(q', q'') M_{G_2}(q'', q) - M_{G_2}(q', q'') M_{G_1}(q'', q) \right\} \quad (5.2.20)$$

então de acordo com a identificação eq. (9) devemos ter

$$\begin{aligned} \langle q' | [\hat{G}_1, \hat{G}_2] | q \rangle &= \int dq'' \left\{ M_{G_1}(q', q'') M_{G_2}(q'', q) - M_{G_2}(q', q'') M_{G_1}(q'', q) \right\} = \\ &= M_{i\hbar \{G_1, G_2\}_{PB}}(q', q) = \\ &= i\hbar \int_q^{q'} \int D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\alpha} \int_0^1 \{G_1, G_2\}_{PB} d\beta. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

Como ilustração, vamos obter explicitamente esta correspondência no caso do PB fundamental (ver seção 3.2),

$$\{q, p\} = 1. \quad (5.2.22)$$

Lançando mão da eq. (13) teremos então



$$\begin{aligned}
 & \int dq'' \left\{ M_{(q)}(q', q'') M_{(p)}(q'', q) - M_{(p)}(q', q'') M_{(q)}(q'', q) \right\} = \\
 & = \int dq'' \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q' - q'')} \left( \frac{q' + q''}{2} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{p}}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{p}(q'' - q')} \bar{p} - \right. \\
 & \quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q' - q'')} p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{p}}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{p}(q'' - q')} \left( \frac{q'' + q}{2} \right) \right\} = \\
 & = \int dq'' \left\{ \delta(q' - q'') \left( \frac{q' + q''}{2} \right) \cdot \frac{-\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \left[ \delta(q'' - q) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q'} \left[ \delta(q' - q'') \right] \cdot \delta(q'' - q) \left( \frac{q'' + q}{2} \right) \right\} , \quad (5.2.23)
 \end{aligned}$$

visto que

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} p e^{\frac{i}{\hbar} p(q' - q)} & = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q' - q)} = \\
 & = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q'} \left[ \delta(q' - q) \right] .
 \end{aligned}$$

Integrando em  $q''$ , vem

$$\begin{aligned}
 & \int dq'' \left\{ M_{(q)}(q', q'') M_{(p)}(q'', q) - M_{(p)}(q', q'') M_{(q)}(q'', q) \right\} = \\
 & = \frac{\hbar}{i} \left\{ q' \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left[ \delta(q' - q) \right] + \frac{\partial}{\partial q'} \left[ \delta(q' - q) \right] \cdot q \right\} = F(q') , \quad (5.2.24)
 \end{aligned}$$

onde  $F(q')$  é um funcional conveniente. Então, para uma função qualquer  $f(q')$ , teremos

$$\begin{aligned}
 [F \cdot f](q') &= \int dq' F(q') f(q') = \\
 &= \frac{-\hbar}{i} \int dq' \left\{ q' \cdot \frac{\partial}{\partial q} [\delta(q'-q)] + q \cdot \frac{\partial}{\partial q'} [\delta(q'-q)] \right\} f(q') = \\
 &= \frac{-\hbar}{i} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} \left[ \int dq' q' \delta(q-q') f(q') \right] + q \int dq' \frac{\partial}{\partial q'} \right. \\
 &\quad \left. [\delta(q'-q)] f(q') \right\} = \\
 &= \frac{-\hbar}{i} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} [q f(q)] + q \int dq' (-\delta(q'-q)) \frac{\partial}{\partial q'} [f(q')] \right\} = \\
 &= \frac{-\hbar}{i} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} [q f(q)] - q \frac{\partial}{\partial q} [f(q)] \right\} = \frac{-\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} [q] \cdot f(q) = \\
 &= i\hbar f(q) \cdot 1, \tag{5.2.25}
 \end{aligned}$$

visto que

$$\frac{\partial}{\partial q'} \delta(q'-q) = -\delta(q'-q) \frac{\partial}{\partial q}.$$

Deste modo, concluimos que

$$\begin{aligned}
 F(q') &= i\hbar \delta(q'-q) \cdot 1 = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'-q)} \cdot 1 = \\
 &= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'-q)} \{q, p\}_{PB} = M_{i\hbar \{q, p\}_{PB}}(q', q), \tag{5.2.26}
 \end{aligned}$$

como queríamos.

Na verdade, dado que é equivalente à regra de quanti-

zação de Weyl, nossa associação eq. (9), entre elementos de matriz e integrais de caminho, admite a mesma classe de Dirac que esta regra, ou seja, a mesma classe de funções clássicas cujo PB entre um par qualquer de seus elementos é quantizado justamente no comutador dos operadores quânticos correspondentes, por esta mesma regra de quantização, a este par de funções<sup>(\*)</sup>. Verificamos assim que, com efeito, o formalismo de integrais de caminho pode ser empregado para estabelecer uma correspondência entre o colchete de Poisson clássico e o comutador quântico, a qual, a nosso ver, reflete a afinidade estrutural entre as mecânicas clássica e quântica, conforme a discussão apresentada na seção anterior.

### 5.3 - PROPRIEDADES DE GRUPO

Para estudarmos transformações sucessivas e propriedades de grupo no formalismo de integrais de caminho, considere - mos um conjunto  $\{G_\mu(q,p)\}$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ , de geradores clássicos de transformações cujas propriedades de grupo são conhecidas, ou seja, cuja álgebra de Lie  $L$  é dada,

$$\{G_\mu, G_\nu\}_{PB} = \sum_{\lambda=1}^m C_{\mu\nu}^\lambda G_\lambda, \quad (5.3.1)$$

sendo o colchete de Lie realizado, portanto, por PBs, e onde  $C_{\mu\nu}^\lambda$  é o termo genérico de um dado conjunto de constantes de es-

---

(\*) Esta classe é:

$$U = P \leq 2 \times C,$$

onde  $P \leq 2$  é o conjunto dos polinômios em  $p$  e  $q$  de grau menor ou igual a 2, e  $C$  o conjunto de funções quaisquer no espaço de fase <sup>(67)</sup>.

trutura do grupo<sup>(\*)</sup>.

Ora, a cada gerador  $G(q,p)$ , de acordo com nossa associação eq. (4.1.4), pode ser atribuída uma amplitude de probabilidade  $K_G$  expressa em termos de integrais de caminho, como na eq. (2.1):

$$K_{G_\mu}(q',q;\alpha) = \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^\alpha [p\dot{q} - G_\mu] d\alpha} \quad (5.3.2)$$

onde tal como na eq. (4.1.2),  $D^2 [q \cdot p / 2\pi\hbar]$  indica dupla integração funcional.

Qual será o resultado da aplicação consecutiva de duas transformações distintas, finitas, sobre um dado sistema? Temos da eq. (2) que o produto de duas amplitudes correspondentes a duas transformações sucessivas  $G_2$  e  $G_1$  é

$$\begin{aligned} K_{G_1 \rightarrow G_2}(q',q;\alpha,\beta) &= \int dq'' K_{G_2}(q',q'';\beta) K_{G_1}(q'',q;\alpha) = \\ &= \int dq'' \cdot \int_{q''}^{q'} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^\beta [p\dot{q} - G_2] d\beta} \cdot \\ &\cdot \int_q^{q''} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^\alpha [p\dot{q} - G_1] d\alpha} \quad (5.3.3) \end{aligned}$$

Empregando uma técnica de gráficos similar à de Feynman<sup>(72)</sup>, no Apêndice B (para expressar por diagramas expansões das amplitudes  $K_G(q',q;\alpha)$  em termos de números não comutativos), demonstramos que a quantidade acima vale<sup>(\*\*)</sup>

(\*) Ver Apêndice A.

(\*\*) Ver Apêndice B, eq. (B.39).

$$\int dq'' \cdot \int_{q''}^q D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^\beta [p\dot{q} - G_2] d\beta} \cdot \int_q^{q''} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^\alpha [p\dot{q} - G_1] d\alpha} =$$

$$= \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 [p\dot{q} - \bar{G}] d\alpha} \quad , \quad (5.3.4)$$

onde o gerador  $\bar{G}$  é dado (a partir da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, eq. (A.5)) pela expressão eq. (B.38) ,

$$\bar{G} = (\beta G_2 + \alpha G_1) + \frac{1}{2} \{ \beta G_2, \alpha G_1 \}_{PB} + \frac{1}{12} \left\{ (\beta G_2 - \alpha G_1), \{ \beta G_2, \alpha G_1 \}_{PB} \right\}_{PB} + \dots$$

(5.3.5)

Verificamos assim que a amplitude resultante  $K_{G_1 \rightarrow G_2}$  para duas transformações sucessivas é dada por

$$K_{G_1 \rightarrow G_2}(q', q; \alpha, \beta) = \int dq'' K_{G_2}(q', q''; \beta) K_{G_1}(q'', q; \alpha) =$$

$$= \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 [p\dot{q} - \bar{G}] d\alpha} = K_{\bar{G}}(q', q; 1) \quad . \quad (5.3.6)$$

Mas por outro lado o "gerador equivalente"  $\bar{G}$  é justamente o gerador clássico correspondente a duas transformações sucessivas do sistema, geradas por  $G_1$  e  $G_2$ : Recordemos da eq. (3.4.11) que a transformação

$$(q, p) \xrightarrow{G_1} (q'', p'') \quad (5.3.7)$$

gerada por  $G_1$  em primeiro lugar pode ser escrita como

$$\left\{ \begin{array}{l} q'' = e^{-i\alpha D[G_1]} \cdot q = e^{D[\frac{\alpha}{i} G_1]} \cdot q \\ p'' = e^{-i\alpha D[G_1]} \cdot p = e^{D[\frac{\alpha}{i} G_1]} \cdot p \end{array} \right. , \quad (5.3.8)$$

devido à linearidade do PB, visto que

$$D[G] \cdot f = i\{f, G\}_{PB} \quad , \quad (5.3.9)$$

de acordo com a definição eq. (3.4.9).

