JOSÉ DUARTE DE OLIVEIRA

AS IDENTIDADES DUAIS DO TENSOR DE WEYL

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Rio de Janeiro
- 1980 -

Ā memória do saudoso amigo e mestre
Pe. David Augusto Moreira —
eu dedico este trabalho.

Agradecimentos

Ao Professor Mario Novello, pela sua orientação e pelo seu estímulo.

A minha Mãe e aos meus irmãos, Luizinho e Dassa, pelo apoio em muitos momentos difíceis.

A todos aqueles amigos e colegas que, de alguma forma, contribuíram para o êxito deste trabalho.

A Zé Gordo, da Xerox, e ao Baiano, da Biblioteca, pela solicitude de sempre.

A Helena, pelo excelente trabalho de datilografia.

Ao PICD, pelo financiamento de parte deste trabalho.

Ao CNPq, pela bolsa concedida.

RESUMO

Considerada com a devida precaução, a semelhança existente entre certos aspectos formais da Teoria da Gravitação de Einstein (TGE) e da Teoria Eletromagnética de Maxwell (TEM) pode desempenhar importante papel heurístico no desenvolvimento da primeira destas teorias.

É sabido que o campo eletromagnético possui apenas dois invariantes, sendo ambos de segunda ordem no tensor eletromagnético ($F^{\alpha\beta}$) e no seu dual ($\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$). Ademais, a cada um desses invariantes corresponde uma identidade dual, também de segunda ordem nesses dois tensores.

O campo gravitacional no vazio, por sua vez, possui quatro invariantes, sendo dois de segunda ordem no tensor de Weyl ($W^{\alpha\beta\rho\sigma}$) e no seu dual ($\overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\rho\sigma}$) e dois de terceira ordem nestes tensores. Deve-se esperar, por analogia ao que acontece na TEM, que existam, correspondentemente, quatro identidades duais envolvendo o tensor ($W^{\alpha\beta\rho\sigma}$) e o seu dual ($\overset{*}{W}{}^{\alpha\beta\rho\sigma}$), duas das quais são de segunda ordem e as outras duas de terceira.

Neste trabalho mostra-se como essas identidades duais podem ser encontradas e dão-se exemplos da ampla aplicação que elas podem ter na TGE.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

ALGUNS ASPECTOS FORMAIS DO ELETROMAGNETISMO

1.1 - *Introdução*

Este trabalho apoia-se fortemente na analogia formal existente entre a Teoria da Gravitação de Einstein e a Teoria Eletromagnética de Maxwell. Consideramos aconselhável, portanto, incluir aqui um capítulo dedicado à formulação covariante — no sentido de Lorentz — dos fundamentos desta última teoria, procurando evidenciar aqueles seus aspectos matemáticos que tenham uma relação direta com as coisas aqui estudadas. A última seção (do capítulo) está dedicada ao enunciado de algumas noções relacionadas com o tensor de Weyl, em termos do qual podem ser escritas as equações de Einstein para o campo gravitacional na ausência de quaisquer fontes. No capítulo em geral são evitadas as demonstrações; estando elas ausentes totalmente na última de suas seis seções.

1.2 - *A Forma Tridimensional do Eletromagnetismo*

A teoria do campo eletromagnético é usualmente exposta do ponto de vista de um observador O que utiliza seu próprio referencial inercial de repouso Σ. O campo eletromagnético este observador o descreve através de dois campos vetoriais:

o campo elétrico $\vec{E}(\vec{x},t)$ e o campo magnético $\vec{H}(\vec{x},t)$. As fontes destes campos são descritas pela densidade de cargas elétricas $\rho(\vec{x},t)$ e pela densidade de corrente elétrica $\vec{j}(\vec{x},t)$. Entre ambas estas grandezas existe a relação

$$\vec{j} = \rho\vec{v} \quad , \tag{1.2.1}$$

onde $\vec{v}(\vec{x},t)$ é o campo das velocidades das cargas elétricas em relação ao referencial inercial Σ. Em todas as funções acima $\vec{x}$ é o raio-vetor de um ponto genérico do espaço de repouso do observador 0 e t é um instante arbitrário de seu tempo próprio. As leis que governam a dinâmica do campo eletromagnético são descritas pelas equações de Maxwell-Lorentz. Estas são equações diferenciais em derivadas parciais lineares de primeira ordem, que determinam os campos elétrico $\vec{E}(\vec{x},t)$ e magnético $\vec{H}(\vec{x},t)$ para uma dada distribuição de cargas e correntes. Escritas pelo observador 0 no sistema próprio de coordenadas cartesianas Σ, elas são as seguintes:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \tag{1.2.2a}$$

$$\nabla\times\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{1.2.2b}$$

$$\nabla\cdot\vec{H} = 0 \tag{1.2.2c}$$

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0 \tag{1.2.2d}$$

As duas primeiras destas equações permitem deduzir a equação da continuidade da corrente elétrica ou, equivalentemente, da conservação da carga elétrica, qual seja

$$\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad . \tag{1.2.3}$$

Devido ao caráter linear das equações (1.2.2), a equação do movimento de uma partícula teste no campo eletromagnético deve ser dada independentemente delas. A experiência confirma a validade da segunda lei de Newton

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \qquad (1.2.4)$$

onde $\underline{m}$ é a massa inercial da carga elétrica $\underline{e}$ contida no interior de um volume suficientemente pequeno do espaço de repouso do observador 0. A força eletromagnética total que atua sobre tal carga é dada pela fórmula de Lorentz

$$\vec{F} = e\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H}\right\} \qquad (1.2.5)$$

obtida através da integração da densidade da força de Lorentz

$$\vec{f} = \rho\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H}\right\} \qquad (1.2.6)$$

sobre o referido volume.

O sistema de Maxwell-Lorentz (1.2.2) é constituído de oito equações relacionando as diversas componentes do campo elétrico e do campo magnético. Ele é, portanto, um sistema acoplado de equações diferenciais. Com a finalidade de desacoplá-lo devemos considerar que a equação (1.2.2c), que é sempre válida, permite definir o campo magnético $\vec{H}(\vec{x},t)$ como o rotacional de outro campo vetorial $\vec{A}(\vec{x},t)$, chamado de potencial vetorial do campo eletromagnético, isto é,

$$\vec{H} = \nabla\times\vec{A} \quad . \qquad (1.2.7)$$

Neste caso a outra equação homogênea (1.2.2d) fica escrita na seguinte forma.

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

O campo vetorial dentro dos parênteses pode ser definido, portanto, como o gradiente de um campo escalar $\phi(\vec{x},t)$, denominado de potencial escalar do campo eletromagnético. Neste caso o campo elétrico $\vec{E}(\vec{x},t)$ fica definido em termos dos dois campos potenciais assim:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (1.2.8)$$

As leis que governam a dinâmica desses potenciais são descritas pelas duas equações não-homogêneas (1.2.2a) e (1.2.2b). Substituindo nelas o campo magnético $\vec{H}(\vec{x},t)$ por sua definição (1.2.7) e o campo elétrico $\vec{E}(\vec{x},t)$ por sua definição (1.2.8) e lembrando a identidade diferencial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\nabla^2\vec{A} + \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) \quad ,$$

encontramos que aquelas duas equações ficam escritas nas formas seguintes:

$$\nabla^2\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = -4\pi\rho \qquad (1.2.9a)$$

e

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla(\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (1.2.9b)$$

Posto que o gradiente de todo campo escalar é um campo vetorial não solenoidal, o campo potencial vetorial $\vec{A}(\vec{x},t)$ não é determinado completamente pelo campo magnético $\vec{H}(\vec{x},t)$. Assim, pela definição (1.2.7), este último campo é invariante sob transformações do tipo

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi(\vec{x},t) \quad . \tag{1.2.10a}$$

Para que o campo elétrico $\vec{E}(\vec{x},t)$ permaneça também o mesmo, o potencial escalar $\phi(\vec{x},t)$ deve, segundo a definição (1.2.8), ser transformado simultaneamente pela regra

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\,\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} \tag{1.2.10b}$$

A liberdade na escolha dos campos potenciais, que as transformações acima asseguram, permite simplificar as equações (1.2.9). Se $\phi'(\vec{x},t)$ e $\vec{A}'(\vec{x},t)$ representam dois valores possíveis para os campos potenciais, o campo escalar $\psi(\vec{x},t)$, satisfazendo à equação

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \nabla\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\phi'}{\partial t} \quad , \tag{1.2.11}$$

torna possível definir os campos potenciais $\phi(\vec{x},t)$ e $\vec{A}(\vec{x},t)$ através das transformações (1.2.10) de maneira que o termo entre parênteses na equação (1.2.9b) se anule, isto é,

$$\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{1.2.12}$$

Esta equação representa uma relação entre os campos potenciais e é denominada de condição de Lorentz. Ela permite desacoplar as equações do sistema (1.2.9), que agora é escrito assim:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \qquad (1.2.13a)$$

e

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (1.2.13b)$$

Desta forma, os campos potencial escalar $\phi(\vec{x},t)$ e potencial vetorial $\vec{A}(\vec{x},t)$ satisfazem a equações de ondas não homogêneas; suas fontes são respectivamente a densidade de carga elétrica $\rho(\vec{x},t)$ e a densidade de corrente elétrica $\vec{j}(\vec{x},t)$ Os campos potenciais estão acoplados unicamente pela condição de Lorentz (1.2.12).

O conjunto das equações (1.2.13) e desta condição é completamente equivalente ao sistema (1.2.2) das equações de Maxwell-Lorentz, mas não é suficiente para determinar os campos potencial escalar $\phi(\vec{x},t)$ e potencial vetorial $\vec{A}(\vec{x},t)$ univocamente. Deve ainda ser efetuada uma transformação (1.2.10) tal, que a condição de Lorentz permaneça válida. Da equação (1.2.11) concluímos que, para tanto, a função escalar $\psi(\vec{x},t)$ deve satisfazer à equação homogênea da onda

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0\ . \qquad (1.2.14)$$

As transformações (1.2.10) são chamadas de transformações de calibre e a invariância dos campos elétrico e magnético sob elas é chamada de invariância de calibre. Todos os potenciais pertencentes à classe restrita dos que satisfazem à condição de Lo -

rentz (1.2.12) são ditos pertencentes ao calibre de Lorentz. Este calibre é definido pelas transformações (1.2.10) e pela equação (1.2.14).

De um ponto de vista filosófico o campo eletromagnético é tão material quanto os demais corpos que constituem a Natureza. Como estes, portanto, possui energia e impulso. As distribuições da energia e do impulso eletromagnéticos no espaço de repouso e no tempo próprio do observador O que estamos considerando são descritas por funções quadráticas nos campos elétrico e magnético. A dedução de tais funções é feita a partir exclusivamente das equações de Maxwell-Lorentz (1.2.2) e da lei da densidade da força eletromagnética de Lorentz (1.2.6). Limitar-nos-emos, aqui, em transcrever essas funções evitando deduzí-las explicitamente.

A primeira delas é aquela que descreve a distribuição espacial e temporal da densidade de energia eletromagnética. Representando-a por $\omega(\vec{x},t)$, sua definição é a seguinte:

$$\omega(\vec{x},t) = \frac{1}{8\pi}\,(E^2 + H^2)\ . \qquad (1.2.15)$$

Esta, como vemos, é uma grandeza positivamente definida. Quanto à densidade do fluxo de energia eletromagnética, sua distribuição, no espaço e no tempo, é descrita pela função vetorial

$$\vec{S}(\vec{x},t) = \frac{c}{4\pi}\,(\vec{E} \times \vec{H})\ , \qquad (1.2.16)$$

denominada de campo dos vetores de Poynting. O campo vetorial

$$\vec{g}(\vec{x},t) = \frac{\vec{S}(\vec{x},t)}{c} = \frac{1}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H}) \qquad (1.2.17)$$

descreve como a densidade de impulso eletromagnético está distribuída no espaço e no tempo. Finalmente, as grandezas

$$T_{ij}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi}\left[-(E_iE_j + H_iH_j) + \frac{1}{2}(E^2 + H^2)\delta_{ij}\right] \qquad (1.2.18)$$

descrevem a distribuição espacial e temporal da densidade de fluxo de impulso eletromagnético ou, equivalentemente, da pressão eletromagnética. Estas grandezas constituem um tensor em relação ao grupo das rotações próprias do sistema de coordenadas cartesianas no espaço de repouso do observador. O tensor $T_{ij}(\vec{x}, t)$ é chamado de <u>tensor das tensões</u> de Maxwell.

1.3 - *A Forma Covariante do Eletromagnetismo*

Antes do advento da Teoria da Relatividade os fenômenos eletromagnéticos, entre os quais os luminosos, eram interpretados como sendo a manifestação das propriedades elásticas de um meio muito específico que enchia todo o Universo, permeava todos os seus corpos e repousava em relação ao "espaço absoluto". Tal meio era chamado de "éter imóvel" e era tido como constituindo o único sistema de referência em relação ao qual aqueles fenômenos podiam ser estudados. A teoria de Maxwell, cujos fundamentos foram expostos na seção anterior, era tida como sendo válida apenas neste sistema de referência, em flagrante oposição à teoria de Newton para os fenômenos mecânicos, que já nascera fir memente assentada em um princípio da relatividade. Tal princípio assegurava a esta última teoria plena validade em todos aqueles sistemas de referência nos quais se verificasse a lei da inércia de Galileo, isto é, nos sistemas de referência inerciais. O princípio da relatividade de Galileo negava, portanto, toda objetividade ao conceito de "éter imóvel", pelo menos no que dizia respeito aos fenômenos mecânicos.

A revolução de Einstein consistiu, precisamente, em ter descoberto que "a eletrodinâmica de Maxwell, em sua forma atual, conduz, quando aplicada aos corpos em movimento, a uma assimetria que, pelo visto, não é inerente aos próprios fenômenos"(1). A lei da indução de Faraday, por exemplo, só depende do movimento relativo do ímã e da bobina, o que sugere o abandono da noção de "éter imóvel" como supérflua e desnecessária à descrição dos fenômenos eletromagnéticos. O passo seguinte consistiu em reconhecer que a teoria de Maxwell, tal como a teoria de Newton, é igualmente válida em todos os sistemas de referência inerciais e o maior mérito de Einstein foi ter reconhecido que este é um fato da Natureza e não uma invenção dos homens. Einstein o chamou de Princípio da Relatividade e hoje ele leva o seu nome. O Princípio da Relatividade de Einstein diz respeito à invariância das leis físicas com relação à passagem de um sistema de referência inercial a outro e não deve ser cunfundido com a exigência lógica da covariância das equações que descrevem essas leis com relação à passagem, no espaço-tempo, de um sistema de coordenadas lorentzianas a outro. Covariância mais geral do que a de Lorentz existe, mas não existe princípio da relatividade mais geral do que o de Einstein.

Consideremos agora os fundamentos da eletrodinâmica de Maxwell, que foram desenvolvidos na seção anterior, e procuremos escrevê-los em uma linguagem matemática covariante em relação ao grupo das transformações de Lorentz. Tal linguagem, como sabemos, é aquela da álgebra e da análise tensoriais no espaço-tempo pseudo-euclidiano. Este é um contínuo quadridimensional cujos pontos são chamados de eventos e cuja geometria é completamente caracterizada, em cada sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^\alpha\}$, pela forma diferencial quadrática

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \ , \qquad (1.3.1)$$

onde o tensor métrico $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag.}\ (+1,-1,-1,-1)$. Portanto,

$$\eta \equiv \det\ (\eta_{\alpha\beta}) = -1 \qquad (1.3.2)$$

e a forma quadrática acima é definida negativamente.

Suponhamos que o sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^\alpha\}$ representa, no espaço-tempo pseudo-euclidiano, o referencial inercial Σ de repouso do observador O da seção anterior. Então a linha de universo de uma partícula cujo movimento é estudado em relação a Σ é descrito pela equação paramétrica

$$x^\alpha = x^\alpha(s) \qquad (1.3.3)$$

no sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$. Aqui, o parâmetro $\underline{s}$ é o tempo próprio da partícula, que é calculado integrando (1.3.1) ao longo de sua linha de universo. Uma vez conhecida a equação acima, a cada evento da linha de universo pode ser associado o quadrivetor velocidade da partícula

$$u^{\alpha} \equiv \frac{dx^{\alpha}}{ds} \tag{1.3.4}$$

Aqui, obviamente, estamos considerando apenas aquelas partículas que têm massa de repouso diferente de zero, pois somente estas possuem linhas de universo do tipo-tempo ($ds^2 > 0$). As quadrivelocidades de tais partículas são, portanto, unitárias, isto é,

$$u^{\alpha}u_{\alpha} = 1 \quad . \tag{1.3.5}$$

A quadrivelocidade de uma partícula que se movimenta com velocidade $\vec{v}$ em relação ao sistema de referência inercial Σ tem, obviamente no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^{\alpha}\}$, componentes

$$u^{\alpha} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \; , \; \frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \tag{1.3.6}$$

No referencial inercial $\bar{\Sigma}$ de repouso instantâneo da partícula, sua velocidade é igual a zero. Portanto, no sistema de coordenadas lorentzianas $\{\bar{x}^{\alpha}\}$, que representa este referencial inercial no espaço-tempo pseudo-euclidiano, as componentes da quadrivelocidade da partícula são

$$\bar{u}^{\alpha} = \delta^{\alpha}{}_{0} \tag{1.3.7}$$

onde o símbolo de Kronecker tem componentes

$$\delta^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{cases} 1 \,, & \text{se} \quad \alpha = \beta \\ 0 \,, & \text{se} \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

em todo sistema de coordenadas lorentzianas.

Consideremos, novamente, a distribuição de cargas e correntes elétricas introduzida no início da seção anterior. Como sabemos, ela é descrita, no referencial inercial Σ de repouso do observador O, pelas funções densidade de cargas $\rho(\vec{x},t)$ e densidade de corrente $\vec{j}(\vec{x},t)$. Tomemos um ponto genérico $\vec{x}$ do expaço de repouso do observador O e um instante qualquer t de seu tempo próprio. Neste ponto e neste instante o elemento de carga elétrica de $= \rho(\vec{x},t)dV$ se movimenta em relação a Σ com velocidade $\vec{v}(\vec{x},t)$. No seu referencial inercial $\overline{\Sigma}$ de repouso instantâneo este elemento de carga elétrica tem densidade própria ρ_0 e volume próprio dV_0, de maneira que de $= \rho_0 dV_0$. Como, de acordo com um teorema da Teoria da Relatividade, o volume dV, medido no referencial inercial Σ, é apenas a fração $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ do volume próprio dV_0, concluímos que entre as respectivas densidades existe a relação

$$\rho(\vec{x},t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (1.3.9)$$

Ainda segundo a Teoria da Relatividade, a massa inercial $\underline{m}$ do elemento (de) de carga elétrica, medida no referencial Σ, e sua massa inercial de repouso $\underline{m_0}$, obviamente medida em $\overline{\Sigma}$, estão relacionadas da mesma forma que as densidades de cargas; isto é,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (1.3.10)$$

A quadrivelocidade da partícula material de massa de repouso m_0 e de carga elétrica (de) tem componentes (1.3.6) no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^\alpha\}$ e componentes (1.3.7) no sistema de coordenadas lorentzianas próprias $\{\bar{x}^\alpha\}$.

Dito isto, consideremos as equações (1.2.13) para os potenciais. Introduzindo a definição (1.2.1) da função densidade de corrente elétrica $\vec{j}(\vec{x},t)$ na segunda dessas equações e substituindo, em seguida, a função densidade de cargas elétricas $\rho(\vec{x},t)$ pela expressão (1.3.9), obtemos, após apropriada arrumação dos termos das equações, que

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi(\vec{x},t) = -\frac{4\pi}{c}\rho_0 c \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (1.3.11a)$$

e

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{A}(\vec{x},t) = -\frac{4\pi}{c}\rho_0 c \frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (1.3.11b)$$

Definamos, agora, as seguintes grandezas no espaço-tempo pseudo-euclidiano relacionado ao sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^\alpha\}$: o campo dos quadrivetores potencial eletromagnético

$$A^\alpha = (\phi,\vec{A}) \qquad (1.3.12)$$

e o campo dos quadrivetores densidade de corrente elétrica

$$j^\alpha = \rho_0 c u^\alpha \qquad (1.3.13)$$

Aqui, u^α é o campo das quadrivelocidades das cargas elétricas da distribuição, cujas componentes no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^\alpha\}$ são aquelas dadas em (1.3.6) Em termos dessas grandezas o sistema de equações (1.3.11) fica escrito na seguinte forma quadridimensional:

$$\Box A^\alpha = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha . \qquad (1.3.14)$$

Aqui, o operador

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (1.3.15)$$

é chamado de d'alembertiano. Ele é invariante com respeito ao grupo de Lorentz e sua forma no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^\alpha\}$ é

$$\Box \equiv -\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \qquad (1.3.16)$$

onde $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag.}(+1,-1,-1,-1)$.

A equação (1.3.14) sozinha não é suficiente, como sabemos, para determinar univocamente o campo quadripotencial eletromagnético $A^\alpha(x^\beta)$. São necessários, ademais, a equação que define a condição de Lorentz e o calibre que deixa esta condição invariante, isto é, o calibre de Lorentz.

A condição de Lorentz para $A^\alpha(x^\beta)$ é facilmente encontrada da condição "tridimensional" (1.2.12) escrita no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^\alpha\}$, o que se consegue substituindo (1.3.12) naquela condição. Portanto,

$$\Lambda^{\alpha}{}_{|\alpha} = 0 \qquad (1.3.17)$$

onde o símbolo $(|\alpha)$ significa derivada parcial em relação à coordenada x^{α}. Quanto às transformações (1.2.10) de calibre, elas são escritas, no mesmo sistema de coordenadas $\{x^{\alpha}\}$, na forma unificada seguinte:

$$A^{\alpha} \to A'^{\alpha} = A^{\alpha} + \eta^{\alpha\beta}\, \psi_{|\beta} \qquad (1.3.18)$$

No calibre de Lorentz a função escalar $\psi(x^{\alpha})$ deve satisfazer à equação de onda homogênea (1.2.14), ou seja,

$$\Box\, \psi(x^{\alpha}) = 0 \ , \qquad (1.3.19)$$

onde usamos a convenção (1.3.15).

O campo eletromagnético, como entidade física independente de todo observador, deve ser representado por uma grandeza matemática tensorial que, em nosso caso, estará definida no espaço-tempo pseudo-euclidiano. Calculadas no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^{\alpha}\}$, as componentes do tensor campo eletromagnético devem ser as mesmas componentes daqueles campos vetoriais elétrico $\vec{E}(\vec{x},t)$ e magnético $\vec{H}(\vec{x},t)$ que representam o campo eletromagnético no sistema de referência inercial Σ. Portanto, o tensor campo eletromagnético deve possuir apenas seis componentes independentes. No espaço-tempo este é um tensor de segunda ordem anti-simétrico. Representando-o por $(F^{\alpha\beta}(x^{\mu}))$, devemos ter que

$$F^{\alpha\beta} = - F^{\beta\alpha} \qquad (1.3.22)$$

Como, por outro lado, os campos vetoriais acima são definidos em função dos campos potencial escalar $\phi(\vec{x},t)$ e potencial vetorial $\vec{A}(\vec{x},t)$ através, respectivamente, das expressões (1.2.8) e (1.2.7), concluímos que o tensor campo eletromagnético deve ser definido em função do campo quadripotencial eletromagnético (1.3.12) na forma

$$F^{\alpha\beta} = A^{\beta|\alpha} - A^{\alpha|\beta} \tag{1.3.23}$$

Suas componentes, calculadas no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^{\alpha}\}$, e as componentes dos campos elétrico e magnético no sistema de referência inercial Σ, estão relacionadas como na matriz

$$F^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{vmatrix} \tag{1.3.24}$$

Desde já podemos introduzir a noção de tensor campo dual do tensor campo eletromagnético. Representando o tensor dual por $(\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}(x^{\mu}))$, sua definição é

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\eta^{\alpha\beta\rho\sigma}\,F_{\rho\sigma} \tag{1.3.25}$$

onde $\eta^{\alpha\beta\rho\sigma}$ é o tensor totalmente anti-simétrico, contravariante de Levi-Civita Suas componentes são os símbolos totalmente anti-simétricos de Levi-Civita, cujos valores são:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{se } (\alpha\beta\rho\sigma) \text{ é permutação par de } (0123) \\ -1, & \text{se } (\alpha\beta\rho\sigma) \text{ é permutação ímpar de } (0123) \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases} \tag{1.3.26}$$

Portanto,

$$\eta^{\alpha\beta\rho\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \tag{1.3.27}$$

O tensor totalmente anti-simétrico covariante de Levi-Civita $\eta_{\alpha\beta\rho\sigma}$ é definido como tendo componentes

$$\eta_{\alpha\beta\rho\sigma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \tag{1.3.28}$$

Os símbolos de Levi-Civita satisfazem às seguintes relações:

$$\frac{1}{0!}\,\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\gamma\lambda} = 4!\;\delta^{\alpha\beta\rho\sigma}_{[\mu\nu\gamma\lambda]} \tag{1.3.29a}$$

$$\frac{1}{1!}\,\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\gamma\sigma} = 3!\;\delta^{\alpha\beta\rho}_{[\mu\nu\gamma]} \tag{1.3.29b}$$

$$\frac{1}{2!}\,\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 2!\;\delta^{\alpha\beta}_{[\mu\nu]} \tag{1.3.29c}$$

$$\frac{1}{3!}\,\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\beta\rho\sigma} = 1!\;\delta^{\alpha}_{\mu} \tag{1.3.29d}$$

$$\frac{1}{4!}\,\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = 0! \tag{1.3.29e}$$

onde os deltas generalizados de Kronecker são definidos assim:

$$4!\ \delta^{\alpha\beta\rho\sigma}_{[\mu\nu\gamma\lambda]} = \begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\mu} & \delta^{\alpha}_{\nu} & \delta^{\alpha}_{\gamma} & \delta^{\alpha}_{\lambda} \\ \delta^{\beta}_{\mu} & \delta^{\beta}_{\nu} & \delta^{\beta}_{\gamma} & \delta^{\beta}_{\lambda} \\ \delta^{\rho}_{\mu} & \delta^{\rho}_{\nu} & \delta^{\rho}_{\gamma} & \delta^{\rho}_{\lambda} \\ \delta^{\sigma}_{\mu} & \delta^{\sigma}_{\nu} & \delta^{\sigma}_{\gamma} & \gamma^{\sigma}_{\lambda} \end{vmatrix} \qquad (1.3.30a)$$

$$3!\ \delta^{\alpha\beta\rho}_{[\mu\nu\gamma]} = \begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\mu} & \delta^{\alpha}_{\nu} & \delta^{\alpha}_{\gamma} \\ \delta^{\beta}_{\mu} & \delta^{\beta}_{\nu} & \delta^{\beta}_{\gamma} \\ \delta^{\rho}_{\mu} & \delta^{\rho}_{\nu} & \delta^{\rho}_{\gamma} \end{vmatrix} \qquad (1.3.30b)$$

$$2!\ \delta^{\alpha\beta}_{[\mu\nu]} = \begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\mu} & \delta^{\alpha}_{\nu} \\ \delta^{\beta}_{\mu} & \delta^{\beta}_{\nu} \end{vmatrix} \qquad (1.3.30c)$$

As componentes do tensor campo-dual são calculadas a partir de sua definição (1.2.25). Dispondo-as na forma de matriz, temos que

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{vmatrix} \qquad (1.3.31)$$

Comparando esta matriz com a matriz (1.3.24), concluímos que o tensor campo-dual ($\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$) deriva do tensor campo eletromagnético ($F^{\alpha\beta}$) pela troca, neste último, do par $(\vec{E},\vec{H})$ pelo par $(\vec{H},-\vec{E})$.

De posse de todos esses conceitos e de todas essas noções, não nos será difícil escrever as equações de Maxwell (1.2.2) no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^{\alpha}\}$. Dispensando transcrever aqui as passagens matemáticas que conduzem a elas, damos apenas o resultado final, que é o seguinte: o par de equações não-homogêneas (1.2.2a) e (1.2.2b) fica escrito na seguinte forma quadridimensional:

$$F^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = - \frac{4\pi}{c}\, j^{\alpha} \; ; \tag{1.3.32}$$

quanto ao par (1.2.2c) e (1.2.2d) de equações homogêneas, sua forma quadridimensional é

$$F_{\rho\sigma|\beta} + F_{\sigma\beta|\rho} + F_{\beta\rho|\sigma} = 0 \tag{1.3.33}$$

Considerando que, pela definição (1.3.25),

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = \frac{1}{3!}\, \eta^{\alpha\beta\rho\sigma} \left(F_{\rho\sigma|\beta} + F_{\sigma\beta|\rho} + F_{\beta\rho|\sigma}\right) , \tag{1.3.34}$$

esta última equação pode ainda ser escrita na forma

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0 \; . \tag{1.3.35}$$

Da comparação desta equação com a equação (1.3.32) podemos notar que a fonte do tensor campo eletromagnético ($F^{\alpha\beta}$) é o quadrivetor densidade de corrente elétrica (j^{α}) e que o tensor campo dual ($\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$) não possui fontes. Quanto ao significado físico desta evidência matemática, ele será discutido na seção 5 deste capítulo.

Por enquanto devemos observar que, devido ao caráter anti-simétrico do tensor ($F^{\alpha\beta}$), da equação (1.3.32) tiramos que

$$j^{\alpha}{}_{|\alpha} = 0 \; . \tag{1.3.36}$$

Esta é a equação (1.2.3) para a conservação da carga elétrica es crita no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^\alpha\}$

Como já tivemos a oportunidade de dizer no início da seção anterior, as equações de Maxwell (1.3.32) e (1.3.35) não contêm, por serem lineares, a equação do movimento das partículas-teste na presença de um campo eletromagnético. Esta última equação deve ser definida independentemente daquelas do campo, na base unicamente de dados experimentais obtidos em laboratório.

Com a finalidade de escrever a equação de Lorentz na forma quadridimensional, consideremos uma partícula-teste de carga elétrica $\underline{e}$ e massa inercial de repouso $\underline{m_0}$. Seu estado de movimento em relação ao sistema de referência inercial Σ é descrito, no espaço-tempo pseudo-euclidiano relacionado ao sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^\alpha\}$, pelo quadrivetor

$$p^\alpha = m_0 c u^\alpha \qquad (1.3.37)$$

onde u^α é a quadrivelocidade da partícula-teste. A equação quadridimensional para a segunda lei de Newton é

$$F^\alpha = \frac{dp^\alpha}{ds} , \qquad (1.3.38)$$

onde $\underline{ds}$ é um intervalo infinitesimal do tempo próprio dessa mesma partícula. O quadrivetor (F^α) descreve, no presente caso, a interação da partícula com o campo eletromagnético. É, por isto, chamado de quadrivetor força de Lorentz. A componente espacial da equação acima é a equação (1.2.4) para a lei do movimento de Newton, na qual a grandeza $(\vec{F})$ é a força de Lorentz (1.2.5) propriamente dita. Portanto, o quadrivetor (F^α) deve ser es -

crito em termos do tensor campo eletromagnético ($F^{\alpha\beta}$), da quadrivelocidade (u^{α}) da partícula de prova e de sua carga elétrica $\underline{e}$. Devido à propriedade (1.3.5) da quadrivelocidade, da qual obtemos que

$$\dot{u}^{\alpha}u_{\alpha} = 0 \ , \tag{1.3.39}$$

onde $(\cdot) \equiv d/ds$, temos que

$$F^{\alpha}u_{\alpha} = 0 \Longleftrightarrow F^{\alpha}F_{\alpha} < 0 \tag{1.3.40}$$

Logo, o quadrivetor força de Lorentz é do tipo-espaço. Uma análise cuidadosa de todas essas propriedades leva-nos à conclusão de que o quadrivetor força de Lorentz (F^{α}) é o produto do fator (e/c) pela projeção do tensor campo eletromagnético ($F^{\alpha\beta}$) no espaço de repouso instantâneo da partícula de prova, isto é,

$$F^{\alpha} = \frac{e}{c} F^{\alpha\beta}u_{\beta} \tag{1.3.41}$$

Portanto, a equação (1.3.38) para a lei do movimento de uma partícula-teste de massa de repouso $\underline{m_0}$ e de carga elétrica $\underline{e}$ em um campo eletromagnético ($F^{\alpha\beta}$) tem a forma final seguinte:

$$\frac{dp^{\alpha}}{ds} = \frac{e}{c} F^{\alpha\beta}u_{\beta} \ , \tag{1.3.42}$$

onde (u^{α}) é a quadrivelocidade da partícula. Esta equação é chamada de equação de Newton-Lorentz. Suas componentes temporal e espaciais no sistema de referência inercial Σ são, respectivamente, a potência da força de Lorentz

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} = e\ (\vec{E}\cdot\vec{v}) \tag{1.3.43a}$$

e a própria força de Lorentz

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} = e\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{v}\times\vec{H}\right\}. \tag{1.3.43b}$$

Aqui, a variável $\underline{t}$ é o tempo próprio do observador O que repousa no referencial inercial Σ, dividido por $\underline{c}$.