A segunda transformação,

$$(q'', p'') \xrightarrow{G_2} (q', p') \quad , \quad (5.3.10)$$

gerada por  $G_2$ , é por sua vez expressa por

$$\left\{ \begin{array}{l} q' = e^{D[\frac{\beta}{i} G_2]} \cdot q'' = e^{D[\frac{\beta}{i} G_2]} e^{D[\frac{\alpha}{i} G_1]} \cdot q \\ p' = e^{D[\frac{\beta}{i} G_2]} \cdot p'' = e^{D[\frac{\beta}{i} G_2]} e^{D[\frac{\alpha}{i} G_1]} \cdot p \end{array} \right. \quad (5.3.11)$$

O conjunto de operadores  $\{D[A] \mid A \in V\}$ , sendo  $V$  o espaço vetorial das funções clássicas, forma uma álgebra de Lie com produto interno (ou seja, o colchete de Lie) dado por <sup>(67)</sup>

$$[D[A]D[B] - D[B]D[A]] = i D[\{A, B\}_{PB}] \quad , \quad (5.3.12)$$

em virtude da identidade de Jacobi para o colchete de Poisson. Efetivamente, para uma função  $C$  arbitrária, usando a regra de

composição de funções temos

$$\begin{aligned} \left[ D \left[ A \right], D \left[ B \right] \right] C &= \left[ D \left[ A \right] D \left[ B \right] - D \left[ B \right] D \left[ A \right] \right] C = \\ &= i \{ \{ C, A \}_{PB}, B \}_{PB} - i \{ \{ C, B \}_{PB}, A \}_{PB} ; \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

empregando a identidade de Jacobi eq. (3.2.9.iv) ,

$$\{ \{ A, B \}_{PB}, C \}_{PB} + \{ \{ C, A \}_{PB}, B \}_{PB} + \{ \{ B, C \}_{PB}, A \}_{PB} = 0 \quad (5.3.14)$$

transformamos a eq. (13) em

$$\begin{aligned} \left[ D \left[ A \right], D \left[ B \right] \right] C &= - \{ \{ C, A \}_{PB}, B \}_{PB} + \{ \{ C, B \}_{PB}, A \}_{PB} = \\ &= + \{ \{ A, B \}_{PB}, C \}_{PB} + \{ \{ B, C \}_{PB}, A \}_{PB} + \{ \{ C, B \}_{PB}, A \}_{PB} = \\ &= \{ \{ A, B \}_{PB}, C \}_{PB} + \{ (\{ B, C \}_{PB} - \{ B, C \}_{PB}), A \}_{PB} = \\ &= \{ \{ A, B \}_{PB}, C \}_{PB} = - \{ C, \{ A, B \}_{PB} \}_{PB} = i (i \{ C, \{ A, B \}_{PB} \}_{PB}) = \\ &= i D \left[ \{ A, B \}_{PB} \right] \cdot C , \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

como queríamos.

O produto

$$e^{D \left[ \frac{\beta}{i} G_2 \right]} \cdot e^{D \left[ \frac{\alpha}{i} G_1 \right]} \quad (5.3.16)$$

que comparece na eq. (11) pode então ser comparado à expansão

de duas exponenciais de números não comutativos,

$$e^{\hat{B}}e^{\hat{A}} = \left[ 1 + \hat{B} + \frac{1}{2!} \hat{B}^2 + \dots \right] \times \left[ 1 + \hat{A} + \frac{1}{2!} \hat{A}^2 + \dots \right] \quad , (5.3.17)$$

tal como na eq. (B.31). Se por hipótese as séries convergem, temos que vale

$$e^{\hat{B}}e^{\hat{A}} = e^{\hat{C}} \quad ,$$

onde  $\hat{C}$  é dado mais uma vez pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff eq. (A.5),

$$\hat{C} = \left[ (\hat{B}+\hat{A}) + \frac{1}{2} [\hat{B}, \hat{A}]_{LB} + \frac{1}{12} [\hat{B}-\hat{A}, [\hat{B}, \hat{A}]_{LB}]_{LB} + \dots \right] \quad ,$$

de modo que para a eq. (16) temos que

$$\begin{aligned} e^{D \left[ \frac{\beta}{i} G_2 \right]} \cdot e^{D \left[ \frac{\alpha}{i} G_1 \right]} &= \exp \left[ \left( D \left[ \frac{\beta}{i} G_2 \right] + D \left[ \frac{\alpha}{i} G_1 \right] \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[ D \left[ \frac{\beta}{i} G_2 \right], D \left[ \frac{\alpha}{i} G_1 \right] \right] + \frac{1}{12} \left[ \left( D \left[ \frac{\beta}{i} G_2 \right] - D \left[ \frac{\alpha}{i} G_1 \right] \right) \right. \\ &\left. \left. \left[ D \left[ \frac{\beta}{i} G_2 \right], D \left[ \frac{\alpha}{i} G_1 \right] \right] \right] + \dots \right] \quad . \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

Visto que a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff envolve uma sucessão de comutadores como os da eq. (12), em virtude da linearidade do PB e do operador  $D \left[ G \right]$  (ver eq. (9)) a eq. (18) acima se torna



$$\begin{aligned}
 e^{D \left[ \frac{\beta}{i} G_2 \right]} \cdot e^{D \left[ \frac{\alpha}{i} G_1 \right]} &= \exp \left[ D \left[ \left( \frac{\beta}{i} G_2 + \frac{\alpha}{i} G_1 \right) \right] + \frac{i}{2} D \left[ \left\{ \frac{\beta}{i} G_2, \frac{\alpha}{i} G_1 \right\}_{PB} \right] + \right. \\
 &+ \left. \frac{i}{12} D \left[ \left\{ \left( \frac{\beta}{i} G_2 - \frac{\alpha}{i} G_1 \right), i \left\{ \frac{\beta}{i} G_2, \frac{\alpha}{i} G_1 \right\}_{PB} \right\}_{PB} \right] + \dots \right] = \\
 &= \exp \left[ -i D \left[ \left( \beta G_2 + \alpha G_1 \right) \right] - i D \left[ \frac{1}{2} \left\{ \beta G_2, \alpha G_1 \right\}_{PB} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - i D \left[ \frac{1}{12} \left\{ \left( \beta G_2 - \alpha G_1 \right), \left\{ \beta G_2, \alpha G_1 \right\}_{PB} \right\}_{PB} \right] - \dots \right] = \\
 &= \exp \left[ -i D \left[ \left( \beta G_2 + \alpha G_1 \right) + \frac{1}{2} \left\{ \beta G_2, \alpha G_1 \right\}_{PB} + \frac{1}{12} \left\{ \left( \beta G_2 - \alpha G_1 \right), \left\{ \beta G_2, \alpha G_1 \right\}_{PB} \right\}_{PB} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \dots \right] \right] = \\
 &= e^{-iD \left[ \bar{G} \right]}, \tag{5.3.19}
 \end{aligned}$$

onde o gerador  $\bar{G}$  é novamente expresso pela eq. (5). Vemos assim que

$$e^{-iD \left[ \beta G_2 \right]} \cdot e^{-iD \left[ \alpha G_1 \right]} = e^{-iD \left[ \bar{G} \right]}, \tag{5.3.20}$$

de modo que substituindo na eq. (11) temos

$$\begin{cases} q' = e^{-iD \left[ \bar{G} \right]} q \\ p' = e^{-iD \left[ \bar{G} \right]} p \end{cases} \tag{5.3.21}$$

Portanto, as transformações sucessivas geradas por  $G_1$  e  $G_2$ ,

$$(q,p) \xrightarrow{G_1} (q'',p'') \xrightarrow{G_2} (q',p') \quad , \quad (5.3.22)$$

são de fato equivalentes à transformação "resultante"

$$(q,p) \xrightarrow{\bar{G}} (q',p') \quad (5.3.23)$$

gerada por  $\bar{G}$ , como havíamos afirmado.

Se chamamos de  $R(G)$  a correspondência dada pela eq. (2) entre cada elemento de um conjunto de geradores clássicos  $\{G_\mu\}$ , cuja álgebra de Lie é dada pelo PB da eq. (1), e as respectivas amplitudes  $K_{G_\mu}(q',q;\alpha)$ , as eqs. (6) e (22)-(23) nos mostram que

$$R(G_\mu) \cdot R(G_\nu) \underset{\text{(eq. (6))}}{=} R(\bar{G}) \underset{\text{(eq. (23))}}{=} R(G_\mu \cdot G_\nu) \quad , \quad (5.3.24)$$

e terminamos por concluir que a associação

$$\text{gerador clássico } G \iff \text{integral de caminho } K_G(q',q;\alpha) \quad (5.3.25)$$

forma, efetivamente, uma representação (linear)<sup>(\*)</sup> do grupo cuja álgebra de Lie é dada pela eq. (1),

$$\{G_\mu, G_\nu\}_{PB} = \sum_{\lambda=1}^m C_{\mu\nu}^\lambda G_\lambda \quad .$$

---

(\*) Ver Apêndice A.