No final da seção anterior tivemos a oportunidade de introduzir, embora sem demonstrar, aquelas funções que descrevem as distribuições das densidades de energia e de impulso do campo eletromagnético em relação ao sistema de referência inercial Σ. Dissemos ali que essas funções são consequências diretas das equações de Maxwell (1.2.2) para o campo eletromagnético e da equação de Lorentz (1.2.4)—(1.2.5) para o movimento de uma carga elétrica de prova em um campo eletromagnético. Agora, quando dispomos das equações quadridimensionais do campo eletromagnético e da equação quadridimensional do movimento de uma carga elétrica de prova neste campo é lícito perguntar da possibilidade de ser deduzida, a partir delas, uma função tensorial, definida no espaço-tempo pseudo-euclidiano, e cujas componentes, no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^\alpha\}$, sejam as grandezas (1.2.15)—(1.2.18). Não há dúvidas quanto ao fato de que, pelo menos em princípio, tal dedução é possível. Acontece, porém, que o caminho usualmente seguido na procura dessa função tensorial não é este. Comumente é percorrida a via mais abstrata da definição de uma integral de ação

$$S[A^{\alpha}] = \frac{1}{c}\int L\,(A^{\alpha},A^{\alpha|\beta})\,d^4x\ , \qquad (1.3.44)$$

onde

$$L\,(A^{\alpha},A^{\alpha|\beta}) = -\frac{1}{16\pi}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\ , \qquad (1.3.45)$$

e da imposição de que sua variação seja igual a zero

$$\delta S = 0 \qquad (1.3.46)$$

A efetuação dos cálculos conduz ao campo das grandezas

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\,(F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}{}^{\beta} + \frac{1}{4}\,\eta^{\alpha\beta}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma})\ , \qquad (1.3.47)$$

que constituem um tensor de segunda ordem nos seus índices e no tensor campo eletromagnético. Além do mais, este tensor é simétrico e tem traço nulo. Calculando todas as suas componentes no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^{\alpha}\}$ e comparando-as com as funções (1.2.15)–(1.2.18) que descrevem as distribuições das densidades de energia e de impulso do campo eletromagnético no sistema de referência inercial Σ, encontramos que a matriz de (1.3.47) é da forma

$$T^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c|c} \omega & \vec{S}/c \\ \hline \frac{\vec{S}}{c} & T^{ij} \end{array} \right\| \qquad (1.3.48)$$

As grandezas $(T^{\alpha\beta})$ são chamadas de <u>tensor das densidades de ener-</u>

gia e de impulso do campo eletromagnético.

1.4 - *As Identidades Duais do Tensor Campo Eletromagnético*

Uma das noções mais importantes da teoria do campo eletromagnético é aquela de invariante. Um invariante do campo eletromagnético é um campo escalar em relação às transformações de Lorentz. Ele é definido, evidentemente, em função apenas do tensor campo eletromagnético ($F^{\alpha\beta}$) e do tensor campo dual ($\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$). Devido ao fato de que a contração total de cada um destes tensores consigo mesmo e deles entre si pode ser efetuada de diferentes maneiras, o campo eletromagnético possui, em princípio, diversos invariantes de diferentes ordens. A ordem de um invariante do campo eletromagnético é determinada pelo número total de vezes que os tensores ($F^{\alpha\beta}$) e ($\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$) aparecem na expressão que define esse invariante. Obviamente, o número dos invariantes do campo eletromagnético é determinado pelas propriedades algébricas desses tensores.

Existem apenas duas possibilidades distintas de contração total do tensor eletromagnético e do seu dual para a formação de invariantes de segunda ordem, que são

$$\phi = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \qquad (1.4.1)$$

e

$$\psi = \frac{1}{2} \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \qquad (1.4.2).$$

A contração total do tensor dual consigo mesmo dá o mesmo invariante ϕ com o sinal negativo. Desta forma, o campo eletromagnético possui apenas dois invariantes de segunda ordem:

Quanto aos invariantes de ordem superior à segunda, eles são todos identicamente iguais a zero. Antes de provarmos que isto é verdade, demonstremos que o tensor campo eletromagnético e o tensor campo dual satisfazem a duas identidades algébricas, cada uma das quais envolvendo um dos invariantes de segunda ordem acima.

Consideremos, inicialmente, a contração em apenas um índice do tensor campo dual consigo mesmo e procuremos expressá-la em função unicamente do tensor campo eletromagnético. Pela definição (1.3.25) do tensor campo dual ($\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$) temos que

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}_{\lambda\beta} = \frac{1}{4}\, \eta^{\alpha\lambda\mu\nu}\eta_{\lambda\beta\rho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$$

Lembrando as definições (1.3.27) e (1.3.28) do tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita e a relação (1.3.29b) para o símbolo $\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}$, obtemos que

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}_{\lambda\beta} = -\frac{1}{4}\, \varepsilon^{\alpha\lambda\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\beta\rho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\rho\sigma} =$$

$$= \frac{1}{4}\, 3!\; \delta^{\alpha\mu\nu}_{[\beta\rho\sigma]}F_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$$

Lembrando, ainda, a definição (1.3.30b) e após expandirmos o determinante, encontramos que

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}_{\lambda\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}\, (\tfrac{1}{2}\, F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}) + F^{\alpha\lambda}F_{\lambda\beta}$$

Introduzindo aqui a definição (1.4.1) do invariante ϕ e levantando o índice β, esta expressão fica escrita na forma final seguinte:

$$\boxed{\overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}_{\lambda}{}^{\beta} - F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}{}^{\beta} = \phi\eta^{\alpha\beta}} \qquad (1.4.3)$$

Esta relação é chamada de identidade dual do tensor campo ele - tromagnético para o invariante ϕ.

Consideremos, agora, a contração em apenas um índice do tensor campo eletromagnético com o tensor campo dual e calcu lemos cada uma de suas componentes separadamente. Como resultado obtemos que

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}F_{\lambda\beta} = F^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}_{\lambda\beta} = \begin{cases} \psi/2 \ , & \text{se} \quad \alpha = \beta \\ 0 \ , & \text{se} \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Lembrando a definição (1.3.8) do delta de Kronecker, temos que, após levantarmos o índice β, esta expressão adquire a seguinte forma:

$$\boxed{\overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}F_{\lambda}{}^{\beta} = F^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}_{\lambda}{}^{\beta} = \frac{\psi}{2}\,\eta^{\alpha\beta}} \qquad (1.4.4)$$

Esta relação é chamada de identidade dual do tensor campo ele - tromagnético para o invariante ψ.

Uma vez dispondo das identidades duais de segunda ordem acima, a demonstração de que os invariantes de terceira ordem do campo eletromagnético são iguais a zero identicamente é trivial. Com efeito, contraindo (1.4.3) e (1.4.4) sucessivamen te com $F_{\beta\alpha}$ e $\overset{*}{F}_{\beta\alpha}$, e considerando que os traços destes tensores são iguais a zero, encontramos que

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}_{\lambda}{}^{\beta}F_{\beta\alpha} = F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}{}^{\beta}F_{\beta\alpha}$$

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}F_{\lambda}{}^{\beta}F_{\beta\alpha} = F^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}_{\lambda}{}^{\beta}F_{\beta\alpha} = 0$$

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}_{\lambda}{}^{\beta}\overset{*}{F}{}_{\beta\alpha} = F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}{}^{\beta}\overset{*}{F}{}_{\beta\alpha}$$

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}F_{\lambda}{}^{\beta}\overset{*}{F}{}_{\beta\alpha} = F^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}_{\lambda}{}^{\beta}\overset{*}{F}{}_{\beta\alpha} = 0$$

Como, de acordo com a identidade dual (1.4.4)

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}_{\lambda}{}^{\beta}F_{\beta\alpha} = \overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}F_{\alpha}{}^{\beta}\overset{*}{F}{}_{\beta\lambda} = \overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}\left(\frac{\psi}{2}\,\eta_{\alpha\lambda}\right) = 0$$

e

$$F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}{}^{\beta}\overset{*}{F}{}_{\beta\alpha} = F^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}_{\alpha}{}^{\beta}F_{\beta\lambda} = F^{\alpha\lambda}\left(\frac{\psi}{2}\,\eta_{\alpha\lambda}\right) = 0$$

concluímos que a primeira e a terceira das expressões acima também são iguais a zero. Logo, todos os invariantes de terceira ordem do campo eletromagnético são iguais a zero.

Agora vejamos duas importantes aplicações das identidades duais do tensor campo eletromagnético, ambas relacionadas com o tensor ($T^{\alpha\beta}$), que descreve a distribuição espaço-temporal da densidade de energia e de impulso do campo eletromagnético.

A primeira dessas aplicações visa escrever a expressão (1.3.47), que define este tensor, em uma forma mais elegante e também mais prática para ser usada em muitos cálculos. Inicialmente levamos àquela expressão a definição (1.4.1) do invariante ϕ e, em seguida, substituimos o termo $\phi\eta^{\alpha\beta}$ por sua expressão em termos dos tensores ($F^{\alpha\beta}$) e ($\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}$), fornecida pela identidade dual (1.4.3). Simplificando a expressao resultante, encontramos que o tensor ($T^{\alpha\beta}$) fica definido da seguinte forma:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}\,(F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}{}^{\beta} + \overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}_{\lambda}{}^{\beta}) \tag{1.4.5}$$

Quanto à segunda aplicação das identidades duais do campo eletromagnético, ela é indispensável no cálculo do quadrado do tensor (1.4.5) acima. Procedamos aqui a esse cálculo explicitamente evitando, entretanto, lembrar qual das duas identidades duais é usada em cada passagem. A questão que se apresenta, portanto, é aquela de expressar o produto

$$T^{\alpha\lambda}T_{\lambda}{}^{\beta} = \frac{1}{(8\pi)^2}\,(F^{\alpha\rho}F_{\rho}{}^{\lambda} + \overset{*}{F}{}^{\alpha\rho}\overset{*}{F}_{\rho}{}^{\lambda})(F_{\lambda}{}^{\sigma}F_{\sigma}{}^{\beta} + \overset{*}{F}_{\lambda}{}^{\sigma}\overset{*}{F}_{\sigma}{}^{\beta}) \tag{1.4.6}$$

em função dos invariantes ϕ e ψ do campo eletromagnético. Inicialmente abrimos os parênteses, o que nos dá

$$T^{\alpha\lambda}T_{\lambda}{}^{\beta} = \frac{1}{(8\pi)^2}\,(F^{\alpha\rho}F_{\rho}{}^{\lambda}F_{\lambda}{}^{\sigma}F_{\sigma}{}^{\beta} + F^{\alpha\rho}F_{\rho}{}^{\lambda}\overset{*}{F}_{\lambda}{}^{\sigma}\overset{*}{F}_{\sigma}{}^{\beta} +$$
$$+ \overset{*}{F}{}^{\alpha\rho}\overset{*}{F}_{\rho}{}^{\lambda}F_{\lambda}{}^{\sigma}F_{\sigma}{}^{\beta} + \overset{*}{F}{}^{\alpha\rho}\overset{*}{F}_{\rho}{}^{\lambda}\overset{*}{F}_{\lambda}{}^{\sigma}\overset{*}{F}_{\sigma}{}^{\beta}) \tag{1.4.7}$$

Agora, usando as identidades duais (1.4.3) e (1.4.4), simplifiquemos cada parcela desta expressão, como segue:

$$F^{\alpha\rho}F_{\rho}{}^{\lambda}F_{\lambda}{}^{\sigma}F_{\sigma}{}^{\beta} = F^{\alpha\rho}\,(\overset{*}{F}_{\rho}{}^{\lambda}\overset{*}{F}_{\lambda}{}^{\sigma} - \phi\delta_{\rho}{}^{\sigma})F_{\sigma}{}^{\beta} =$$
$$= F^{\alpha\rho}\overset{*}{F}_{\rho}{}^{\lambda}\overset{*}{F}_{\lambda}{}^{\sigma}F_{\sigma}{}^{\beta} - \phi(F^{\alpha\rho}F_{\rho}{}^{\beta}) =$$
$$= \left(\frac{\psi}{2}\,\eta^{\alpha\lambda}\right)\left(\frac{\psi}{2}\,\delta_{\lambda}{}^{\beta}\right) - \phi(F^{\alpha\rho}F_{\rho}{}^{\beta}) =$$
$$= \frac{\psi^2}{4}\,\eta^{\alpha\beta} - \phi(F^{\alpha\rho}F_{\rho}{}^{\beta}) \tag{1.4.8a}$$

$$F^{\alpha\rho}F_{\rho}{}^{\lambda}\overset{*}{F}_{\lambda}{}^{\sigma}\overset{*}{F}_{\sigma}{}^{\beta} = F^{\alpha\rho}\left(\frac{\psi}{2}\,\delta_{\rho}{}^{\sigma}\right)\overset{*}{F}_{\sigma}{}^{\beta} = \frac{\psi}{2}\,(F^{\alpha\rho}\overset{*}{F}_{\rho}{}^{\beta}) =$$

$$= \frac{\psi}{2}\left(\frac{\psi}{2}\,\eta^{\alpha\beta}\right) = \frac{\psi^2}{4}\,\eta^{\alpha\beta} \qquad (1.4.8b)$$

$$\overset{*}{F}^{\alpha\rho}\overset{*}{F}_{\rho}{}^{\lambda}F_{\lambda}{}^{\sigma}F_{\sigma}{}^{\beta} = \overset{*}{F}^{\alpha\rho}\left(\frac{\psi}{2}\,\delta_{\rho}{}^{\sigma}\right)F_{\sigma}{}^{\beta} = \frac{\psi}{2}\,(\overset{*}{F}^{\alpha\rho}F_{\rho}{}^{\beta}) =$$

$$= \frac{\psi}{2}\left(\frac{\psi}{2}\,\eta^{\alpha\beta}\right) = \frac{\psi^2}{4}\,\eta^{\alpha\beta} \qquad (1.4.8c)$$

$$\overset{*}{F}^{\alpha\rho}\overset{*}{F}_{\rho}{}^{\lambda}\overset{*}{F}_{\lambda}{}^{\sigma}\overset{*}{F}_{\sigma}{}^{\beta} = \overset{*}{F}^{\alpha\rho}\,(F_{\rho}{}^{\lambda}F_{\lambda}{}^{\sigma} + \phi\delta_{\rho}{}^{\sigma})\,\overset{*}{F}_{\sigma}{}^{\beta} =$$

$$= \overset{*}{F}^{\alpha\rho}F_{\rho}{}^{\lambda}F_{\lambda}{}^{\sigma}\overset{*}{F}_{\sigma}{}^{\beta} + \phi(\overset{*}{F}^{\alpha\rho}\overset{*}{F}_{\rho}{}^{\beta}) =$$

$$= \left(\frac{\psi}{2}\,\eta^{\alpha\lambda}\right)\left(\frac{\psi}{2}\,\delta_{\lambda}{}^{\beta}\right) + \phi(\overset{*}{F}^{\alpha\rho}\overset{*}{F}_{\rho}{}^{\beta}) =$$

$$= \frac{\psi^2}{4}\,\eta^{\alpha\beta} + \phi(\overset{*}{F}^{\alpha\rho}\overset{*}{F}_{\rho}{}^{\beta}) \qquad (1.4.8d)$$

Levando estas expressões de volta a (1.4.7) e reagrupando seus termos, obtemos que

$$T^{\alpha\lambda}T_{\lambda}{}^{\beta} = \frac{1}{(8\pi)^2}\left[\phi(F^{\alpha\rho}F_{\rho}{}^{\beta} - \overset{*}{F}^{\alpha\rho}\overset{*}{F}_{\rho}{}^{\beta}) + \psi^2\,\eta^{\alpha\beta}\right].$$

Fazendo uso, mais uma vez, da identidade dual (1.4.3), encontramos, finalmente, a expressão procurada:

$$T^{\alpha\lambda}T_{\lambda}{}^{\beta} = \frac{1}{(8\pi)^2}\,(\phi^2 + \psi^2)\,\eta^{\alpha\beta} \qquad (1.4.9)$$

1.5 - *Decomposição do Tensor Campo Eletromagnético em suas Partes Elétrica e Magnética*

A lei do movimento de uma partícula material de massa de repouso (m_0), de carga elétrica de prova (e) e de quadrivelocidade (u^α), na presença de um campo eletromagnético $(F^{\alpha\beta})$, é descrita pela equação de Newton-Lorentz (1.3.42), a qual pode ser escrita, pela definição (1.3.37) do quadrivetor impulso de uma partícula, na forma equivalente

$$m_0 c^2 \frac{du^\alpha}{ds} = eF^{\alpha\beta}u_\beta \qquad (1.5.1)$$

em todo sistema de coordenadas lorentzianas.

Embora atualmente a Física não disponha de evidência experimental confiável sobre a existência de "cargas magnéticas" na Natureza, sua eventual descoberta seria facilmente assimilada pela teoria eletromagnética de Maxwell. Neste caso não parece extrapolação teórica exagerada supor que uma "carga magnética" de prova (μ) e de massa de repouso (m_0), movimentando-se com quadrivelocidade (u^α) na presença de um campo eletromagnético $(F^{\alpha\beta})$, interage com este campo segundo uma lei que é "dual" à lei de interação da carga elétrica Esta não é uma conclusão infundada, mas que se assenta na comparação crítica das equações (1.3.32) e (1.3.35) de Maxwell. A equação que descreve essa lei deve ser a análoga dual da equação de Newton-Lorentz acima, isto é,

$$m_0 c^2 \frac{du^\alpha}{ds} = \mu \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}u_\beta \quad , \qquad (1.5.2)$$

onde $(\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta})$ é o dual de $(F^{\alpha\beta})$

Ambos os membros de cada uma das equações acima têm dimensão de força, o que implica em que o quadrivetor

$$E^{\alpha} = F^{\alpha\beta}u_{\beta} \tag{1.5.3}$$

tem dimensão de força por unidade de carga elétrica de prova e o quadrivetor dual

$$H^{\alpha} = \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}u_{\beta} \tag{1.5.4}$$

tem dimensão de força por unidade de "carga magnética" de prova. Chamaremos o primeiro destes quadrivetores de <u>parte elétrica</u> e o segundo de <u>parte magnética</u> do tensor campo eletromagnético ($F^{\alpha\beta}$) em um dado observador de quadrivelocidade (u^{α}). Contraindo ambas as expressões (1.5.3) e (1.5.4) com esta quadrivelocidade obtemos, de um lado, que

$$E^{\alpha}u_{\alpha} = 0 \tag{1.5.5}$$

ou, equivalentemente, que

$$E^{\alpha}E_{\alpha} < 0 \tag{1.5.6}$$

de outro lado obtemos que

$$H^{\alpha}u_{\alpha} = 0 \tag{1.5.7}$$

ou, equivalentemente, que

$$H^{\alpha}H_{\alpha} < 0 \tag{1.5.8}$$

Portanto a parte elétrica (E^{α}) e a parte magnética (H^{α}) do tensor campo eletromagnético ($F^{\alpha\beta}$) relativamente a um mesmo observador (u^{α}) são quadrivetores do tipo-espaço e pertencem ao espaço de repouso (instantâneo) deste observador.

Consideremos, agora, os dois observadores seguintes: o primeiro é o observador O que introduzimos na seção 2 e cujo referencial inercial de repouso Σ é representado no espaço-tempo pseudo-euclidiano pelo sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^{\alpha}\}$; o segundo é o observador $\overline{O}$ cujo referencial inercial de repouso $\overline{\Sigma}$ é representado neste mesmo espaço-tempo pelo sistema de coordenadas lorentzianas $\{\overline{x}^{\alpha}\}$ Suponhamos que $\overline{\Sigma}$ se movimenta em relação a Σ de tal forma que o sistema de coordenadas $\{\overline{x}^{\alpha}\}$ deriva do sistema de coordenadas $\{x^{\alpha}\}$ através das transformações

$$\overline{X}^{\alpha} = A^{\alpha}{}_{\mu} X^{\mu} \tag{1.5.9}$$

nas quais $(A^{\alpha}{}_{\mu})$ é a matriz especial de Lorentz

$$A^{\alpha}{}_{\mu} = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \tag{1.5.10}$$

onde $\vec{v} = (v,0,0)$ é a velocidade do observador $\overline{O}$ (e portanto de $\overline{\Sigma}$) em relação a Σ. Calculadas no sistema de coordenadas $\{x^{\alpha}\}$, as componentes do tensor campo eletromagnético são aquelas tabeladas na matriz (1.3.24). Suas transformações de acordo com a lei tensorial lorentziana

$$\bar{F}^{\mu\nu} = A^{\mu}{}_{\alpha} A^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta} \qquad (1.5.11)$$

fornecem as componentes do mesmo tensor no sistema de coordenadas $\{\bar{x}^{\alpha}\}$, as quais estão tabeladas na matriz abaixo:

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \left\| \begin{matrix} 0 & -E_x & -\dfrac{E_y - \frac{v}{c} H_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & -\dfrac{E_z + \frac{v}{c} H_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ E_x & 0 & -\dfrac{H_z - \frac{v}{c} E_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \dfrac{H_y + \frac{v}{c} E_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \dfrac{E_y - \frac{v}{c} H_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \dfrac{H_z - \frac{v}{c} E_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & -H_x \\ \dfrac{E_z + \frac{v}{c} H_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & -\dfrac{H_y + \frac{v}{c} E_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & H_x & 0 \end{matrix} \right\| \qquad (1.5.12)$$

A matriz do tensor campo dual ($\tilde{F}^{\alpha\beta}$) é obtida simplesmente trocando nesta matriz o par de vetores $(\vec{E},\vec{H})$ pelo par de vetores $(\vec{H},-\vec{E})$. Quanto às quadrivelocidades dos dois observadores, suas componentes são calculadas, diretamente, a partir da definição (1.3.4). As componentes da quadrivelocidade do observador O são, no sistema de coordenadas próprio $\{x^{\alpha}\}$,

$$u^{\alpha} = \delta^{\alpha}{}_{0} \quad , \qquad (1.5.13a)$$

e no sistema de coordenadas $\{\bar{x}^{\alpha}\}$ elas são

$$\bar{u}^{\alpha} = \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \; , \; \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \; , \; 0 \quad 0 \right] \qquad (1.5.13b)$$

Quanto às componentes da quadrivelocidade do observador $\bar{O}$, elas são

$$V^{\alpha} = \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \; , \; \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \; , \; 0 \; , \; 0 \right] \qquad (1.5.14a)$$

no sistema de coordenadas $\{x^{\alpha}\}$ e

$$\bar{V}^{\alpha} = \delta^{\alpha}{}_{0} \qquad (1.5.14b)$$

no sistema de coordenadas próprio $\{\bar{x}^{\alpha}\}$. É fácil verificar que as componentes da quadrivelocidade de um mesmo observador em diferentes sistemas de coordenadas lorentzianas estão relacionadas através de uma transformação especial de Lorentz (1.5.9). É importante observar que não é definida a transformação das componentes de uma quadrivelocidade nas componentes da outra, pois isto equivaleria a converter a história de uma partícula, isto é, sua individualidade, na história e, portanto, na individualidade da outra partícula.

De posse dessas definições e desses conceitos, é trivial calcular as componentes das partes elétrica e magnética de um mesmo tensor campo eletromagnético relativamente aos dois observadores O e $\bar{O}$ e em ambos os sistemas de coordenadas lorentzianas $\{x^{\alpha}\}$ e $\{\bar{x}^{\alpha}\}$. Dispensando-nos de lembrar a cada passo a regra que converte o tensor campo eletromagnético no tensor campo dual e evitando transcrever as passagens matemáticas, limitamo-nos apenas a dar os resultados finais.

Inicialmente, consideremos a decomposição do tensor campo eletromagnético relativamente ao observador O. Substituindo (1.3.24) da mesma forma que (1.5.13a) na definição (1.5.3), encontramos que as componentes da parte elétrica no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^\alpha\}$ são, para esse observador, as seguintes:

$$E^\alpha = (0,\ E_x,\ E_y,\ E_z) \quad . \tag{1.5.15}$$

As componentes da parte magnética obviamente são

$$H^\alpha = (0,\ H_x,\ H_y,\ H_z) \tag{1.5.16}$$

Substituindo, agora, (1.5.12) e (1.5.13b) na mesma definição, obtemos que as componentes da parte elétrica no sistema de coordenadas lorentzianas $\{\bar{x}^\alpha\}$ são, para aquele mesmo observador O, as abaixo

$$\bar{E}^\alpha = \left(\frac{-\frac{v}{c}E_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \ ,\ \frac{E_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \ ,\ E_y,\ E_z \right) \tag{1.5.17}$$

As componentes da parte magnética são

$$\bar{H}^\alpha = \left(\frac{-\frac{v}{c}H_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \ ,\ \frac{H_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \ ,\ H_y,\ H_z \right) \tag{1.5.18}$$

Comparando (1.5.17) com (1.5.15) e (1.5.18) com (1.5.16) notamos que as componentes com barra se relacionam com as componentes sem barra pela lei tensorial (1.5.9), evidenciando o fato de que (E^α) e (H^α) são quadrivetores contravariantes.

Consideremos, agora, a decomposição do mesmo tensor campo eletromagnético relativamente ao observador $\overline{O}$. Substituindo (1. 3.24) e (1.5.14a) na definição (1.5.3), obtemos as componentes da parte elétrica no sistema de coordenadas lorentzianas $\{x^\alpha\}$ relativamente ao observador $\overline{O}$ acima, quais sejam

$$E^\alpha = \left\{\frac{\frac{v}{c}E_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{E_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{E_y - \frac{v}{c}H_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{E_z + \frac{v}{c}H_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} \tag{1.5.19}$$

Quanto à parte magnética, suas componentes são

$$H^\alpha = \left\{\frac{\frac{v}{c}H_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{H_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{H_y + \frac{v}{c}E_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{H_z - \frac{v}{c}E_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} \tag{1.5.20}$$

Levando, agora, (1.5.12) e (1.5.14b) à mesma definição (1.5.3), obtemos que

$$\overline{E}^\alpha = \left\{0,\ E_x,\ \frac{E_y - \frac{v}{c}H_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{E_z + \frac{v}{c}H_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} \tag{1.5.21}$$

são as componentes da parte elétrica no sistema de coordenadas próprio $\{\overline{x}^\alpha\}$ e relativamente ao observador $\overline{O}$. No que se refere às componentes da parte magnética elas são

$$\overline{H}^\alpha = \left\{0,\ H_x,\ \frac{H_y + \frac{v}{c}E_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{H_z - \frac{v}{c}E_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\} \tag{1.5.22}$$

Novamente notamos, da comparação de (1.5.21) com (1.5.19) e de (1.5.22) com (1.5.20), a natureza quadrivetorial contravariante da parte elétrica (E^{α}) e da parte magnética (H^{α}).

O que dissemos até aqui pode ser resumido da maneira que segue. O tensor campo eletromagnético pode ser representado ao longo da linha de universo de cada observador por dois campos de quadrivetores do tipo-espaço. Um deles é o campo do quadrivetor parte elétrica (E^{α}) e o outro é o campo do quadrivetor parte magnética (H^{α}). Esta representação é, por definição, invariante em relação ao grupo das transformações de Lorentz. Cada observador tem sua representação específica do tensor campo eletromagnético, que não pode ser relacionada com as representações dos demais observadores. Cada sistema de coordenadas lorentzianas determina uma base local em cada evento da linha de universo de cada observador. O campo de bases locais determinado sobre a linha de universo de um observador por seu sistema de coordenadas próprio é tal, que, calculadas nele, as componentes do quadrivetor parte elétrica são $E^{\alpha} = (0,\vec{E})$ e as componentes do quadrivetor parte magnética são $H^{\alpha} = (0,\vec{H})$. Aqui, $\vec{E}(\vec{x},t)$ é o campo dos vetores elétricos e $\vec{H}(\vec{x},t)$ é o campo dos vetores magnéticos, ambos medidos no referencial inercial de repouso (instantâneo) do observador em questão. Desta forma, o campo elétrico e o campo magnético usuais são apenas as componentes espaciais respectivamente da parte elétrica e da parte magnética do campo eletromagnético com respeito ao campo de bases locais próprio do observador responsável pela representação. Calculadas noutro campo de bases locais que não o próprio deste observador, as componentes da parte elétrica e da parte magnética são em geral todas diferentes de zero, as quais não podem ser associadas às noções usuais de campo elétrico e campo magnético de uma forma tão simples e tão direta.

O tensor campo eletromagnético ($F^{\alpha\beta}$) pode evidentemente ser expresso, ao longo da linha de universo de cada observador e em cada sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$, em função de sua representação (E^α, H^α) nesta linha de universo e da quadrivelocidade (u^α) que a caracteriza, ambas calculadas nas coordenadas $\{x^\alpha\}$. A maneira formal de encontrar tal expressão é expandindo o termo $\eta^{\alpha\beta\rho\sigma} u_\rho H_\sigma$ com o auxílio das definições (1.5.4) e (1.3.25) e das propriedades (1.3.27)-(1.3.30) do tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita. Como resultado obtemos que

$$F^{\alpha\beta} = E^\alpha u^\beta - E^\beta u^\alpha + \eta^{\alpha\beta\rho\sigma} u_\rho H_\sigma \quad . \qquad (1.5.23)$$

Procedendo ao cálculo do dual deste tensor pela definição (1.3.25) e considerando as mesmas propriedades (1.3.27)-(1.3.30) utilizadas acima, encontramos que

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = H^\alpha u^\beta - H^\beta u^\alpha - \eta^{\alpha\beta\rho\sigma} u_\rho E_\sigma \qquad (1.5.24)$$

Desta forma, (1.5.24) pode ser obtida substituindo diretamente em (1.5.23) o par (E^α, H^α) pelo par ($H^\alpha, -E^\alpha$).

Vejamos, agora, como estas formas de escrever o tensor campo eletromagnético e o tensor campo dual permitem expressar algumas grandezas relacionadas ao campo eletromagnético em termos da representação (E^α, H^α) e/ou da quadrivelocidade (u^α) do observador sobre cuja linha de universo esta representação é definida.