#### 5.4 - SIMETRIAS E QUANTIDADES CONSERVADAS

Podemos empregar os resultados que desenvolvemos no estudo das propriedades de transformações sucessivas, na seção anterior, para investigar a relação entre simetrias sob transformações e conservação de quantidades em nossa formulação, retomando assim a questão das medições quânticas levantada na seção 4.4.

Consideremos, para tanto, a eq. (3.4), quando o PB entre os geradores  $G_1$  e  $G_2$  que nela comparecem se anula,

$$\{G_1, G_2\}_{PB} = 0 \quad ; \quad (5.4.1)$$

tal fato significa, de acordo com a discussão levada a cabo na seção 3.4, que cada um dos geradores clássicos  $G_1$  e  $G_2$  será preservado sob o subgrupo de transformações gerado pelo outro, do que podemos concluir que a ordem da aplicação das transformações por eles geradas não será importante.

Nesse caso, o gerador "equivalente"  $\bar{G}$ , dado pela eq. (3.5), que comparece na eq. (3.4) se reduz a

$$\begin{aligned} \bar{G} &= (\beta G_2 + \alpha G_1) + \frac{1}{2} \{ \beta G_2, \alpha G_1 \}_{PB} + \frac{1}{12} \{ (\beta G_2 - \alpha G_1), \{ \beta G_2, \alpha G_1 \}_{BP} \}_{PB} + \dots = \\ &= (\beta G_2 + \alpha G_1) \quad , \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

e a amplitude resultante  $K_{\bar{G}}(q', q; 1)$  definida na eq. (3.6) é portanto

$$K_{\bar{G}}(q', q; 1) = \int_q^{q'} \int D^2 \left[ \frac{\bar{q} \cdot \bar{p}}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 [p\dot{q} - (\beta G_2 + \alpha G_1)] d\alpha'} \quad . \quad (5.4.3)$$

Como, naturalmente, a adição na eq. (2) acima é comutativa, temos que vale para a eq. (3.4) a igualdade

$$\begin{aligned} K_{G_1+G_2}(q', q; \beta, \alpha) &= \int dq'' K_{G_2}(q', q''; \beta) K_{G_1}(q'', q; \alpha) = \\ &= K_{\bar{G}}(q', q; 1) = \int dq'' K_{G_1}(q', q'', \alpha) K_{G_2}(q'', q; \beta) . \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Este resultado pode ser aplicado ao esquema de medições examinado anteriormente. Suponhamos que um dado observável  $G$  seja uma quantidade conservada em relação à evolução Hamiltoniana de um sistema; assim, o PB do gerador  $G$  com a Hamiltoniana  $H$  será nulo,

$$\{G, H\}_{PB} = 0 , \quad (5.4.5)$$

e por sua vez o próprio sistema (isto é, sua evolução dinâmica) será invariante sob as transformações geradas por  $G$ . Seja que num instante inicial  $t = 0$  realizamos uma medição da quantidade  $G$ , obtendo o valor  $g_0$ ; em termos do nosso formalismo, a amplitude de probabilidade de se encontrar o sistema, a partir de uma configuração inicial  $\{q\}$ , numa certa configuração  $\{q''\}$  imediatamente depois da medição será dada pela eq. (4.4.1):

$$A_{g_0}(q'', q) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{g_0} d\omega \int d\alpha e^{\frac{i}{\hbar}\omega\alpha} K_G(q'', q; \alpha) . \quad (5.4.6)$$

Decorrido um lapso finito de tempo, todavia, o sistema terá evoluído para uma nova configuração final  $\{q'\}$  (como assinalamos na discussão final da seção 4.4) e correspondentemente a ampli-

tude eq. (6) estará modificada; como o propagador da evolução Hamiltoniana não é senão a amplitude (ou função de Green)  $K_H(q',q;t)$ , dada pela eq. (2.4.6), no instante  $t=t$  teremos

$$\begin{aligned}
 A_{g_0}(q',q) \Big|_t &= \int dq'' K_H(q',q'';t) A_{g_0}(q'',q) = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{g_0} d\omega \int d\alpha e^{\frac{i}{\hbar}\omega\alpha} \int dq'' K_H(q',q'';t) K_G(q'',q;\alpha) = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{g_0} d\omega \int d\alpha e^{\frac{i}{\hbar}\omega\alpha} \int dq'' K_G(q',q'';\alpha) K_H(q'',q;t) = \\
 &= \int dq'' A_{g_0}(q',q'') K_H(q'',q;t) \quad , \quad (5.4.7)
 \end{aligned}$$

fazendo uso do resultado eq. (4). Mas se agora (isto é, imediatamente depois do instante  $t$ ) realizarmos uma outra medição do observável  $G$ , de acordo com o procedimento da seção 4.4 encontraremos novamente o mesmo valor  $g_0$ , pois supondo que a nova medição produzisse um certo resultado  $g_1$  teríamos para a amplitude resultante  $A_{g_0 \rightarrow g_1}$  (ver eq. (4.4.6)) a expressão

$$\begin{aligned}
 A_{g_0 \rightarrow g_1}(q',q) \Big|_t &= \int dq'' A_{g_1}(q',q'') A_{g_0}(q'',q) \Big|_t = \\
 &= \int dq'' A_{g_1}(q',q'') \int d\bar{q} A_{g_0}(q'',\bar{q}) K_H(\bar{q},q;t) = \\
 &= \int d\bar{q} \left( \int dq'' A_{g_1}(q',q'') A_{g_0}(q'',\bar{q}) \right) K_H(\bar{q},q;t) = \\
 &= \int d\bar{q} (A_{g_0 \rightarrow g_1}(q',q)) K_H(\bar{q},q;t) =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \int d\bar{q} A_{g_0}(q', \bar{q}) K_H(\bar{q}, q; t) = A_{g_0}(q', q) \Big|_t, & \text{se } g_1 \text{ coincide com } g_0, \\ 0, & \text{se } g_1 \text{ não coincide com } g_0, \end{cases} \quad (5.4.8)$$

segundo a eq. (4.4.11); de modo que resulta então

$$A_{g_0 \rightarrow g_1}(q', q) \Big|_t = \begin{cases} A_{g_0}(q', q) \Big|_t, & \text{se } g_1 \text{ coincide com } g_0, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.4.9)$$

e analogamente à seção 4.4 concluímos que, efetivamente, uma observação da grandeza  $G$ , após o instante  $t$ , reproduzirá o valor original  $g_0$ . Deste modo, estabelecemos por meio da formulação de integrais de caminho a afirmação de que, se uma dada transformação  $G$  é uma simetria clássica de um sistema (ou por outra, se  $G$  é uma quantidade conservada na evolução dinâmica Hamiltoniana do sistema), então este observável  $G$  será também uma quantidade conservada no sentido mecânico-quântico. A quantização por meio de integrais de caminho, portanto, tal como nos métodos tradicionais, transporta as simetrias dinâmicas dos sistemas clássicos ao regime quântico e fornece assim um meio (ainda que preliminar) de expressar o processo de medição quântica sem que seja indispensável a introdução a priori de operadores.

## CAPÍTULO 6

### DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Nos dois capítulos precedentes, esclarecemos alguns aspectos do procedimento de quantização por integrais de caminho, através do desenvolvimento de nossa versão deste processo, generalizada para transformações canônicas arbitrárias. Esta versão consiste, fundamentalmente, em dois passos: em primeiro lugar, na atribuição de uma amplitude de probabilidade "generalizada", por meio de uma integral de caminho (eq. (4.1.4)), a uma transformação canônica genérica (eq. (3.4.5)); em segundo, na associação (eq. (4.3.2)) entre os pólos do traço da transformada de Fourier da amplitude generalizada  $K_G$  e os autovalores do operador quântico correspondente, como método de obtenção da informação trazida por  $K_G$ . A correspondência gerador clássico/operador quântico estabelecida por este método resulta equivalente à regra de quantização de Weyl, e em particular fornece uma representação por integrais de caminho de uma álgebra de Lie associada a um dado conjunto de geradores clássicos, como visto nas seções 5.2 - 5.4. Pudemos, assim, explicitar alguns pontos da afinidade entre as estruturas dinâmicas da mecânica clássica e da mecânica quântica. Vale, entretanto, dirigir um olhar crítico sobre estas realizações e ressaltar certas dificuldades técnicas e conceituais que observamos.

Desde logo, assinalemos o caráter eminentemente formal de boa parte de nossos resultados. De fato, nas aplicações que realizamos no capítulo 4, reproduzimos, sem novidades, resultados que podem ser obtidos, até com maior facilidade, pelos métodos tradicionais que utilizam operadores diferenciais; por outro lado, as numerosas integrações envolvidas tornam pouco econômica a manipulação de nossa técnica, e a limitada evolução dos métodos de resolução de integrais de caminho decerto reduz também o domínio de suas possibilidades de aplicação. Contudo, como dito na Introdução, este estudo visa a ter basicamente um teor ilustrativo e informativo acerca de alguns pontos da formulação de integrais de caminho; assim, se nosso método não constitui a técnica de cálculo mais eficiente disponível hoje em dia no arsenal da mecânica quântica, não devemos todavia deixar de considerar seu valor enquanto instrumento de investigação de alguns aspectos formais complementares da teoria — o qual, a nosso ver, é sem dúvida relevante. Cabe reafirmar, ainda uma vez, o papel iluminador do formalismo de integrais de caminho, propiciado pela idéia básica de soma sobre caminhos, que nos permite avaliar sob outros ângulos a natureza dos processos de quantização e, portanto, das relações entre os conceitos das teorias clássica e quântica — por exemplo, ao empregarmos integrais de caminho para analisar propriedades de grupo, ou para relacionar simetrias e conservação de quantidades nestes dois contextos. Aqui reside, acreditamos, o pormenor mais interessante de nossa abordagem.