Comecemos pelos dois únicos invariantes do campo eletromagnético. Substituindo (1.5.23) em (1.4.1), e (1.5.23) e (1.5.24) em (1.4.2), obtemos que

$$\phi = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = E^{\alpha}E_{\alpha} - H^{\alpha}H_{\alpha} \tag{1.5.25}$$

e

$$\psi = \frac{1}{2} \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 2E^{\alpha}H_{\alpha} \tag{1.5.26}$$

Estas grandezas, por serem escalares, independem da quadrivelocidade do observador e do sistema de coordenadas utilizado. Expressas em termos do campo elétrico $\vec{E}(\vec{x},t)$ e do campo magnético $\vec{H}(\vec{x},t)$, elas são escritas assim:

$$\phi = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = H^2 - E^2 \tag{1.5.27}$$

e

$$\psi = \frac{1}{2} \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = - 2\vec{E}\cdot\vec{H} \tag{1.5.28}$$

onde o ponto significa produto escalar.

Consideremos, agora, a forma (1.4.5) da expressão que define o tensor densidade de energia-impulso do campo eletromagnético e tomemos cada um dos termos entre parênteses separadamente. Fazendo uso de (1.5.23) e após algumas operações já aqui triviais, encontramos que o primeiro desses termos fica escrito na seguinte forma:

$$F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}{}^{\beta} = -(E^{\alpha}E^{\beta}+H^{\alpha}H^{\beta}) - (E^{\lambda}E_{\lambda} + H^{\lambda}H_{\lambda})u^{\alpha}u^{\beta} + H^{\lambda}H_{\lambda}\, \eta^{\alpha\beta} + $$
$$+ 2u^{(\alpha}\eta^{\beta)\rho\mu\nu}\, E_{\rho}u_{\mu}H_{\nu} \tag{1.5.29a}$$

Quanto ao segundo termo, ele deriva deste pela substituição do par (E^{α},H^{α}) no par $(H^{\alpha},-E^{\alpha})$. Portanto,

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}_{\lambda}{}^{\beta} = -(E^{\alpha}E^{\beta} + H^{\alpha}H^{\beta}) - (E^{\lambda}E_{\lambda} + H^{\lambda}H_{\lambda})u^{\alpha}u^{\beta} + E^{\lambda}E_{\lambda}\,\eta^{\alpha\beta} -$$

$$- 2u^{(\alpha}\eta^{\beta)\rho\mu\nu}\,H_{\rho}u_{\mu}E_{\nu} \qquad (1.5.29b)$$

Portanto, o tensor densidade de energia-impulso do campo eletromagnético fica escrito assim:

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}(E^{\alpha}E^{\beta} + H^{\alpha}H^{\beta}) - \frac{1}{4\pi}(E^{\lambda}E_{\lambda} + H^{\lambda}H_{\lambda})u^{\alpha}u^{\beta} +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}(E^{\lambda}E_{\lambda} + H^{\lambda}H_{\lambda})\,\eta^{\alpha\beta} + \frac{1}{2\pi}\,u^{(\alpha}\eta^{\beta)\rho\mu\nu}E_{\rho}u_{\mu}H_{\nu}\,. \qquad (1.5.30)$$

Contraindo este tensor consigo mesmo e efetuando os cálculos razoavelmente extensos, encontramos que

$$T^{\alpha\lambda}T_{\lambda}{}^{\beta} = \frac{1}{(8\pi)^2}\left[(E^{\lambda}E_{\lambda} - H^{\lambda}H_{\lambda})^2 + 4(E^{\lambda}H_{\lambda})^2\right]\eta^{\alpha\beta} \qquad (1.5.31)$$

Esta expressão é a mesma que obtemos quando substituimos (1.5.25) e (1.5.26) em (1.4.9).

1.6 - *Os Fundamentos Físicos da Teoria da Gravitação de Einstein e Alguns de seus Aspectos Formais*

Nas seções anteriores estivemos falando da Teoria Eletromagnética de Maxwell, onde procuramos salientar aqueles seus aspectos matemáticos que permitem estabelecer uma analogia formal entre ela e a Teoria da Gravitação de Einstein. Aqui, nesta seção, falaremos desta última teoria, procurando pôr em evidência aqueles seus aspectos formais que guardem uma relação direta com a investigação levada a efeito nas próximas seções.

Durante vários anos — mais exatamente, de 1907 a 1912 — Einstein tentou, sem êxito, incluir a gravitação no Programa da Teoria da Relatividade. A origem do seu insucesso — como ele mesmo reconheceu[2] — residiu no fato de não ter levado na devida conta a propriedade fundamental da matéria, comum a todas as suas formas, qual seja: a estrita igualdade numérica das massas gravitacional e inercial. Esta é a propriedade responsável pelo acoplamento mínimo da matéria com a gravitação, que faz com que todos os corpos, independentemente de suas propriedades específicas, acelerem-se igualmente em todo campo gravitacional. Einstein elevou esta propriedade universal da matéria à categoria de único princípio de sua Teoria da Gravitação e o chamou de Princípio da Equivalência. Este Princípio pode ser formulado assim: "O referencial de repouso de todo observador em queda livre em um campo gravitacional é <u>localmente</u> inercial". Portanto, fundamentado apenas em observações físicas efetuadas no interior de um volume suficientemente pequeno de seu espaço de repouso durante um intervalo suficientemente curto de seu tempo próprio, este observador não pode distinguir se seu referencial de repouso cai aceleradamente em um campo de gravidade ou se, pelo contrário, desloca-se retilínea e uniformemente na ausência de tal campo. Somente com base em observações envolvendo regiões suficientemente extensas de seu espaço de repouso e intervalos suficientemente longos de seu tempo próprio aquele observador poderá fazer essa distinção. É que, neste caso, a influência das forças de maré - um fenômeno puramente gravitacional - sobre os fenômenos físicos, dá origem a "deformações" ou efeitos óticos que evidenciam a estrutura não-pseudo-euclidiana do espaço-tempo numa dimensão mais ampla, portanto não local. Obviamente, tais efeitos podem, em princípio, ser observados mesmo localmente, dependendo da capacidade de resolução dos instrumentos utilizados nas medições. Somente no limite de cada evento é que as propriedades do espaço-tempo na presença de gravitação são pseudo-euclidianas. Um espaço-tempo curvo e localmente pseudo-euclidiano é chamado de pseudo-riemaniano. Desta forma, a propriedade universal da matéria da estrita igualdade numérica das massas gravitacional e inercial leva-nos a concluir, forçosamente, que o espaço-tempo na presença de campo gravitacional tem estrutura geométrica pseudo-riemaniana.

A estrutura geométrica pseudo-riemaniana do espaço-tempo é completamente caracterizada, em cada sistema de coordenadas "curvilíneas" $\{x^\alpha\}$, pela forma diferencial

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\mu)\,dx^\alpha dx^\beta \,, \qquad (1.6.1)$$

a qual define o quadrado do intervalo entre dois eventos infinitesimalmente vizinhos. Os coeficientes que nela aparecem constituem o tensor métrico, cujas propriedades são as seguintes: (a) é simétrico, isto é,

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) = g_{\beta\alpha}(x^\mu) \qquad (1.6.2a)$$

(b) suas componentes satisfazem às condições

$$g_{00} > 0 \; ; \; \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0 \; ; \; \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0 \; ; \; g < 0 \quad , \qquad (1.6.2b)$$

onde $g = \det(g_{\alpha\beta})$; e (c) tem derivada covariante igual a zero, ou seja,

$$g_{\alpha\beta||\rho} = 0 \qquad (1.6.2c)$$

Estas propriedades, obviamente, são impostas ao espaço-tempo pelo campo gravitacional. Como realidade física, este campo existe no espaço e no tempo e os fenômenos a ele associados obedecem ao princípio da causalidade. Portanto, somente aqueles sistemas de coordenadas que permitam distinguir o espaço do tempo e o passado do futuro são adequados para mapear o espaço-tempo na presença de campo gravitacional. A propriedade (1.6.2b) da métrica estabelece justamente esta restrição. Quanto à propriedade (1.6.2c), ela adapta a geometria do espaço-tempo ao princípio do acoplamento mínimo da matéria com a gravitação, impondo-lhe a conexão riemaniana

$$\{^{\mu}_{\alpha\beta}\} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\alpha\rho|\beta} + g_{\beta\rho|\alpha} - g_{\alpha\beta|\rho}) \qquad (1.6.3)$$

e convertendo, deste modo, as linhas de universo das partículas-teste em geodésicas daquela geometria. Assim, se u^{α} é a quadri-velocidade de uma partícula-teste em queda livre em um campo gravitacional, então sua linha de universo é descrita pela equação

$$\frac{Du^{\alpha}}{Ds} \equiv \frac{du^{\alpha}}{ds} + \{{}^{\alpha}_{\rho\sigma}\}\, u^{\rho}u^{\sigma} = 0 \quad , \qquad (1.6.4)$$

onde s é o tempo próprio da partícula, e, portanto, é uma geodésica do espaço-tempo pseudo-riemaniano.

Os efeitos óticos aos quais nos referimos acima como tendo origem nas forças gravitacionais de maré podem, agora, ser interpretados geometricamente como sendo o desvio das geodésicas que representam no espaço-tempo as diferentes partes dos fenômenos observados. Assim, se a posição de um evento qualquer sobre a linha geodésica de uma partícula-teste em relação à geodésica de um observador de quadrivelocidade u^{α} é caracterizada pelo quadrivetor Z^{α}, então a fórmula

$$\frac{D^2 Z^{\alpha}}{Ds^2} = R^{\alpha\cdot}_{\cdot\rho\mu\sigma} U^{\rho} Z^{\mu} U^{\sigma} \quad , \qquad (1.6.5)$$

na qual o parâmetro s é o tempo próprio do observador, descreve a "aceleração" relativa do desvio mútuo dessas duas geodésicas A expressão (1.6.5) é chamada, por isto, de fórmula do desvio geodésico. Quanto aos coeficientes $R^{\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}$ que nela aparecem, eles constituem um tensor em relação ao conjunto das transformações das coordenadas admissíveis no espaço-tempo pseudo-riemanniano . Obviamente, $R^{\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}$ é aquele objeto geométrico que representa o campo gravitacional, responsável pelas forças de maré, neste espaço-tempo. Vejamos qual é o seu significado geométrico.

Com esta finalidade, consideremos a figura abaixo. Nela, um contorno fechado $\mathbb{C}$, pertencente a uma superfície bidi -

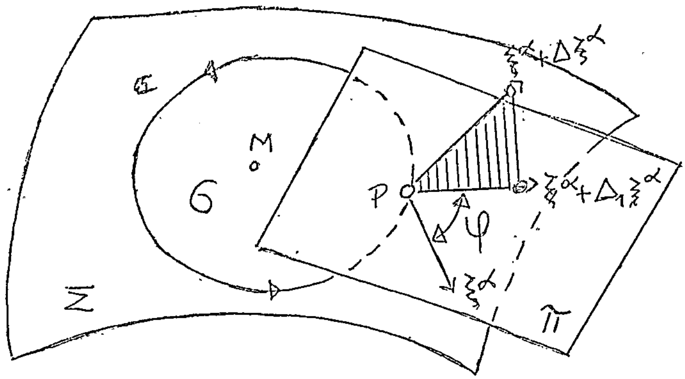

Figura 1

mensional do tipo-espaço Σ, cuja orientação no espaço-tempo é caracterizada por um bivetor unitário $x^{\alpha\beta}$, limita um elemento de superfície de área σ. Em um ponto P qualquer de $\mathbb{C}$ tomemos um quadrivetor ξ^{α} do plano π, tangente a Σ neste ponto. Sendo o espaço-tempo curvo, o transporte paralelo de ξ^{α} ao longo de $\mathbb{C}$ volta a P com um quadrivetor $\xi'^{\alpha} = \xi^{\alpha} + \Delta\xi^{\alpha}$, que em geral não pertence a π. Seja $\xi_1'^{\alpha} = \xi^{\alpha} + \Delta_1\xi^{\alpha}$ a projeção de ξ'^{α} sobre este plano, a qual forma, em geral, um ângulo ϕ com o quadrivetor inicial ξ^{α}. Então, como é possível demonstrar(3), no limite quando $\sigma \to 0$ e o contorno $\mathbb{C}$ tende para um ponto M qualquer do seu interior, a razão ϕ/σ tende para um valor perfeitamente definido K, dado pela seguinte expressão:

$$K = \lim_{\sigma\to 0} \frac{\phi}{\sigma} \doteq R_{\alpha\beta\rho\sigma}x^{\alpha\beta}x^{\rho\sigma} \ . \qquad (1.6.6)$$

A grandeza escalar K é chamada de curvatura do espaço-tempo pseudo-riemanniano no ponto M e na direção bidimensional caracterizada pelo bivetor unitário $x^{\alpha\beta}$. Como o ponto M e esta direção são arbitrários, concluímos que o tensor $R_{\alpha\beta\rho\sigma}$ descreve a curvatura quadridimensional do espaço-tempo pseudo-riemanniano.

Desta forma, aquele objeto geométrico que dissemos representar o campo gravitacional no espaço-tempo pseudo-riemanniano é o mesmo que descreve a curvatura deste espaço-tempo. Esta curvatura e o campo gravitacional são uma única realidade. A geometria, que antes de Einstein era considerada uma criação livre da razão humana, sem nenhum compromisso "maculador" com a realidade além daquela tênue e longínqua inspiração na atividade prático-produtiva dos agricultores das Civilizações Antigas, com Einstein se converteu ela própria em realidade material capaz de dar sustentação à estrutura do mundo.

Agora, que já sabemos qual é o significado geométrico-físico do tensor de curvatura, vejamos quais são suas propriedades formais. Inicialmente temos suas propriedades algébricas

$$R_{\alpha\beta\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\alpha\beta} \qquad (1.6.7a)$$

$$R_{\alpha\beta\rho\sigma} = -R_{\beta\alpha\rho\sigma} \qquad (1.6.7b)$$

$$R_{\alpha\beta\rho\sigma} = -R_{\alpha\beta\sigma\rho} \qquad (1.6.7c)$$

e as identidades que ele satisfaz: a identidade de Ricci

$$R_{\alpha\beta\rho\sigma} + R_{\alpha\rho\sigma\beta} + R_{\alpha\sigma\beta\rho} = 0 \qquad (1.6.8a)$$

e a identidade de Bianchi

$$R_{\alpha\beta\rho\sigma\|\lambda} + R_{\alpha\beta\sigma\lambda\|\rho} + R_{\alpha\beta\lambda\rho\|\sigma} = 0 \quad . \tag{1.6.8b}$$

Outra propriedade é aquela relacionada com a definição da alternação da derivada covariante de segunda ordem de um quadrivetor ξ^α, pela qual

$$\xi^\mu{}_{\|\alpha\|\beta} - \xi^\mu{}_{\|\beta\|\alpha} = - R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\, \xi^\nu \quad . \tag{1.6.9}$$

Ademais, suas relações com o objeto de conexão pseudo-riemanniano (1.6.3) são definidas através da expressão

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \{^{\mu}_{\nu\beta}\}_{|\alpha} - \{^{\mu}_{\nu\alpha}\}_{|\beta} + \{^{\sigma}_{\nu\beta}\}\{^{\mu}_{\sigma\alpha}\} - \{^{\sigma}_{\nu\alpha}\}\{^{\mu}_{\sigma\beta}\} \tag{1.6.10}$$

Finalmente temos que o único traço de segunda ordem do tensor de curvatura que não é identicamente igual a zero é o tensor de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} = R^\nu{}_{\alpha\nu\beta} \quad . \tag{1.6.11}$$

O traço deste tensor é o escalar de curvatura

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R^\beta{}_\beta \ , \tag{1.6.12}$$

também chamado de escalar de Ricci.

O tensor de curvatura $R_{\alpha\beta\rho\sigma}$ tem ao todo 256 componentes, das quais apenas 20 são mutuamente independentes. Elas estão amarradas umas às outras pela identidade de Bianchi (1.6.8b). Contraindo esta identidade inicialmente nos índices ($\beta\sigma$) e, em seguida, nos índices ($\alpha\lambda$), obtemos que

$$(R^{\alpha}{}_{\rho} - \frac{1}{2}\,\delta^{\alpha}_{\rho}R)_{\|\alpha} = 0 \quad . \tag{1.6.13}$$

Portanto, as 10 componentes do tensor de Ricci satisfazem identicamente às 4 equações (1.6.13). Segundo essas equações, o tensor de Einstein

$$G_{\rho\sigma} \equiv R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\,g_{\rho\sigma}R \tag{1.6.14}$$

tem divergência covariante nula, isto é,

$$G^{\rho\sigma}{}_{\|\sigma} = 0 \tag{1.6.15}$$

Esta é uma identidade de fundamental importância na procura das equações do campo gravitacional.