No que concerne a outras aplicações presumíveis, nosso esquema de quantização por integrais de caminho generalizado a transformações arbitrárias admite várias possibilidades.



Uma delas é uma revisão da noção de invariância relativística através do estudo de uma formulação de amplitudes generalizadas associadas às transformações de Lorentz; poderíamos talvez entender nossas concepções também à quantização de sistemas com vínculos. Seria igualmente proveitoso, em nossa opinião, considerarmos questões formais ainda em aberto, tal como a de uma possível interpretação do processo quântico de medição a partir de um ponto de vista geométrico. Por exemplo, conforme assinalamos na parte final da seção 4.3, nossa formulação sugere que o valor quantizado da carga de um campo pode estar relacionado à própria natureza da transformação de calibre da qual ela é a geradora; valeria a pena, assim, que aprofundássemos nossas investigações buscando uma representação física por integrais de caminho, mais ampla e completa, de um modelo de medição quântica que dispensasse a introdução de um formalismo de operadores, de modo similar ao que fizemos neste trabalho com relação aos conceitos de autovalores e quantidades conservadas.

A título de curiosidade, podemos neste sentido considerar, temerariamente, uma especulação geométrica, ou geometrizante, que nossa associação geradores de transformações/amplitudes de probabilidade nos propicia acerca do conceito de estado. Classicamente, uma mudança de estado corresponde a uma transição entre pontos do espaço de fase, ou seja, entre uma configuração  $\{q\}$  – que podemos encarar como uma figura no espaço das coordenadas – e uma outra configuração  $\{q'\}$  – uma outra figura, portanto. Se agora atribuirmos um peso, à maneira de Feynman, a cada uma das possíveis trajetórias que conectam os pontos de uma configuração aos pontos da outra, ou melhor, se no total admitirmos uma amplitude de probabilidade "generalizada" do tipo

da eq. (4.1.4) para a transição entre dois estados, agora caracterizados por figuras  $\Omega = \{q\}$ , então teremos estabelecido uma associação entre transições entre estados quânticos e transições entre figuras geométricas num subespaço do espaço de fase, sendo estas figuras consideradas não apenas meros conjuntos de "posições", mas verdadeiros corpos de relações globais entre pontos, de vinculações entre pontos - algo como a forma aristotélica, quem sabe? Se agora uma dada figura  $\Omega$  é preservada numa certa transformação  $G$  do sistema, ou seja, se ocorre no sistema uma simetria sob esta transformação, então há que ter

$$K_G(\Omega', \Omega) = \text{algum tipo de "delta" funcional.}$$

O conceito de simetria no formalismo de integrais de caminho, como bem se vê, se inscreveria naturalmente numa concepção como esta. Esta sugestão fantasiosa, surgida quando se procurava compreender a formulação de Feynman, careceria todavia de uma formalização matemática explícita, antes de poder ser levada a sério (definição precisa de "figura", explicitação do mecanismo de atribuição de pesos a trajetórias, etc).

Esperamos, num futuro breve, realizar também algumas aplicações do método de quantização por integrais de caminho a alguns temas da teoria de campos não-lineares e à física nuclear.

Ainda uma palavra: o espírito que presidiu a elaboração deste trabalho resultou ser, essencialmente, o de aprendizado, treinamento, preparação - muito ao contrário, mesmo, do que pretenderia o ilimitado ego de seu limitado autor, que esse se propunha a sacudir os céus e terras do conhecimento estabeleci-

do e alcançar , dum só golpe, a mão do homem às estrelas. Aprendi na infinita redação desta tese, todavia, que mais que súbitos clarões de precipitada inspiração me era necessária a meticulosa, a minuciosa arte da persistência – e nesta íngreme descoberta adquiri, talvez, a calma sabedoria de que, muitas vezes, os dados se lançam a si mesmos.

Ou não.

## APÊNDICE A

### GRUPOS E REPRESENTAÇÕES

Um grupo é um conjunto cujos elementos apresentam, entre si, uma lei de combinação que possui as seguintes propriedades: associatividade, existência da identidade, existência do inverso. O grupo é dito abeliano se sua lei de combinação é, além disso, comutativa. Um grupo contínuo é o que tem seus elementos titulados por índices, ou parâmetros, contínuos. Se o número de parâmetros (a ordem) de um grupo contínuo é finito, este é dito grupo contínuo finito.

Se o grupo é contínuo, além das propriedades usuais enumeradas acima, seus elementos  $g(a)$ , caracterizados por  $r$  parâmetros contínuos  $\{a_r\}$ , são tais que a lei de composição

$$g(c) = g(a) \cdot g(b) \quad (\text{A.1})$$

implica na continuidade dos parâmetros:

$$c = \phi(a, b) \quad ; \quad \phi \text{ cont\u00ednua} . \quad (\text{A.2})$$

Se, além disso, o índice  $c$  é uma função anal\u00edtica de  $a$  e  $b$ , e a inversa  $a^{-1}$  (tal que  $g(a^{-1}) \cdot g(a) = g(1)$ ) é uma função anal\u00edtica de  $a$ , ent\u00e3o o grupo \u00e9 chamado grupo de Lie de  $r$  par\u00e2metros. Podemos definir, equivalentemente, um grupo  $G$  como um

grupo de Lie se podemos estabelecer uma correspondência entre os elementos pertencentes a uma vizinhança da identidade em  $G$  e pontos de uma região aberta limitada de um espaço euclidiano (isto é, estabelecer coordenadas para os elementos de  $G$ ) que seja um mapeamento contínuo em ambas as direções. Dois grupos de Lie quaisquer são ditos isomorfos se têm a mesma ordem, a mesma lei de combinação e o mesmo domínio de variação dos parâmetros.

Seja um grupo  $G$ , de elementos  $\{g_1, g_2, \dots\}$ , e seja um dado conjunto  $X$  de elementos  $\{x_1, x_2, \dots\}$ . Se a cada  $g_i \in G$  pudermos associar um mapeamento  $R_{g_i}: X \rightarrow X$  que seja um-a-um e inversível e que seja tal que o produto de dois mapeamentos,  $R_{g_1} \cdot R_{g_2}$  (dado pela regra usual de composição), é o mapeamento  $R_{g_1 \cdot g_2}$  (sendo o produto  $g_1 \cdot g_2$  dado pela lei de composição de  $G$ ), então dizemos que esta é uma realização do grupo  $G$  por meio de transformações em  $X$ .

Particularmente, uma representação (linear)  $\rho$  de um grupo de Lie  $G$  é um homomorfismo de  $G$  ao grupo de automorfismos lineares de um espaço vetorial de dimensão finita  $V$  — ou por outra, se  $g$  é um elemento de  $G$ , então  $\rho(g)$  é uma transformação linear inversível de  $V$  sobre si mesmo, tal que o mapeamento  $G \times V \rightarrow V$ , dado por  $(g, v) \rightarrow \rho(g) \cdot (v)$ , define  $G$  como um grupo de transformação em  $V$ , isto é,  $\rho(g) \cdot v$  é sempre uma transformação linear não-singular em  $V$ .

Assim, estabelecemos uma correspondência entre os elementos do grupo  $G$  e certas transformações lineares num espaço vetorial  $V$ . Para cada grupo de automorfismos lineares em  $V$  podemos encontrar um "gerador infinitesimal"  $G_\alpha$ , que é também uma transformação linear, a partir do qual este grupo pode ser reconstruído. A álgebra destes geradores chamamos grupo infinitesimal ou

álgebra de Lie L associada ao grupo G. Como as transformações lineares num espaço vetorial V formam também um espaço vetorial, dizemos que L é um espaço vetorial de dimensão finita no qual é definido um colchete de Lie LB, uma regra de derivação sob a qual o espaço é fechado e que apresenta as propriedades de antissimetria, linearidade, e identidade de Jacobi. Já que, devido à linearidade e à clausura de que é dotado por definição o colchete de Lie LB, qualquer combinação linear de geradores de um grupo G é também um gerador, os colchetes de Lie entre dois quaisquer geradores de um grupo de Lie serão portanto combinações lineares de geradores, sendo os coeficientes destas combinações as chamadas constantes de estrutura do grupo, que são determinadas a partir das propriedades do grupo próximo à identidade. Mais de um grupo, todavia, pode partilhar da mesma álgebra L.