A Teoria da Gravitação de Einstein, não obstante o monismo filosófico das concepções do mundo do seu autor, não conseguiu superar o dualismo na descrição dos fenômenos da Natureza. Para esta teoria o mundo é constituído de duas entidades distintas embora interdependentes: a matéria e o campo gravitacional. A matéria em si mesma não é objeto de seu estudo, mas apenas enquanto fonte do campo gravitacional Compreendida desta forma, suas propriedades específicas, entre as quais sua estrutura, são totalmente irrelevantes. Apenas deve ser considerada a distri -

buição da sua energia e do seu impulso no espaço e no tempo. Daí porque a TGE descreve a matéria com um tensor densidade de energia-impulso $T_{\rho\sigma}$, definido no espaço-tempo pseudo-riemanniano, e ao qual é imposta uma exigência obrigatória: sua divergência covariante deve ser igual a zero identicamente

$$T^{\rho\sigma}{}_{\|\sigma} = 0 \qquad (1.6.16)$$

Esta propriedade descreve o princípio da conservação da energia e do impulso da matéria ou, equivalentemente, a conservação desta última. Se atantarmos para o fato de que o princípio do acoplamento mínimo da matéria e da gravitação é local e que, portanto, o campo gravitacional em dado ponto do espaço e em dado instante de tempo é gerado pelas densidades de energia e de impulso da matéria neste ponto e neste instante, então as equações (1.6.15) e (1.6.16) permitem escrever as equações de Einstein para o campo gravitacional na forma

$$G_{\rho\sigma} = K \cdot T_{\rho\sigma} \,. \qquad (1.6.17)$$

Aqui K é uma constante positiva cujo valor deve ser encontrado a partir da exigência de que estas equações forneçam, em primeira aproximação, a equação da gravitação de Newton

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \,, \qquad (1.6.18)$$

onde $G = 6{,}67.10^{-11}\ Nm^2seg^{-2}$ é a constante de gravitação universal. Os cálculos mostram que

$$K = \frac{8\pi G}{c^4} \qquad (1.6.19)$$

Levando este valor para K a (1.6.17) e lembrando a definição (1.6.14), as equações de Einstein ficam escritas na forma final assim:

$$R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\rho\sigma} \qquad (1.6.20)$$

Este é um sistema de 10 equações diferenciais em derivadas parciais de segunda ordem não-lineares para o tensor métrico. Este tensor possui 10 componentes, quatro das quais podem tomar valores quaisquer através de uma escolha adequada do sistema de coordenadas no espaço-tempo. Portanto, às equações de Einstein devem ser adicionadas 4 relações de vínculo para o tensor de Einstein. Estas relações já existem, e são aquelas que definem a condição de divergência nula deste tensor, ou seja, as equações (1.6.15).

Consideremos, agora, o tensor conformalmente plano, ou tensor de Weyl,

$$W_{\alpha\beta\rho\sigma} = R_{\alpha\beta\rho\sigma} - \frac{1}{2} (g_{\alpha\rho}R_{\beta\sigma} + g_{\beta\sigma}R_{\alpha\rho} - g_{\alpha\sigma}R_{\beta\rho} - g_{\beta\rho}R_{\alpha\sigma}) +$$

$$+ \frac{1}{6} R(g_{\alpha\rho}g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}) \qquad (1.6.21)$$

Este tensor, como é fácil ver, possui as mesmas propriedades de simetria (1.6.7) do tensor de curvatura e também satisfaz às identidades de Ricci (1.6.8a). Ao contrário do tensor de curvatura, porém, ele tem todos os seus traços nulos

$$g^{\alpha\rho}W_{\alpha\beta\rho\sigma} \equiv W^{\rho}{}_{\beta\rho\sigma} = 0 \qquad (1.6.22)$$

e o seu dual à esquerda é igual ao seu dual à direita

$$W^{*}_{\alpha\beta\rho\sigma} = W_{\alpha\beta\rho\sigma}^{*} \equiv \overset{*}{W}_{\alpha\beta\rho\sigma} \qquad (1.6.23)$$

Aqui, o dual é definido sobre cada par de índices de acordo com a regra (1.3.25). Os tensores η totalmente anti-simétricos de Levi-Civita são definidos como

$$\eta^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \qquad (1.6.24a)$$

e

$$\eta_{\alpha\beta\rho\sigma} = - \sqrt{-g} \quad \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \quad , \qquad (1.6.24b)$$

onde os símbolos $\underline{\varepsilon}$ estão definidos em (1.3.26), satisfazendo sempre às propriedades (1.3.29)–(1.3.30).

O tensor de Weyl, como o tensor campo eletromagnético, pode ser decomposto, ao longo da linha de universo de todo observador de quadrivelocidade u^{α} e em cada sistema de coordenadas "curvilíneas" $\{x^{\alpha}\}$, em uma parte elétrica

$$E_{\alpha\rho} = -W_{\alpha\beta\rho\sigma}u^{\beta}u^{\sigma} \qquad (1.6.25a)$$

e em uma parte magnética

$$H_{\alpha\rho} = \overset{*}{W}_{\alpha\beta\rho\sigma}u^{\beta}u^{\sigma} \ . \qquad (1.6.25b)$$

Devido à propriedade de traço nulo (1.6.22), temos que

$$E^{\rho}{}_{\rho} \equiv g^{\alpha\rho}E_{\alpha\rho} = 0 \qquad (1.6.26a)$$

da mesma forma que, pela identidade de Ricci,

$$H^{\rho}{}_{\rho} \equiv g^{\alpha\rho}H_{\alpha\rho} = 0 \qquad (1.6.26b)$$

Além do mais, pelas propriedades de simetria do tensor $W_{\alpha\beta\rho\sigma}$ e, portanto, do seu dual $\overset{*}{W}_{\alpha\beta\rho\sigma}$, temos que, de um lado,

$$E_{\alpha\rho}u^{\rho} = 0 \qquad (1.6.27a)$$

e, de outro lado,

$$H_{\alpha\rho}u^{\rho} = 0 \qquad (1.6.27b)$$

Devido ainda a essas propriedades podemos concluir, das definições (1.6.25), que

$$E_{\alpha\rho} = E_{\rho\alpha} \qquad (1.6.28a)$$

da mesma forma que

$$H_{\alpha\rho} = H_{\rho\alpha} \quad . \qquad (1.6.28b)$$

Portanto, as partes elétrica ($E_{\alpha\rho}$) e magnética ($H_{\alpha\rho}$) do tensor de Weyl são tensores de segunda ordem simétricos e de traços nulos do espaço de repouso do observador de quadrivelocidade u^{α}.

O tensor de Weyl, da mesma forma que o tensor campo eletromagnético, pode ser expresso em função de suas partes elétrica e magnética, assim[7]:

$$W_{\alpha\beta\rho\sigma} = (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\rho\sigma\lambda\tau} - g_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\rho\sigma\lambda\tau})\ u^{\mu}u^{\lambda}E^{\nu\tau} +$$

$$+ (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\rho\sigma\lambda\tau} + g_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\rho\sigma\lambda\tau})\ u^{\mu}u^{\lambda}H^{\nu\tau} \qquad (1.6.29a)$$

Quanto ao tensor dual deste tensor, sua expressão em termos de ($E_{\alpha\rho}$) e ($H_{\alpha\rho}$) é a seguinte:

$$\overset{*}{W}_{\alpha\beta\rho\sigma} = (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\rho\sigma\lambda\tau} - g_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\rho\sigma\lambda\tau})\ u^{\mu}u^{\lambda}H^{\nu\tau} -$$

$$- (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\rho\sigma\lambda\tau} + g_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\rho\sigma\lambda\tau})\ u^{\mu}u^{\lambda}E^{\nu\tau} \qquad (1.6.29b)$$

Em ambas estas expressões fizemos

$$g_{\alpha\beta\rho\sigma} \equiv g_{\alpha\rho}g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho} \ . \qquad (1.6.30)$$

Portanto, a expressão para $\overset{*}{W}_{\alpha\beta\rho\sigma}$ pode ser obtida diretamente da expressão para $W_{\alpha\beta\rho\sigma}$ pela troca, nesta última, do par $(E_{\alpha\rho}, H_{\alpha\rho})$ no par $(H_{\alpha\rho}, -E_{\alpha\rho})$.

Em toda região do espaço-tempo sem matéria, $T_{\rho\sigma} = 0$ Portanto, as equações de Einstein (1.6.20) para o campo gravitacional nesta região são escritas apenas como

$$R_{\rho\sigma} = 0 \qquad (1.6.31)$$

Portanto, o tensor de Weyl, de acordo com sua definição (1.6.21), é o tensor de curvatura do espaço-tempo vazio. Consequentemente, ele descreve o campo gravitacional sem fontes materiais.

É possível demonstrar(8) que, sendo as equações de Einstein (1.6.20) válidas em uma dada hipersuperfície do tipo - -espaço Σ, o sistema de equações

$$W^{\alpha\beta\rho\sigma}{}_{\|\sigma} = R^{\rho[\alpha\|\beta]} - \frac{1}{6}\, g^{\rho[\alpha}R^{|\beta]} \qquad (1.6.32a)$$

$$W^{\alpha\beta\rho\sigma}{}_{\|\sigma} = \frac{8\pi G}{c^4} \left\{ T^{\rho[\alpha\|\beta]} - \frac{1}{2}\, g^{\rho[\alpha}T^{|\beta]} \right\} \qquad (1.6.32b)$$

é equivalente a elas em um "sanduiche" do espaço-tempo contendo

Σ. No caso em que a região do espaço-tempo que contém Σ é vazia, as equações

$$W^{\alpha\beta\rho\sigma}{}_{\|\sigma} = 0 \qquad (1.6.33)$$

são equivalentes às equações de Einstein (1.6.31) em um "sanduiche" do espaço-tempo que contém Σ, desde que estas últimas sejam válidas em Σ. As equações (1.6.32) guardam uma grande semelhança com as equações covariantes de Maxwell-Lorentz (1.3.32). Elas são chamadas, por isto, de equações quase-maxwellianas do campo gravitacional na matéria. As equações quase -maxwellianas do campo gravitacional no vazio são as equações (1.6.33).

O campo gravitacional na matéria (isto é, o tensor de curvatura $R_{\alpha\beta\rho\sigma}$) tem 14 invariantes diferentes de zero e o campo gravitacional no vazio (ou seja, o tensor de Weyl $W_{\alpha\beta\rho\sigma}$), tem apenas 4 invariantes não nulos[(4)] Estes últimos estão definidos em (2.1.5)-(2.1.8). Suas expressões em termos das partes elétrica ($E_{\alpha\rho}$) e magnética ($H_{\alpha\rho}$) estão calculadas no Apêndice C. Transcrevâmo-las aqui para facilitar as referências.

$$A = E^{\alpha}_{\beta}E^{\beta}_{\alpha} - H^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}_{\alpha} \qquad (1.6.34)$$

$$B = 2E^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}_{\alpha} \qquad (1.6.35)$$

$$C = -E^{\alpha}_{\beta}E^{\beta}_{\rho}E^{\rho}_{\alpha} + 3H^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}_{\rho}E^{\rho}_{\alpha} \qquad (1.6.36)$$

$$D = H^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}_{\rho}H^{\rho}_{\alpha} - 3E^{\alpha}_{\beta}E^{\beta}_{\rho}H^{\rho}_{\alpha} \qquad (1.6.37)$$

CAPÍTULO 2

AS IDENTIDADES DUAIS DO TENSOR DE WEYL

2.1 - *Introdução*

No Capítulo anterior, referímo-nos ao valor heurístico que tem, para o desenvolvimento da teoria da gravitação de Einstein, sua semelhança formal com a teoria eletromagnética de Maxwell. A origem de tal semelhança nós identificamos na propriedade de antesimetria, comum ao tensor de Weyl ($W_{\alpha\beta\mu\nu}$) — que representa o campo gravitacional no vazio — e ao tensor eletromagnético ($F_{\alpha\beta}$), não obstante existirem outras propriedades que distinguem tão profundamente esses dois tensores.

Neste Capítulo, procuraremos tirar o maior proveito da analogia formal entre a teoria da gravitação de Einstein e a teoria eletromagnética de Maxwell.

O objetivo principal deste trabalho é encontrar todas as identidades duais do campo gravitacional no vazio. Esta tarefa será facilitada em muito pela analogia com as identidades duais do campo eletromagnético, encontradas anteriormente.

O campo eletromagnético ($F_{\alpha\beta}$) tem apenas dois invariantes,

$$\phi = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \qquad (2.1.1)$$

$$\psi = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}\overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} \qquad (2.1.2)$$

e duas identidades duais,

$$F_{\alpha\lambda}F_{\beta}{}^{\lambda} - \overset{*}{F}_{\alpha\lambda}\overset{*}{F}_{\beta}{}^{\lambda} = \phi\, g_{\alpha\beta} \qquad (2.1.3)$$

$$F_{\alpha\lambda}\overset{*}{F}{}^{\lambda}{}_{\beta} = \overset{*}{F}_{\alpha\lambda}F^{\lambda}{}_{\beta} = + \frac{\psi}{2}\, g_{\alpha\beta} \qquad (2.1.4)$$

onde $\overset{*}{F}_{\alpha\beta}$ é o dual de $F_{\alpha\beta}$, definido em (1.3.25). A pergunta natural que surge é a seguinte: "Quantas identidades duais deve ter o campo gravitacional no vazio ?". Fiéis à analogia que resolvemos promover, a resposta correta parece ser a seguinte: "O campo gravitacional no vazio deve ter tantas identidades duais quantos são os seus invariantes". Os invariantes do campo gravitacional no vazio são quatro, a saber(4):

$$A = \frac{1}{8} W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} \qquad (2.1.5)$$

$$B = \frac{1}{8} W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}\overset{*}{W}{}^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} \qquad (2.1.6)$$

$$C = \frac{1}{16} W^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}W^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} \qquad (2.1.7)$$

$$D = \frac{1}{16} W^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}W^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\overset{*}{W}{}^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} \qquad (2.1.8)$$

onde $\overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o dual do tensor de Weyl ($W_{\alpha\beta\mu\nu}$), definido em (1.3.25). Por conseguinte, deverão ser também quatro as identidades duais do campo gravitacional no vazio, que iremos procurar.

Antes de fazermos isto, porém, chamemos a atenção para mais um detalhe que a analogia faz crer ser importante. O invariante ϕ do campo eletromagnético — como vemos de sua definição (2.1.1) — é quadrático no tensor ($F_{\alpha\beta}$) e o invariante ψ deste cam po — de acordo com sua definição (2.1.2) — é quadrático no campo ($F_{\alpha\beta}$) e no seu dual ($\overset{*}{F}_{\alpha\beta}$). Por outro lado, as identidades duais do campo eletromagnético — definidas em (2.1.3) e (2.1.4) — também são quadráticas no campo e no seu dual. Novamente, portanto, surge naturalmente a pergunta: "Qual deverá ser a ordem das quatro identidades duais do campo gravitacional no vazio ?". A resposta correta surge quando fixamos a atenção na ordem dos quatro invariantes (2.1.5)-(2.1.8): "O campo gravitacional no vazio possui duas identidades duais de segunda ordem e duas identidades duais de terceira ordem no tensor de Weyl ($W_{\alpha\beta\mu\nu}$) e no seu dual ($\overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$)".

Passemos, agora, ao cálculo efetivo de todas as identidades duais do tensor de Weyl.

2.2 - *Identidades Duais de Segunda Ordem*

Inicialmente, façamos uma retrospectiva histórica do estado das coisas neste domínio até o presente momento.

Na literatura científica, são concluidas duas identidades duais do campo gravitacional no vazio. A primeira delas, obtida por Lanczos em 1938 (5), relaciona o invariante A com a contração em três índices do tensor de Weyl consigo mesmo, ou seja,

$$W_{\alpha\lambda\rho\sigma}W_{\beta}{}^{\lambda\rho\sigma} = 2Ag_{\alpha\beta} \qquad (2.2.1)$$

Esta relação foi obtida usando o tensor de Weyl expresso em termos do símbolo de Christoffel. A segunda identidade, encontrada por Debever em 1958 (6), é a equivalente gravitacional à identidade (2.1.3) eletromagnética:

$$W_{\alpha\rho\mu\sigma}W_{\beta}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} - \overset{*}{W}_{\alpha\rho\nu\sigma}\overset{*}{W}_{\beta}{}^{\rho}{}_{\mu}{}^{\sigma} = A g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \tag{2.2.2}$$

Ao deduzí-la, Debever fez uso explícito da identidade (2.2.1). Contraindo (2.2.2) nos índices (μ,ν) e considerando que

$$\overset{*}{W}_{\alpha\rho\mu\sigma}\overset{*}{W}_{\beta}{}^{\rho\mu\sigma} = \overset{**}{W}_{\alpha\rho\mu\sigma}W_{\beta}{}^{\rho\mu\sigma} = - W_{\alpha\rho\mu\sigma}W_{\beta}{}^{\rho\mu\sigma}, \tag{2.2.3}$$

nós obtemos a identidade de Lanczos, (2.2.1). A identidade de Debever é primária, a de Lanczos é derivada. De passagem, notemos que a contração da identidade de Lanczos nos índices (α,β) nos devolve à definição (2.1.5) do invariante A.

A identidade de Debever pode ser escrita de outra forma. Com efeito, reescrevamos (2.2.2) com os índices (α,β) em cima e, novamente, com suas posições trocadas. Somando as duas identidades assim obtidas membro a membro e simetrizando a expressão final nos índices (α,β), obtemos que

$$W^{(\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}W^{\beta)\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} - \overset{*}{W}{}^{(\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}\overset{*}{W}{}^{\beta)\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} = A g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} , \tag{2.2.4}$$

onde a simetrização é definida assim:

$$a_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2} (a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}) \tag{2.2.5}$$

A identidade acima não tem correspondente eletromagnética, mas tem a vantagem de poder ser deduzida diretamente, sem o auxílio de nenhuma identidade previamente conhecida. A dedução que fare nos aqui será longa, mas tem várias vantagens, entre as quais a de fornecer as expressões de $W^{\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}W^{\beta\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma}$ e $\overset{*}{W}{}^{\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}\overset{*}{W}{}^{\beta\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma}$ em termos dos tensores elétrico ($E_{\alpha\beta}$) e magnético ($H_{\alpha\beta}$), que serão de grande importância em si mesmas.

Com a finalidade de efetuarmos a referida dedução, nós usaremos as decomposições do tensor de Weyl e de seu dual nas respectivas partes elétrica e magnética ($E_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$), na forma em que são usadas por Ellis(7). Assim, o tensor de Weyl ($W_{\alpha\beta\mu\nu}$) é decomposto como

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = (\eta_{\alpha\beta\rho\sigma}\eta_{\mu\nu\lambda\tau} - g_{\alpha\beta\rho\sigma}g_{\mu\nu\lambda\tau})u^{\rho}u^{\lambda}E^{\sigma\tau} +$$

$$+ (\eta_{\alpha\beta\rho\sigma}g_{\mu\nu\lambda\tau} + g_{\alpha\beta\rho\sigma}\eta_{\mu\nu\lambda\tau})u^{\rho}u^{\lambda}H^{\sigma\tau} \qquad (2.2.6)$$

e seu dual ($\overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$), como em (1.3.25):

$$\overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = (\eta_{\alpha\beta\rho\sigma}\eta_{\mu\nu\lambda\tau} - g_{\alpha\beta\rho\sigma}g_{\mu\nu\lambda\tau})u^{\rho}u^{\lambda}H^{\sigma\tau} -$$

$$- (\eta_{\alpha\beta\rho\sigma}g_{\mu\nu\lambda\tau} + g_{\alpha\beta\rho\sigma}g_{\mu\nu\lambda\tau})u^{\rho}u^{\lambda}E^{\sigma\tau} \qquad (2.2.7)$$

onde

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} \qquad (2.2.8)$$

Na realidade, será suficiente deduzirmos a expressão de $W^{\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}W^{\beta\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma}$ em função dos tensores $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$, porquanto, como podemos notar comparando (2.2.7) com (2.2.6), a expressão de $\overset{*}{W}{}^{\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}\overset{*}{W}{}^{\beta\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma}$ pode ser obtida pela substituição, na anterior, de

$E_{\alpha\beta}$ por $H_{\alpha\beta}$ e de $H_{\alpha\beta}$ por $-E_{\alpha\beta}$. Os cálculos da expressão

$$
\begin{aligned}
W^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha\varepsilon\beta\tau} = & \Big[(\eta^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs} - g^{\alpha\mu pq}g^{\beta\nu rs})u_p u_r E_{qs} + \\
& + (\eta^{\alpha\mu pq}g^{\beta\nu rs} + g^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs})u_p u_r H_{qs}\Big] \times \\
& \times \Big[(\eta_{\alpha\varepsilon ab}\eta_{\beta\tau cd} - g_{\alpha\varepsilon ab}g_{\beta\tau cd})u^a u^c E^{bd} + \\
& + (\eta_{\alpha\varepsilon ab}g_{\beta\tau cd} + g_{\alpha\varepsilon ab}\eta_{\beta\tau cd})u^a u^c H^{bd}\Big] \qquad (2.2.9)
\end{aligned}
$$

serão feitos parcela por parcela, onde constarão explicitamente as passagens principais.

1ª Parcela

$$
\eta^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}\eta_{\alpha\varepsilon ab}\eta_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c E_{qs}E^{bd} =
$$

$$
= \delta^{\mu pq}_{\varepsilon ab}\delta^{\nu rs}_{\tau cd}u_p u_r u^a u^c E_{qs}E^{bd} =
$$

$$
\begin{aligned}
= & (\delta^{\mu}_{\varepsilon}\delta^{p}_{a}\delta^{q}_{b} + \delta^{p}_{\varepsilon}\delta^{q}_{a}\delta^{\mu}_{b} + \delta^{q}_{\varepsilon}\delta^{\mu}_{a}\delta^{p}_{b} - \delta^{p}_{\varepsilon}\delta^{\mu}_{a}\delta^{q}_{b} - \delta^{\mu}_{\varepsilon}\delta^{q}_{a}\delta^{p}_{b} - \delta^{q}_{\varepsilon}\delta^{p}_{a}\delta^{\mu}_{b}) \times \\
& \times (\delta^{\nu}_{\tau}\delta^{r}_{c}\delta^{s}_{d} + \delta^{r}_{\tau}\delta^{s}_{c}\delta^{\nu}_{d} + \delta^{s}_{\tau}\delta^{\nu}_{c}\delta^{r}_{d} - \delta^{r}_{\tau}\delta^{\nu}_{c}\delta^{s}_{d} - \delta^{\nu}_{\tau}\delta^{s}_{c}\delta^{r}_{d} - \delta^{s}_{\tau}\delta^{r}_{c}\delta^{\nu}_{d}) \times \\
& \times u_p u_r u^a u^c E_{qs}E^{bd} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & (\delta^{\mu}_{\varepsilon}\delta^{\nu}_{\tau} - u^{\mu}u_{\varepsilon}\delta^{\nu}_{\tau} - u^{\nu}u_{\tau}\delta^{\mu}_{\varepsilon} + u^{\mu}u_{\varepsilon}u^{\nu}u_{\tau})E^2 + E^{\mu\nu}E_{\varepsilon\tau} - \\
& - \delta^{\mu}_{\varepsilon}E_{\tau\alpha}E^{\alpha\nu} - \delta^{\nu}_{\tau}E_{\varepsilon\alpha}E^{\alpha\mu} + u^{\mu}u_{\varepsilon}E_{\tau\alpha}E^{\alpha\nu} + u^{\nu}u_{\tau}E_{\varepsilon\alpha}E^{\alpha\mu}
\end{aligned}
$$

2ª Parcela

$$-\eta^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs} g_{\alpha\varepsilon ab} g_{\beta\tau cd} u_p u_r u^a u^c E_{qs} E^{bd} =$$

$$= \delta^{\alpha\mu pq}_{\beta\lambda rs} (g_{\alpha a} g_{\varepsilon b} - g_{\alpha b} g_{\varepsilon a})(\delta^{\beta}_{c} g_{\tau d} - \delta^{\beta}_{d} g_{\tau c}) g^{\lambda\nu} u_p u^r u^a u^c E^{s}_{q} E^{bd} =$$

$$= \delta^{\alpha\mu pq}_{\beta\lambda rs} (u_\alpha g_{\varepsilon b} - u_\varepsilon g_{\alpha b})(u^\beta g_{\tau d} - u_\tau \delta^{\beta}_{d})\, g^{\lambda\nu} u_p u^r E^{s}_{q} E^{bd} =$$

$$= g^{\lambda\nu} \delta^{\alpha\mu pq}_{\beta\lambda rs} u_\varepsilon u_\tau u_p u^r E^{s}_{q} E^{\beta}_{\cdot\alpha} =$$

$$= g^{\lambda\nu} \begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\beta} & \delta^{\alpha}_{\lambda} & \delta^{\alpha}_{r} & \delta^{\alpha}_{s} \\ \delta^{\mu}_{\beta} & \delta^{\mu}_{\lambda} & \delta^{\mu}_{r} & \delta^{\mu}_{s} \\ \delta^{p}_{\beta} & \delta^{p}_{\lambda} & \delta^{p}_{r} & \delta^{p}_{s} \\ \delta^{q}_{\beta} & \delta^{q}_{\lambda} & \delta^{q}_{r} & \delta^{q}_{s} \end{vmatrix} u_\varepsilon u_\tau u_p u^r E^{s}_{q} E^{\beta}_{\alpha} =$$

$$= (u_\varepsilon u_\tau u^\mu u^\nu - u_\varepsilon u_\tau g^{\mu\nu}) E^2 + 2 u_\varepsilon u_\tau E^{\mu}_{\cdot\alpha} E^{\alpha\nu}$$

3ª Parcela

$$\eta^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs} \eta_{\alpha\varepsilon ab} g_{\beta\tau cd} u_p u_r u^a u^c E_{qs} H^{bd} =$$

$$= -\eta^{\beta\nu rs} \delta^{\mu pq}_{\varepsilon ab} (g_{\beta c} g_{\tau d} - g_{\beta d} g_{\tau c}) u_p u_r u^a u^c E_{qs} H^{bd} =$$

$$= -\eta^{\beta\nu rs} \delta^{\mu pq}_{\varepsilon ab} (u_\beta g_{\tau d} - u_\tau g_{\beta d}) u_p u_r u^a E_{qs} H^{bd} =$$

$$= \eta^{\beta\nu rs} \delta^{\mu pq}_{\varepsilon ab}\, u_\tau u_p u_r u^a E_{qs} H^{b}_{\cdot\beta} =$$

$$= \eta^{\beta\nu rs} u_\tau u_\mu \delta^\mu_\varepsilon E^\alpha_s H_{\alpha\beta} - \eta^{\beta\nu rs} u_\varepsilon u^\mu u_r u_\tau E^\alpha_s H_{\alpha\beta} -$$

$$- \eta^{\beta\nu rs} u_\tau u_r E_{\varepsilon s} H^\mu_\beta$$

[illegible]ª Parcela

$$\eta^{\alpha\mu pq} \eta^{\beta\nu rs} g_{\alpha\varepsilon ab} \eta_{\beta\tau cd} u^a u^c u_p u_r E_{qs} H^{bd} =$$

$$= - \eta^{\alpha\mu pq} \delta^{\nu rs}_{\tau cd} (g_{\alpha a} g_{\varepsilon b} - g_{\alpha b} g_{\varepsilon a}) u^a u^c u_p u_r E_{qs} H^{bd} =$$

$$= - \eta^{\alpha\mu pq} \delta^{\nu rs}_{\tau cd} (u_\alpha g_{\varepsilon b} - u_\varepsilon g_{\alpha b}) u^c u^p u_r E_{qs} H^{bd} =$$

$$= \eta^{\alpha\mu pq} \delta^{\nu rs}_{\tau cd} \; u_\varepsilon u^c u_p u_r E_{qs} H^d_\alpha =$$

$$= \eta^{\alpha\mu pq} u_\varepsilon u_p \delta^\nu_\tau E_{\beta q} H^\beta_\alpha - \eta^{\alpha\mu pq} u_\varepsilon u_\tau u^\nu u_p E_{\beta q} H^\beta_\alpha -$$

$$- \eta^{\alpha\mu pq} u_\varepsilon u_p E_{\tau q} H^\nu_\alpha$$

[illegible]ª Parcela

$$\eta^{\alpha\mu pq} g^{\beta\nu rs} \eta_{\alpha\varepsilon ab} \eta_{\beta\tau cd} u_p u_r u^a u^c E_{qs} E^{bd} =$$

$$= + \eta^{\alpha\lambda ab} g_{\lambda\varepsilon} \eta_{\beta\tau cd} (\delta^p_\alpha g^{\mu q} - \delta^q_\alpha g^{\mu p}) (g^{\beta r} g^{\nu s} - g^{\beta s} g^{\nu r}) \times$$

$$\times (u_p u_r u_a u^c E_{qs} E^d_b) =$$

$$= - g_{\lambda\varepsilon}\delta^{\alpha\lambda ab}_{\beta\tau cd}(u_\alpha g^{\mu q} - u^\mu \delta^q_\alpha)(u^\beta g^{\nu s} - u^\nu g^{\beta s})\ u_a u^c E_{qs} E^d_b =$$

$$= - g_{\lambda\varepsilon}\delta^{\alpha\lambda ab}_{\beta\tau cd}\ u^\mu u^\nu u_a u^c E^\beta_\alpha E^d_b =$$

$$= - g_{\lambda\varepsilon}\cdot \begin{vmatrix} \delta^\alpha_\beta & \delta^\alpha_\tau & \delta^\alpha_c & \delta^\alpha_d \\ \delta^\lambda_\beta & \delta^\lambda_\tau & \delta^\lambda_c & \delta^\lambda_d \\ \delta^a_\beta & \delta^a_\tau & \delta^a_c & \delta^a_d \\ \delta^b_\beta & \delta^b_\tau & \delta^b_c & \delta^b_d \end{vmatrix}\ u^\mu u^\nu u_a u^c E^\beta_\alpha E^d_b =$$

$$= (-u^\mu u^\nu u_\varepsilon u_\tau + u^\mu u^\nu g_{\varepsilon\tau})E^2 - 2u^\mu u^\nu E_{\tau\alpha}E^\alpha_\varepsilon$$

6ª Parcela

$$g^{\alpha\mu pq} g^{\beta\nu rs} g_{\alpha\varepsilon ab} g_{\beta\tau cd} u_p u_r u^a u^c E_{qs} E^{bd} =$$

$$= (g^{\alpha p} g^{\mu q} - g^{\alpha q} g^{\mu p})(g^{\beta r} g^{\nu s} - g^{\beta s} g^{\nu r})(g_{\alpha a} g_{\varepsilon b} - g_{\alpha b} g_{\varepsilon a}) \times$$

$$\times (g_{\beta c} g_{\tau d} - g_{\beta d} g_{\tau c}) u_p u_r u^a u^c E_{qs} E^{bd} =$$

$$= (u^\alpha g^{\mu q} - u^\mu g^{\alpha q})(u^\beta g^{\nu s} - u^\nu g^{\beta s})(u_\alpha g_{\varepsilon b} - u_\varepsilon g_{\alpha b}) \times$$

$$\times (u_\beta g_{\tau d} - u_\tau g_{\beta d})\ E_{qs} E^{bd} =$$

$$= u^\mu u^\nu u_\varepsilon u_\tau E^2 + u^\nu u_\tau E^\alpha_\varepsilon E^\mu_\alpha + u^\mu u_\varepsilon E^\alpha_\tau E^\nu_\alpha + E^{\mu\nu} E_{\varepsilon\tau}$$