A importância das álgebras de Lie reside no fato de muitas de suas propriedades algébricas refletirem propriedades de teoria de grupos mais complicadas dos grupos de Lie que lhes são associados. Assim, por um lado a estrutura do grupo próximo à identidade determina, via constantes de estrutura, o colchete de Lie LB da álgebra L associada; por outro lado, se especificarmos a álgebra de Lie L de um dado conjunto de geradores  $\{G_\mu\}$ ,

$$\{G_\mu, G_\nu\}_{LB} = C_{\mu\nu}^\lambda G_\lambda, \quad (A.3)$$

onde  $\{C_{\mu\nu}^\lambda\}$  é um conjunto de constantes de estrutura do grupo e  $\{ , \}_{LB}$  é alguma realização do colchete de Lie LB, então as propriedades do colchete LB são suficientes para reconstruir o grupo G (via, por exemplo, a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff), ao menos em alguma região vizinha à identidade (na verdade, co-

mo vários grupos podem possuir a mesma álgebra  $L$ , esta determina univocamente, em geral, apenas um certo grupo simplesmente conexo  $\bar{G}$ , que é chamado o grupo cobertura universal de todos os grupos de Lie  $G$  que têm  $L$  como sua álgebra de Lie): se  $v_1, v_2, \dots$ , são elementos da álgebra de Lie  $L$ , então os elementos de  $G$  são  $\exp(v_1), \exp(v_2), \dots$ , e a lei de composição do grupo é expressa por

$$\exp(v_1)\exp(v_2) = \exp(v) \quad , \quad (\text{A.4})$$

onde  $v$  é dado em termos de  $v_1$  e  $v_2$  pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff<sup>(58)</sup> ,

$$v = v_1 + v_2 + \frac{1}{2} \{v_1, v_2\}_{LB} + \frac{1}{12} \{v_1 - v_2, \{v_1, v_2\}_{LB}\}_{LB} + \dots \quad . \quad (\text{A.5})$$

Esta fórmula converge para um valor  $v$  finito se  $v_1$  e  $v_2$  são suficientemente próximos à origem em  $L$ . Concluimos, portanto, que as propriedades de grupo de um conjunto de geradores  $\{G_\mu\}$  serão dadas se for conhecida a álgebra de Lie  $L$  associada, equação (A.3)<sup>(59, 73)</sup> .

## APÊNDICE B

### TÉCNICA DE GRÁFICOS

Iremos realizar o cálculo do produto de duas amplitudes de probabilidade correspondentes a duas transformações sucessivas  $G_1$  e  $G_2$ , eq. (5.3.3):

$$\begin{aligned}
 K_{G_1 \rightarrow G_2}(q', q; \alpha, \beta) &= \int dq'' K_{G_2}(q', q''; \beta) K_{G_1}(q'', q; \alpha) = \\
 &= \int dq'' \int_{q''}^q D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^\beta [p\dot{q} - G_2] d\beta} \cdot \int_q^{q''} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^\alpha [p\dot{q} - G_1] d\alpha} .
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

Para este fim, vamos introduzir uma técnica de gráficos, semelhante à desenvolvida por Feynman<sup>(72)</sup>, que facilitará a manipulação das integrais de caminho que intervêm no problema. Começamos atribuindo um gráfico

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 \updownarrow \\
 0
 \end{array}
 \tag{B.2}$$

à integral de caminho

$$\int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p\dot{q} d\alpha} .
 \tag{B.3}$$



O gráfico

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \downarrow \end{array} A(B) \quad (B.4)$$

fica por sua vez consignado à grandeza

$$\int_q^{q'} \int D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\alpha} \int_0^1 A(\beta) d\beta = M_A(q', q) \quad , \quad (B.5)$$

onde  $M_A(q', q)$  é dado pela eq. (5.2.6).

Consideremos por um momento a transformação de variáveis abaixo:

$$\begin{cases} \alpha \rightarrow \alpha' = \alpha/x \\ \beta \rightarrow \beta' = \beta/x \end{cases} \quad (B.6)$$

Por meio desta transformação verificamos facilmente que

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^x p \dot{q} d\alpha} \int_0^x A(\beta) d\beta &= e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \frac{dq}{x d\alpha'} x d\alpha'} \int_0^1 A(x\beta') x d\beta' = \\ &= x \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\alpha'} \int_0^1 A(\beta') d\beta' \quad ; \end{aligned} \quad (B.7)$$

utilizando este resultado concluimos que

$$\begin{aligned} \int_q^{q'} \int D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^x p \dot{q} d\alpha} \int_0^x A(\beta) d\beta &= x \cdot \int_q^{q'} \int D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\alpha} \int_0^1 A(\beta) d\beta = \\ &= x \cdot M_A(q', q) \quad , \end{aligned} \quad (B.8)$$

e portanto a quantidade

$$\int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^x \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} d\alpha} \int_0^x A(\beta) d\beta \quad (\text{B.9})$$

resulta proporcional à grandeza  $x$ . Na eq. (B.8),  $M_A(q', q)$  é dado pela eq. (B.5).

Podemos fazer uso deste resultado para estabelecer certas propriedades algébricas dos gráficos definidos nas equações (B.2) e (B.4):

1. Linearidade:

$$x \cdot \uparrow A + y \cdot \uparrow B = \uparrow (xA+yB) \quad , \quad (\text{B.10})$$

visto que

$$\begin{aligned} x \cdot \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} d\alpha} \int_0^1 A(\beta) d\beta + y \cdot \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} d\alpha} \int_0^1 B(\beta) d\beta \\ = \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} d\alpha} \int_0^1 (xA+yB) d\beta \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

2. Inversão:

$$\uparrow A = \downarrow (-A) \quad (\text{B.12})$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \overleftarrow{A} &= \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} d\alpha} \int_0^1 A(\alpha) d\alpha = \\
 &= \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} d\alpha} \left\{ - \int_1^0 A(\alpha) d\alpha \right\} = \\
 &= \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} d\alpha} \int_1^0 (-A(\alpha)) d\alpha = \overrightarrow{(-A)} \quad . \quad (B.13)
 \end{aligned}$$

### 3. Associatividade:

Para examinar esta propriedade são necessárias algumas preliminares. Consideremos, para principiar, a quantidade  $M(A,B)$  definida abaixo:

$$M(A,B) \equiv \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} d\alpha} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 A(\alpha_1) B(\alpha_2) \quad , (B.14)$$

onde  $A(\alpha_1) = A(\mathbf{q}(\alpha_1), \mathbf{p}(\alpha_1))$  e  $B(\alpha_2) = B(\mathbf{q}(\alpha_2), \mathbf{p}(\alpha_2))$ . Seguindo o procedimento que empregamos na seção 5.2 para obter a eq. (5.2.13), podemos então transformar a expressão acima da seguinte maneira:

$$M(A,B) = \int_{q_0=q}^{q_N=q'} \prod_{i=1}^{N-1} [dq_i] \dots \prod_{i=1}^N \left[ \frac{d\mathbf{p}_i}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1})} \quad .$$

$$\cdot \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^j A\left(\frac{q_j+q_{j-1}}{2}, p_j\right) \cdot B\left(\frac{q_k+q_{k-1}}{2}, p_k\right) \varepsilon^2 \quad , \quad (\text{B.15})$$

visto que, usando uma partição isométrica em N segmentos do intervalo  $[0,1]$  e a regra do ponto médio (ver eq. (5.2.10)) temos

$$\int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} A(\alpha_1) B(\alpha_2) d\alpha_2 = \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^j A\left(\frac{q_j+q_{j-1}}{2}, p_j\right) B\left(\frac{q_k+q_{k-1}}{2}, p_k\right) \varepsilon \right\} \varepsilon \quad . \quad (\text{B.16})$$

Se integramos em todos os  $p_i$  exceto num particular  $p_j$  e num particular  $p_k$ , sendo  $k < j$ , vem

$$\begin{aligned} M(A,B) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^j \left\{ \int_{q_0=q}^{q_N=q'} \dots \int \prod_i [dq_i] \dots \prod_i \left[ \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N p_i (q_i - q_{i-1})} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot A\left(\frac{q_j+q_{j-1}}{2}, p_j\right) B\left(\frac{q_k+q_{k-1}}{2}, p_k\right) \right\} \varepsilon^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^j \left\{ \int_{q_0=q}^{q_N=q'} \dots \int \prod_i [dq_i] \cdot \delta(q' - q_{N-1}) \delta(q_{N-1} - q_{N-2}) \dots \right. \\ &\quad \delta(q_{j+1} - q_j) \delta(q_{j-1} - q_{j-2}) \dots \delta(q_{k+1} - q_k) \cdot \\ &\quad \left. \cdot \delta(q_{k-1} - q_{k-2}) \dots \delta(q_2 - q_1) \delta(q_1 - q) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q_j - q_{j-1})} \cdot \int \frac{dp_k}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_k (q_k - q_{k-1})} \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\cdot A\left(\frac{q_j+q_{j-1}}{2}, p_j\right) B\left(\frac{q_k+q_{k-1}}{2}, p_k\right) \left\} \epsilon^2, \quad (\text{B.16})$$

de modo que, se agora integrarmos sobre os  $q_i$ , entre os limites propostos, temos

$$\begin{aligned} M(A, B) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^j \left\{ \int dq_{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q' - q_{j-1})} \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_k (q_{j-1} - q)} A\left(\frac{q'+q_{j-1}}{2}, p_j\right) B\left(\frac{q_{j-1}+q}{2}, p_k\right) \right\} \epsilon^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N \left\{ \int dq_{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q' - q_{j-1})} A\left(\frac{q'+q_{j-1}}{2}, p_j\right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \sum_{k=1}^j \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_k (q_{j-1} - q)} B\left(\frac{q_{j-1}+q}{2}, p_k\right) \right\} \epsilon \right\} \epsilon. \quad (\text{B.17}) \end{aligned}$$

Mas dado que a integral em  $p_k$  não irá depender de um valor  $k$  particular (ver eq. (5.2.13)), vem

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^j \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_k (q_{j-1} - q)} B\left(\frac{q_{j-1}+q}{2}, p_k\right) \right\} \epsilon = \\ &= \left( \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \int d\alpha_2 \\ 0 \end{array} \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{p}}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{p} (q_{j-1} - q)} B\left(\frac{q_{j-1}+q}{2}, \bar{p}\right) \right) = \\ &= \alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{p}}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{p} (q_{j-1} - q)} B\left(\frac{q_{j-1}+q}{2}, \bar{p}\right) ; \quad (\text{B.18}) \end{aligned}$$

do mesmo modo, como as integrações em  $p_j$  e em  $q_{j-1}$  não irão depender de um particular  $j$ , tomando  $q_{j-1} = q''$  teremos

$$\begin{aligned}
 M(A,B) &= \int_0^1 d\alpha_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dq'' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'-q'')} A\left(\frac{q'+q''}{2}, p\right) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{p}}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{p}(q''-q)} B\left(\frac{q''+q}{2}, \bar{p}\right) \right\} = \\
 &= \left( \int_0^1 d\alpha_1 \cdot \alpha_1 \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} dq'' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'-q'')} A\left(\frac{q'+q''}{2}, p\right) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{p}}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{p}(q''-q)} B\left(\frac{q''+q}{2}, \bar{p}\right) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \int dq'' M_A(q', q'') M_B(q'', q) \quad , \quad (B.19)
 \end{aligned}$$

em virtude da expressão eq. (5.2.13) para a amplitude generalizada "infinitesimal"  $M_G(q', q)$  associada a um dado gerador  $G$  (ver seção 5.2). Vemos assim que

$$\begin{aligned}
 &\int dq'' M_A(q', q'') M_B(q'', q) = 2M(A,B) = \\
 &= 2 \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\alpha} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} A(\alpha_1) B(\alpha_2) d\alpha_2 \quad . \quad (B.20)
 \end{aligned}$$

Contudo, se definimos o operador de tempo ordenado  $T[A(\alpha_1)B(\alpha_2)]$

pela relação (48)

$$T[A(\alpha_1)B(\alpha_2)] = \begin{cases} A(\alpha_1)B(\alpha_2) & , \text{ se } \alpha_2 \leq \alpha_1 \\ B(\alpha_2)A(\alpha_1) & , \text{ se } \alpha_1 \leq \alpha_2 \end{cases} \quad , \text{ (B.21)}$$

podemos observar que

$$\int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} A(\alpha_1)B(\alpha_2) d\alpha_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 T[A(\alpha_1)B(\alpha_2)] ; \text{ (B.22)}$$

de modo que teremos, afinal, a igualdade

$$\begin{aligned} & \int dq'' M_A(q', q'') M_B(q'', q) = \\ & = \int dq'' \int_{q''}^{q'} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\alpha} \int_0^1 A(\alpha) d\alpha \cdot \int_q^{q''} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] \cdot \\ & \quad \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\beta} \int_0^1 B(\beta) d\beta = \\ & = 2M(A, B) = \int_q^{q'} \int_q^1 D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\alpha} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 T[A(\alpha_2)B(\alpha_2)] . \end{aligned} \quad \text{(B.23)}$$

Esta igualdade será então expressa graficamente por

$$\int dq'' \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \vdots \\ \bullet \\ \vdots \\ \overline{\downarrow} \end{array} A(\alpha) \right]_{q''}^{q'} \times \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \vdots \\ \bullet \\ \vdots \\ \overline{\downarrow} \end{array} B(\beta) \right]_{q''}^{q'} = \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \vdots \\ \bullet \\ \vdots \\ \overline{\downarrow} \end{array} A(\alpha) \right]_{q''}^{q'} \quad \text{(B.24)}$$

Podemos agora retomar o exame da propriedade associativa de nos<sub>os</sub> diagramas, e estabelecer para ela a regra

$$\begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \cdot A \\ \cdot (B+C) \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \cdot A \\ \cdot B \\ \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \cdot A \\ \cdot C \\ \downarrow \end{array}, \quad (B.25)$$

já que da definição eq. (B.5) decorre imediatamente que

$$\int dq'' M_A(q', q'') M_{(B+C)}(q'', q) = \int dq'' M_A(q', q'') M_B(q'', q) + \int dq'' M_A(q', q'') M_C(q'', q) \quad (B.26)$$

Usando as propriedades obtidas acima, podemos expressar graficamente a associação colchete de Poisson-comutador estabelecida na seção 5.2, eq. (5.2.21), como se segue:

$$\begin{aligned} \langle q' | [\hat{G}_\mu, \hat{G}_\nu] | q \rangle &= \int dq'' \{ M_\mu(q', q'') M_\nu(q'', q) - M_\nu(q', q'') M_\mu(q'', q) \} = \\ &= \begin{array}{c} \overline{\uparrow} G_\mu \\ \cdot \\ \cdot G_\nu \\ \downarrow \end{array} - \begin{array}{c} \overline{\uparrow} G_\nu \\ \cdot \\ \cdot G_\mu \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \cdot G_\mu \\ \cdot G_\nu \\ \downarrow \end{array} = M(q', q) = \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \cdot i\hbar \{G_\mu, G_\nu\}_{PB} \\ \downarrow \end{array} \quad (B.27) \end{aligned}$$

De acordo com este resultado e com as regras eqs. (B.10), (B.12) e (B.25), obtidas anteriormente, verificamos que a álgebra destes diagramas corresponde à álgebra dos números não-comutativos <sup>(73)</sup>. Esta constatação nos permitirá expandir a amplitude de probabilidade  $K_G(q', q; \alpha)$ , eq. (5.2.1), associada a uma variação finita do parâmetro  $\alpha$ , em termos de uma série de potências destes diagramas não-comutativos, dados pela eq. (B.4)



(e que segundo a eq. (B.5) equivalem às amplitudes "infinitesimais"  $M_{\mu}(q',q)$ ); escreveremos para isso, usando a eq. (5.2.4), que

$$\begin{aligned}
 K_G(q',q;\alpha) &= K_{\alpha G}(q',q;1) = \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{\underline{q} \cdot \underline{p}}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 (\underline{p}\dot{q} - \alpha G) d\beta} = \\
 &= \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{\underline{q} \cdot \underline{p}}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 \underline{p}\dot{q} d\beta} \cdot e^{\int_0^1 (\alpha G / i\hbar) d\beta} ; \quad (B.28)
 \end{aligned}$$

expandindo  $\exp \left[ \int_0^1 (\alpha G / i\hbar) d\beta \right]$  em série, utilizando a eq. (B.24), e as propriedades dos diagramas, encontramos que a amplitude  $K_G(q',q;\alpha)$  acima pode ser expressa graficamente por

$$\begin{aligned}
 K_G(q',q;\alpha) &= \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{\underline{q} \cdot \underline{p}}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 \underline{p}\dot{q} d\beta} \cdot \left[ 1 + \int_0^1 \left( \frac{\alpha G}{i\hbar} \right) d\beta \right] + \\
 &+ \frac{1}{2!} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\alpha G}{i\hbar} \right) d\beta \cdot \int_0^1 \left( \frac{\alpha G}{i\hbar} \right) d\beta \right] + \frac{1}{3!} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\alpha G}{i\hbar} \right) d\beta \cdot \int_0^1 \left( \frac{\alpha G}{i\hbar} \right) d\beta \cdot \int_0^1 \left( \frac{\alpha G}{i\hbar} \right) d\beta \right] + \dots \Big] = \\
 &= \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{\downarrow} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \bullet \\ \alpha G / i\hbar \\ \bullet \\ \overline{\downarrow} \end{array} \right] + \frac{1}{2!} \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \bullet \\ \alpha G / i\hbar \\ \bullet \\ \alpha G / i\hbar \\ \bullet \\ \overline{\downarrow} \end{array} \right] + \frac{1}{3!} \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \bullet \\ \alpha G / i\hbar \\ \bullet \\ \alpha G / i\hbar \\ \bullet \\ \alpha G / i\hbar \\ \bullet \\ \overline{\downarrow} \end{array} \right] + \dots \Big]_{q'}^q \quad (B.29)
 \end{aligned}$$

Deste modo, podemos representar graficamente a amplitude resultante  $K_{G_1 \rightarrow G_2}(q',q;\alpha,\beta)$ , eq. (B.1), como segue:

$$K_{G_1 \rightarrow G_2}(q', q; \alpha, \beta) = \int dq'' K_{G_2}(q', q''; \beta) K_{G_1}(q'', q; \alpha) = \int dq'' \cdot$$

$$\cdot \left[ \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \frac{\beta G_2}{i\hbar} + \dots \end{array} \right]_{q''}^{q'} \times \left[ \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \frac{\alpha G_1}{i\hbar} + \dots \end{array} \right]_q^{q''} \quad (B.30)$$

Esta expressão, em virtude da analogia entre diagramas e números não-comutativos referida anteriormente, corresponde ao produto das expansões de duas exponenciais de números não-comutativos,

$$e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} = \left[ 1 + \hat{B} + \frac{1}{2!} \hat{B}^2 + \dots \right] \times \left[ 1 + \hat{A} + \frac{1}{2!} \hat{A}^2 + \dots \right] \quad , \quad (B.31)$$

bastante para isto tomarmos

$$\left[ \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \frac{\beta G_2}{i\hbar} \end{array} \right]_{q''}^{q'} = \hat{B} \quad , \quad \left[ \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \frac{\alpha G_1}{i\hbar} \end{array} \right]_q^{q''} = \hat{A} \quad . \quad (B.32)$$

Supondo que a série resultante na eq. (B.31) convirja, teremos

$$e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} = e^{\hat{C}} \quad (B.33)$$

onde  $\hat{C}$  é dado pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff eq. (A.5),

$$\hat{C} = (\hat{B} + \hat{A}) + \frac{1}{2} [\hat{B}, \hat{A}] + \frac{1}{12} [\hat{B} - \hat{A}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \dots \quad (B.34)$$

No caso do produto da eq. (B.30), portanto, teremos

$$K_{G_1 \rightarrow G_2}(q', q; \alpha, \beta) = \left\{ \int dq'' \left[ \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right]_{q''}^{q'} \times \left[ \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right]_q^{q''} + \dots \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \int dq'' \left( \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \beta G_2 \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \right]_{q''}^{q'} \times \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \hline \end{array} \right]_{q''}^{q''} + \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \hline \end{array} \right]_{q''}^{q'} \times \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \alpha G_1 \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \right]_{q''}^{q''} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \int dq'' \left( \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \beta G_2 \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \right]_{q''}^{q'} \times \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \alpha G_1 \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \right]_{q''}^{q''} - \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \alpha G_1 \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \right]_{q''}^{q'} \times \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \beta G_2 \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \right]_{q''}^{q''} \right) + \\
 & + \frac{1}{12} \int dq'' \left( \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \beta G_2 - \alpha G_1 \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \right]_{q''}^{q'} \times \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \beta G_2 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \right]_{q''}^{q''} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \beta G_2 / i\hbar \\
 & - \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \beta G_2 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \right]_{q''}^{q'} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \beta G_2 / i\hbar \right]_{q''}^{q''} \times \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \beta G_2 - \alpha G_1 \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \right]_{q''}^{q''} + \dots \right) = \\
 & = \left\{ \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \hline \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \beta G_2 + \alpha G_1 \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \right] + \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \beta G_2 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \beta G_2 / i\hbar \right) + \frac{1}{12} \left( \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \beta G_2 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \beta G_2 / i\hbar \right) - \left( \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \beta G_2 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \beta G_2 / i\hbar \right) \right. \\
 & \left. - \left( \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \alpha G_1 / i\hbar \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \beta G_2 / i\hbar \right) + \dots \right\}, \tag{B.35}
 \end{aligned}$$

e então em virtude da propriedade eq. (B.27) e da linearidade dos diagramas teremos

$$\begin{aligned}
 K_{G_1+G_2}(q', q; \alpha, \beta) & = \left\{ \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \hline \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \hline \end{array} \right] \frac{1}{i\hbar} (\beta G_2 + \alpha G_1) + \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \hline \end{array} \right] \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2} \{ \beta G_2, \alpha G_1 \}_{PB} + \\
 & + \left[ \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \hline \end{array} \right] \frac{1}{i\hbar} \left\{ \frac{1}{12} \{ (\beta G_2 - \alpha G_1), \{ \beta G_2, \alpha G_1 \}_{PB} \}_{PB} \right\} + \dots \right\}. \tag{B.36}
 \end{aligned}$$

Retornando às definições eqs. (B.2) - (B.5) e à expansão eq. (B.29), verificamos enfim que

$$\begin{aligned}
 K_{G_1 \rightarrow G_2}(q', q; \alpha, \beta) &= \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 p \dot{q} d\alpha} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^1 \bar{G} d\alpha} = \\
 &= \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 [p \dot{q} - \bar{G}] d\alpha} = K_{\bar{G}}(q', q; 1) \quad , \quad (B.37)
 \end{aligned}$$

sendo o gerador "resultante"  $\bar{G}$  dado por

$$\bar{G} = \left\{ (\beta G_2 + \alpha G_1) + \frac{1}{2} \{ \beta G_2, \alpha G_1 \}_{PB} + \frac{1}{12} \{ (\beta G_2 - \alpha G_1), \{ \beta G_2, \alpha G_1 \}_{PB} \}_{PB^+} \right\} \quad (B.38)$$

Temos então, como queríamos, o resultado eq. (5.3.4),

$$\begin{aligned}
 \int dq'' \int_{q''}^q D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^\beta [p \dot{q} - G_2] d\beta} \cdot \int_q^{q''} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^\alpha [p \dot{q} - G_1] d\alpha} = \\
 = \int_q^{q'} D^2 \left[ \frac{q \cdot p}{2\pi\hbar} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^1 [p \dot{q} - \bar{G}] d\alpha} \quad . \quad (B.39)
 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

- (1). V. VOLTERRA, "Theory of Functionals and of Integral and Integrodifferential Equations" (Blackie and Son, London and Glasgow, 1930).
- (2). A.N. KOLMOGOROV y S.V. FOMÍN, "Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional" (MIR, Moscou, 1972).
- (3). P.J. DANIELL, "A General Form of Functional Integrals in an Infinite Number of Dimensions", *Ann. Math.* 20, 1 (1918).
- (4). N. WIENER, (a) "Differential Space", *J. Math. and Phys.* 2, 131-174 (1923).  
(b) "The Average Value of a Functional", *Proc. London Math. Soc. Ser. 2*, 22, Nº 6, 454-467 (1927).  
(c) "Generalized Harmonic Analysis", *Acta Math.* 55, 117-258 (1930).
- (5). S. CHANDRASEKHAR, "Stochastic Problems in Physics and Astronomy", *Rev. Mod. Phys.* 15, 1 (1943).
- (6). R.H. CAMERON and W.T. MARTIN, (a) "Transformations of Wiener Integrals under Translations", *Ann. Math.* 45, Nº 2, 386-396 (1944).  
(b) "Transformations of Wiener Integrals under a General Class of Linear Transformations", *Trans. Am. Math. Soc.* 58, Nº 2, 184-219 (1945).  
(c) "Evaluation of Various Wiener Integrals by Use of Certain Sturm-Liouville Differential Equations", *Bull. Am. Math. Soc.* 51, Nº 2, 73-90 (1945).  
(d) "Transformations of Wiener Integrals by Non-linear Transformations", *Trans. Am. Math. Soc.* 66, Nº 2, 253-283 (1949).
- (7). J. KIRKWOOD, "Quantum Statistics of Almost Classical Assemblies", *Phys. Rev.* 44, 31 (1933).

- (8). R.P. FEYNMAN, "The Principle of Least Action in Quantum Mechanics", Ph.D.Thesis, Princeton University (1942).
- (9). R.P. FEYNMAN, "Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics", Rev. Mod. Phys. 20, N<sup>o</sup> 2, 367 (1948).
- (10). P.A.M. DIRAC, "Selected Papers on Quantum Electrodynamics", (Ed.: J. Schwinger, Dover Publ. Inc., N.Y., 1958).
- (11). R.P. FEYNMAN, (a) "Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction" , Phys.Rev. 80, 440-457 (1950).  
(b) "An Operator Calculus Having Applications in Quantum Electrodynamics", Phys. Rev. 84, 108-128 (1951).  
(c) "Atomic Theory of the  $\lambda$  Transition in Helium", Phys.Rev. 91,1291-1301 (1953).  
(d) "Atomic Theory of Liquid Helium Near Absolute Zero", Phys. Rev. 91, 1301-1308 , (1953).  
(e) "Slow Electrons in a Polar Crystal",Phys. Rev. 97, 660-665 (1955).
- (12). M. KAC, (a) "On Distributions of Certain Wiener Functionals", Trans.Am. Math.Soc.65,N<sup>o</sup>1,1-13(1949).  
(b) "On Some Connections Between Probability Theory and Differential and Integral Equations" , Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. and Probab., Berkeley, 189-215 (1951).
- (13). S.F. EDWARDS and R.E. PEIERLS, "Field Equations in Functional Form", Proc.Roy.Soc.London,A224,N<sup>o</sup> 1156,24-33(1954).
- (14). I.M. GELFAND and R.A. MINLOS, "The Solution of the Equations of Quantized Fields", DAN U.S.S.R. 97, N<sup>o</sup> 2 , 209-212 (1954).
- (15). J.TARSKI, "Lectures in Theoretical Physics X-A", 443 (Eds.: A.O. Barut and W.E. Brittin, Gordon and Breach Inc., N.Y., 1968).

- (16). I.M. GELFAND and A.M. YAGLOM, "Integration in Functional Spaces and its Applications in Quantum Physics", J. Math. Phys. 1, N<sup>o</sup> 1, 48 (1960).
- (17). E. HOPF, "Statistical Hydromechanics and Functional Calculus", J.Mech. and Rat. Anal. 1, N<sup>o</sup> 1, 87-123(1952).
- (18). W.E. BRITTIN and W.R. CHAPPELL, "Lectures in Theoretical Physics VIII-A", 101 (Univ. Colorado Press, Boulder, 1965).
- (19). N.N. BOGOLIUBOV, "Studies in Statistical Mechanics", 1, 1 (Eds.: J. de Boer and G.E. Uhlenbeck, North-Holland Pu. Co., Amsterdam, 1962).
- (20). I. HOSOKAWA, "Functional Approach to Classical Non-Equilibrium Statistical Mechanics", J. Math. Phys. 8, 221 (1967).
- (21). S.F. EDWARDS, "The Statistical Mechanics of Polymers with Excluded Volumes", Proc.Phys.Soc. 85, 613(1965).
- (22). K.K. THORNER and R.P. FEYNMAN, "Velocity Acquired by an Electron in a Finite Electric Field in a Polar Crystal", Phys.Rev. B 1, 4099 (1970).
- (23). S.F. EDWARDS and Y.V. GULIAEV, "Path Integrals in Polar Co-ordinates", Proc. Roy. Soc. London 279 A,229(1964).
- (24). W. LANGGUTH and A. INOMATA, "Remarks on the Hamiltonian Path Integral in Polar Coordinates", J.Math. Phys. 20 N<sup>o</sup> 3, 499 (1979).
- (25). I.H. DURU and H. KLEINERT, "Solution of the Path Integrals for the H-Atom", Phys.Lett. 84 B, N<sup>o</sup> 2, 185 (1979).
- (26). R.P. FEYNMAN and A.R. HIBBS, "Quantum Mechanics and Path Integrals" (McGraw-Hill, N.Y. 1965).
- (27). L.SCHULMAN, "A Path Integral for Spin", Phys. Rev. 176 , N<sup>o</sup> 5, 1558 (1968).

- (28). J.R. KLAUDER, "The Action Option and a Feynman Quantization of Spinor Fields in Terms of Ordinary C-Numbers", Ann. Phys. 11, 123 (1960).
- (29). F. BORDI and R. CASALBUONI, "Dirac Propagator from Path Integral Quantization of the Pseudoclassical Spinning Particle", Preprint, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Florence, Italy (April 1980).
- (30). J.W. NEGELS, "Nuclear Dynamics Beyond the Time Dependent Hartree-Fock Approximation", Reprint CTP ~~7~~ 768, MIT (1979).
- (31). H. KLEINERT and H. REINHARDT, "Semiclassical Approach to Large Amplitude Collective Nuclear Excitations", Preprint FU Berlin (1979).
- (32). W.M. MILLER, (a) "Classical Limit Green's Function (Fixed-Energy Propagator) and Classical Quantization of Nonseparable Systems", J. Chem. Phys. 56, 38 (1972).  
(b) "Classical-Limit Quantum Mechanics and the Theory of Molecular Collisions", Adv. Chem. Phys. 25, 69 (1974).  
(c) "Semiclassical Limit of Quantum Mechanics Transition State Theory for Nonseparable Systems", J. Chem. Phys. 62, 1899 (1975).
- (33). C. De WITT-MORETTE, A. MAHESHWART and B. NELSON, "Path Integration in Non-Relativistic Quantum Mechanics", Phys. Rep. 50, No 5, 255-372 (1979).
- (34). B. SIMON, "Functional Integration and Quantum Physics", (Academic Press, N.Y., 1979).
- (35). S.A. ALBEVERIO and R.J. HØEGH-KRØHN, (a) "Mathematical Theory of Feynman Path Integrals", Lecture Notes in Mathematics, No 523, Springer-Verlag (1976).  
(b) "Feynman Path Integrals and the Corresponding Method of Stationary Phase", Preprint 78/P.1006, Marseille (1978).



- (36). T. MIURA, "Relativistic Path Integrals", Prog. Theor. Phys. 61, N<sup>o</sup> 5, 1521 (1979).
- (37). U. DEININGHAUS and R. GRAHAM, "Nonlinear Point Transformations and Covariant Interpretation of Path Integrals", Z. Physik B 34, 211-219 (1979).
- (38). R. RAJARAMAN, "Some Non-Perturbative Semi-Classical Methods in Quantum Field Theory", Phys. Rep. 21C, 227(1975).
- (39). G.J. PAPADOPOULOS and J.T. DEVREESE, Eds. "Path Integrals and their Applications in Quantum, Statistical, and Solid-State Physics" (Plenum, N.Y., 1978).
- (40). L.D. FADEEV, "Introduction to the Functional Methods", in 'Methods in Field Theory', R. Balian and J. Zinn-Justin, Eds., Les Houches Lectures, Session XXVIII (1975).
- (41). V.N. POPOV, "Functional Integrals in Quantum Field Theory", Reprint TH.2424-CERN(1977).
- (42). H. KLEINERT, "Collective Quantum Fields", Forts. d. Physik 26, 565-671 (1978).
- (43). P. SENJANOVIC, "Path Integral Quantization of Field Theories with Second-Class Constraints", Ann. Phys. 100, 227-261 (1976).
- (44). P.A. HORVÁTHY, "Quantization in Multiply Connected Spaces", Preprint 79/P.1145 Marseille(1979).
- (45). J.B. HARTLE and S.W. HAWKING, "Path Integral Derivation of Black Hole Radiance", Phys. Rev. D 13, N<sup>o</sup>8, 2188(1976).
- (46). F. REIF, "Fundamentals of Statistical and Thermal Physics" (McGraw-Hill/Kogakusha, N.Y./Tokyo, 1965).
- (47). G.J. PAPADOPOULOS, "Path Integrals in Quantum and Statistical Physics", in Ref. (39).
- (48). E. MERZBACHER, "Quantum Mechanics", 2<sup>nd</sup> Ed. (Wiley, N.Y., 1970).

- (49). C. MORETTE DEWITT, "L'Integrale Fonctionnelle de Feynman" ,  
Ann.Inst. H. Poincaré 11, 153-206 (1969).
- (50). C. MORETTE DEWITT, "Feynman's Path Integral-Definition Without Limiting Procedure", Comm. Math. Phys. 28, 47 -  
- 67 (1972).
- (51). E.S. ABERS and B.W. LEE, "Gauge Theories", Phys. Rep. 9 C,  
1-141 (1973).
- (52). C. GARROD, "Hamiltonian Path Integral Methods", Rev. Mod.  
Phys. 38, 483-494 (1966).
- (53). J. McL. EMERSON, "Symmetry Principles in Particle Physics"  
(Clarendon Press, Oxford, 1972).
- (54). D.B. LICHTENBERG, "Unitary Symmetry and Elementary Particles"  
(Academic Press, N.Y., 1970).
- (55). L. FONDA and G.C. GUIRARDI, "Symmetry Principles in Quantum Physics"  
(Marcel Dekker Inc., N.Y., 1970).
- (56). P.A.M. DIRAC, "Lectures on Quantum Mechanics" (Yeshiva University,  
N.Y., 1964).
- (57). H.GOLDSTEIN, "Classical Mechanics" (Addison-Wesley, Reading,  
Mass., 1972).
- (58). E.C.G. SUDARSHAN and N. MUKUNDA, "Classical Dynamics: A Modern Perspective"  
(Wiley, N.Y., 1974).
- (59). R. HERMANN, "Lie Groups for Physicists" (Benjamin/Cummings,  
Reading, Mass., 1966).
- (60). H. WEYL, "The Theory of Groups and Quantum Mechanics" (Dover  
N.Y., 1950).
- (61). L. CASTELLANI, "On Canonical Transformations and Quantization Rules",  
N.Cim. 50 A, N° 2, 209 (1979).
- (62). W.B. CAMPBELL, P. FINKLER, C.E. JONES, and M.N. MISHELOFF,  
"Path Integrals with Arbitrary Generators and the Eigenfunction Problem",  
Ann.Phys.96, 286-302 (1976).

- (63). P. DENNERY and A. KRZYWICKI, "Mathematics for Physicists" (Harper Int. Ed., N.Y., 1967).
- (64). M.S. MARINOV and M.V. TEREPTYEV, "Dynamics on the Group Manifolds and Path Integrals", Preprint ITP-46, Moscow (1979).
- (65). C.G. BOLLINI, "Teoria Quântica dos Campos", Notas de Aula, CBPF/CNPq (1979).
- (66). P.A.M. DIRAC, "The Principles of Quantum Mechanics", 4<sup>th</sup> Ed. (Clarendon Press, Oxford, 1958).
- (67). L. CASTELLANI, "Quantization Rules and Dirac Correspondence", N.Cim. 48 A, N<sup>o</sup> 3, 359 (1978).
- (68). B.L. van der WAERDEN, "Group Theory and Quantum Mechanics" (Springer-Verlag, Berlin, 1974).
- (69). T.F. JORDAN and E.C.G. SUDARSHAN, "Lie Group Dynamical Formalism and the Relation Between Quantum Mechanics and Classical Mechanics", Rev. Mod. Phys. 33, N<sup>o</sup> 4, 516 (1961).
- (70). L. COHEN, "Generalized Phase-Space Distribution Functions", J. Math. Phys. 7, N<sup>o</sup> 5, 781 (1966).
- (71). W.E. BRITTIN and W.R. CHAPPELL, "The Wigner Distribution Function and Second Quantization in Phase Space", Rev. Mod. Phys. 34, N<sup>o</sup> 4, 620 (1962).
- (72). R.P. FEYNMAN, "Quantum Electrodynamics" (Benjamin, N.Y., 1973).
- (73). V.P. MASLOV, "Operational Methods" (MIR, Moscow, 1976).
- (74). R. GILMORE, "Lie Groups, Lie Algebras and Some of their Applications" (Wiley/Interscience, N.Y., 1974).

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



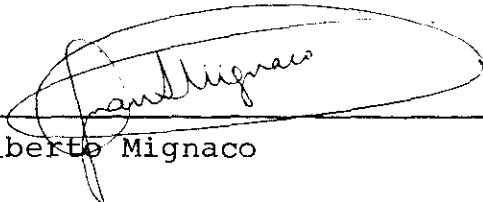
---

Takeshi Kodama - Presidente



---

Carlos Marcio do Amaral



---

Juan Alberto Mignaco

Rio de Janeiro, 17 de fevereiro de 1981