7ª Parcela

$$g^{\alpha\mu pq}g^{\beta\nu rs}\eta_{\alpha\epsilon ab}g_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c E_{qs}H^{bd} =$$

$$= \eta_{\alpha\epsilon ab}(g^{\alpha p}g^{\mu q} - g^{\alpha q}g^{\mu p})(g^{\beta r}g^{\nu s} - g^{\beta s}g^{\nu r})(g_{\beta c}g_{\tau d} - g_{\beta d}g_{\tau c}) \times$$

$$\times (u_p u_r u^a u^c E_{qs}H^{bd}) =$$

$$= \eta_{\alpha\epsilon ab}(u^{\alpha}g^{\mu q} - u^{\mu}g^{\alpha q})(u^{\beta}g^{\nu s} - u^{\nu}g^{\beta s})(u_{\beta}g_{\tau c} - u_{\tau}g_{\beta c}) \times$$

$$\times u^a E_{qs}H^{bd} =$$

$$= - \eta_{\alpha\epsilon ab}u^{\mu}u^a E^{\alpha\nu}H^b_{\tau} - \eta_{\alpha\epsilon ab}u^{\mu}u^{\nu}u_{\tau}u^a E^{\alpha}_{\rho}H^{\rho b}$$

8ª Parcela

$$g^{\alpha\mu pq}g^{\beta\nu rs}g_{\alpha\epsilon ab}\eta_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c E_{qs}H^{bd} =$$

$$= \eta_{\beta\tau cd}(g^{\alpha p}g^{\mu q} - g^{\alpha q}g^{\mu p})(g^{\beta r}g^{\nu s} - g^{\beta s}g^{\nu r}) \times$$

$$\times (g_{\alpha a}g_{\epsilon b} - g_{\alpha b}g_{\epsilon a})u_p u_r u^a u^c E_{qs}H^{bd} =$$

$$-\eta_{\beta\tau cd}u^{\nu}u^c E^{\mu\beta}H^d_{\epsilon} - \eta_{\beta\tau cd}u^{\mu}u^{\nu}u_{\epsilon}u^c E^{\alpha\beta}H^d_{\alpha}$$

9ª Parcela

$$\eta^{\alpha\mu pq}g^{\beta\nu rs}\eta_{\alpha\epsilon ab}g_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c H_{qs}E^{bd} =$$

$$= - \eta_{\beta\tau cd}\delta^{\mu pq}_{\varepsilon ab}(g^{\beta r}g^{\nu s} - g^{\beta s}g^{\nu r})u_p u_r u^a u^c H_{qs}E^{bd} =$$

$$= - \eta_{\beta\tau cd}(\delta^{\mu}_{\varepsilon}\delta^{p}_{a}\delta^{q}_{b} + \delta^{p}_{\varepsilon}\delta^{q}_{a}\delta^{\mu}_{b} + \delta^{q}_{\varepsilon}\delta^{\mu}_{a}\delta^{p}_{b} - \delta^{p}_{\varepsilon}\delta^{\mu}_{a}\delta^{q}_{b} - \delta^{\mu}_{\varepsilon}\delta^{q}_{a}\delta^{p}_{b} -$$

$$- \delta^{q}_{\varepsilon}\delta^{p}_{a}\delta^{\mu}_{b})(u^{\beta}g^{\nu s} - u^{\nu}g^{\beta s})u_p u^a u^c H_{qs}E^{bd} =$$

$$= \eta_{\beta\tau cd}u^{\nu}u^{c}\delta^{\mu}_{\varepsilon}E^{d}_{\alpha}H^{\alpha\beta} - \eta_{\beta\tau cd}u^{\nu}u^{c}E^{\mu d}H^{\beta}_{\varepsilon} -$$

$$- \eta_{\beta\tau cd}u^{\mu}u^{\nu}u_{\varepsilon}u^{c}H^{\alpha\beta}E^{d}_{\alpha}$$

<u>10ª Parcela</u>

$$\eta^{\alpha\mu pq}g^{\beta\nu rs}g_{\alpha\varepsilon ab}g_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c H_{qs}E^{bd} =$$

$$= \eta^{\alpha\mu pq}(g^{\beta r}g^{\nu s} - g^{\beta s}g^{\nu r})(g_{\alpha a}g_{\varepsilon b} - g_{\alpha b}g_{\varepsilon a})(g_{\beta c}g_{\tau d} - g_{\beta d}g_{\tau c}) \times$$

$$\times (u_p u_r u^a u^c H_{qs}E^{bd}) =$$

$$= \eta^{\alpha\mu pq}(u^{\beta}g^{\nu s} - u^{\nu}g^{\beta s})(u_{\alpha}g_{\varepsilon b} - u_{\varepsilon}g_{\alpha b})(u_{\beta}g_{\tau d} - u_{\tau}g_{\beta d}) \times$$

$$\times (u_p H_{qs}E^{bd}) =$$

$$= - \eta^{\alpha\mu pq}u_{\varepsilon}u_p H^{\nu}_{q}E_{\alpha\tau} - \eta^{\alpha\mu pq}u_p u_{\varepsilon}u^{\nu}u_{\tau}H_{q\lambda}E^{\lambda}_{\alpha}$$

<u>11ª Parcela</u>

$$\eta^{\alpha\mu pq}g^{\beta\nu rs}\eta_{\alpha\varepsilon ab}g_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c H_{qs}H^{bd} =$$

$$= - \delta^{\mu pq}_{\varepsilon ab}(g^{\beta r}g^{\nu s} - g^{\beta s}g^{\nu r})(g_{\beta c}g_{\tau d} - g_{\beta d}g_{\tau c})u_p u_r u^a u^c H_{qs}H^{bd} =$$

$$= - \delta^{\mu}_{\varepsilon}H_{\tau\alpha}H^{\alpha\nu} - u^{\nu}u_{\tau}\delta^{\mu}_{\varepsilon}H^2 + H^{\nu}_{\varepsilon}H^{\mu}_{\tau} + u^{\nu}u_{\tau}H_{\varepsilon\alpha}H^{\alpha\mu} +$$

$$+ u^{\mu}u_{\varepsilon}H_{\tau\alpha}H^{\alpha\nu} + u^{\mu}u_{\varepsilon}u^{\nu}u_{\tau}H^2$$

12ª Parcela

$$\eta^{\alpha\mu pq}g^{\beta\nu rs}g_{\alpha\varepsilon ab}\eta_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c H_{qs}H^{bd} =$$

$$= - \delta^{\alpha\mu pq}_{\beta\tau cd}(g^{\beta r}g^{\nu s} - g^{\beta s}g^{\nu r})(g_{\alpha a}g_{\varepsilon b} - g_{\alpha b}g_{\varepsilon a}) \times$$

$$\times (u_p u_r u^a u^c H_{qs}H^{bd}) =$$

$$= - \delta^{\alpha\mu pq}_{\beta\tau cd}(u^{\beta}g^{\nu s} - u^{\nu}g^{\beta s})(u_{\alpha}g_{\varepsilon b} - u_{\varepsilon}g_{ab})u_p u^c H_{qs}H^{bd} =$$

$$= - \delta^{\alpha\mu pq}_{\beta\tau cd}\, u_p u^c u^{\nu} u_{\varepsilon} H^{\beta}_{q} H^{d}_{\alpha} =$$

$$\begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\beta} & \delta^{\alpha}_{\tau} & \delta^{\alpha}_{c} & \delta^{\alpha}_{d} \\ \delta^{\mu}_{\beta} & \delta^{\mu}_{\tau} & \delta^{\mu}_{c} & \delta^{\mu}_{d} \\ \delta^{p}_{\beta} & \delta^{p}_{\tau} & \delta^{p}_{c} & \delta^{p}_{d} \\ \delta^{q}_{\beta} & \delta^{q}_{\tau} & \delta^{q}_{c} & \delta^{q}_{d} \end{vmatrix} u_p u^c u^{\nu} u_{\varepsilon} H^{\beta}_{q} H^{d}_{\alpha} =$$

$$= (- u^{\nu}u_{\varepsilon}\delta^{\mu}_{\tau} + u^{\nu}u_{\varepsilon}u^{\mu}u_{\tau}) E^2 + 2u^{\nu}u_{\varepsilon}H_{\tau\alpha}H^{\alpha\mu}$$

13ª Parcela

$$g^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}\eta_{\alpha\varepsilon ab}\eta_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c H_{qs}E^{bd} =$$

$$= -\eta_{\alpha\varepsilon ab}\delta^{\nu rs}_{\tau cd}(g^{\alpha p}g^{\mu q} - g^{\alpha q}g^{\mu p})u_p u_r u^a u^c H_{qs}E^{bd} =$$

$$= -\eta_{\alpha\varepsilon ab}\delta^{\nu rs}_{\tau cd}(u^\alpha g^{\mu q} - u^\mu g^{\alpha q})u_r u^a u^c H_{qs}E^{bd} =$$

$$= \eta_{\alpha\varepsilon ab}\delta^{\nu rs}_{\tau cd}u_r u^\mu u^a u^c H^\alpha_s E^{bd} =$$

$$= \eta_{\alpha\varepsilon ab}u^a u^\mu \delta^\nu_\tau H^\alpha_\beta E^{\beta d} - \eta_{\alpha\varepsilon ab}u^a u^\nu u^\mu u_\tau H^\alpha_d E^{db} -$$

$$- \eta_{\alpha\varepsilon ab}u^a u^\mu H^\alpha_\tau E^{b\nu}$$

14ª Parcela

$$g^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}g_{\alpha\varepsilon ab}g_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c H_{qs}E^{bd} =$$

$$= \eta^{\beta\nu rs}(g^{\alpha p}g^{\mu q} - g^{\alpha q}g^{\mu p})(g_{\alpha a}g_{\varepsilon b} - g_{\alpha b}g_{\varepsilon a})(g_{\beta c}g_{\tau d} - g_{\beta d}g_{\tau c}) \times$$

$$\times (u_p u_r u^a u^c H_{qs}E^{bd}) =$$

$$= \eta^{\beta\nu rs}(u^\alpha g^{\mu q} - u^\mu g^{\alpha q})(u_\alpha g_{\varepsilon b} - u_\varepsilon g_{\alpha b})(u_\beta g_{\tau d} - u_\tau g_{\beta d}) \times$$

$$\times (u_r H_{qs}E^{bd}) =$$

$$= -\eta^{\beta\nu rs}u_r u_\tau H^\mu_s E_{\varepsilon\beta} - \eta^{\beta\nu rs}u_\varepsilon u_\tau u^\mu u_r H_{s\lambda}E^\lambda_\beta$$

15ª Parcela

$$g^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}\eta_{\alpha\varepsilon ab}g_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c H_{qs}H^{bd} =$$

$$= -\delta^{\nu rs\beta}_{\varepsilon ab\alpha}(g^{\alpha p}g^{\mu q}-g^{\alpha q}g^{\mu p})(g_{\beta c}g_{\tau d}-g_{\beta d}g_{\tau c})u_p u_r u^a u^c H_{qs}H^{bd}$$

$$= -\delta^{\nu rs\beta}_{\varepsilon ab\alpha}(u^{\alpha}g^{\mu q} - u^{\mu}g^{\alpha q})(u_{\beta}g_{\tau d} - u_{\tau}g_{\beta d})u_r u^a H_{qs}H^{bd} =$$

$$= -\delta^{\beta\nu rs}_{\alpha\varepsilon ab}u^{\mu}u_{\tau}u_r u^a H^{\alpha}_{s}H^{b}_{\beta} =$$

$$= -\begin{vmatrix} \delta^{\beta}_{\alpha} & \delta^{\beta}_{\varepsilon} & \delta^{\beta}_{a} & \delta^{\beta}_{d} \\ \delta^{\nu}_{\alpha} & \delta^{\nu}_{\varepsilon} & \delta^{\nu}_{a} & \delta^{\nu}_{d} \\ \delta^{r}_{\alpha} & \delta^{r}_{\varepsilon} & \delta^{r}_{a} & \delta^{r}_{d} \\ \delta^{s}_{\alpha} & \delta^{s}_{\varepsilon} & \delta^{s}_{a} & \delta^{s}_{d} \end{vmatrix} u^{\mu}u_{\tau}u_r u^a H^{\alpha}_{s}H^{d}_{\beta} =$$

$$= (-u^{\mu}u_{\tau}\delta^{\nu}_{\varepsilon} + u^{\mu}u_{\tau}u^{\nu}u_{\varepsilon})H^2 + 2u^{\mu}u_{\tau}H_{\varepsilon\alpha}H^{\alpha\nu}$$

16ª Parcela

$$g^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}g_{\alpha\varepsilon ab}\eta_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c H_{qs}H^{bd} =$$

$$= -\delta^{\nu rs}_{\tau cd}(u^{\alpha}g^{\mu q} - u^{\mu}g^{\alpha q})(u_{\alpha}g_{\varepsilon b} - u_{\varepsilon}g_{\alpha b})u_r u^c H_{qs}H^{bd} =$$

$$= (-u^{\mu}u_{\varepsilon}\delta^{\nu}_{\tau} + u^{\mu}u_{\varepsilon}u^{\nu}u_{\tau})H^2 - \delta^{\nu}_{\tau}H_{\varepsilon\alpha}H^{\alpha\mu} + u^{\nu}u_{\tau}H_{\varepsilon\alpha}H^{\alpha\nu} +$$

$$+ u^{\mu}u_{\varepsilon}H_{\tau\alpha}H^{\alpha\nu} + H^{\mu}_{\tau}H^{\nu}_{\varepsilon}$$

A primeira expressão que nos propusemos encontrar é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
W^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha\varepsilon\beta\tau} = {} & (\delta^{\mu}_{\varepsilon}\delta^{\nu}_{\tau} - u^{\nu}u_{\tau}\delta^{\mu}_{\varepsilon} - u^{\mu}u_{\varepsilon}\delta^{\nu}_{\tau} - u_{\varepsilon}u_{\tau}g^{\mu\nu} - \\
& - u^{\mu}u^{\nu}g_{\varepsilon\tau} + 4u^{\mu}u_{\varepsilon}u^{\nu}u_{\tau})E^{2} + (-u^{\nu}u_{\tau}\delta^{\mu}_{\varepsilon} - u^{\mu}u_{\varepsilon}\delta^{\nu}_{\tau} - \\
& - u^{\mu}u_{\tau}\delta^{\nu}_{\varepsilon} - u^{\nu}u_{\varepsilon}\delta^{\mu}_{\tau} + 4u^{\mu}u_{\varepsilon}u^{\nu}u_{\tau})H^{2} + (-\delta^{\mu}_{\varepsilon}E_{\tau\alpha}E^{\alpha\nu} - \\
& - \delta^{\nu}_{\tau}E_{\varepsilon\alpha}E^{\alpha\mu} + 2E_{\varepsilon\tau}E^{\mu\nu} + 2u^{\nu}u_{\tau}E_{\varepsilon\alpha}E^{\alpha\mu} + 2u^{\mu}u_{\varepsilon}E_{\tau\alpha}E^{\alpha\nu} + \\
& + 2u_{\varepsilon}u_{\tau}E^{\mu}_{\alpha}E^{\alpha\nu} + 2u^{\mu}u^{\nu}E_{\tau\alpha}E^{\alpha}_{\varepsilon}) + (-\delta^{\mu}_{\varepsilon}H_{\tau\alpha}H^{\alpha\nu} - \delta^{\nu}_{\tau}H_{\varepsilon\alpha}H^{\alpha\mu} + \\
& + 2H^{\nu}_{\varepsilon}H^{\mu}_{\tau} + 2u^{\nu}u_{\tau}H_{\varepsilon\alpha}H^{\alpha\mu} + 2u^{\mu}u_{\varepsilon}H_{\tau\alpha}H^{\alpha\nu} + 2u^{\nu}u_{\varepsilon}H^{\mu}_{\alpha}H^{\alpha}_{\tau} + \\
& + 2u^{\mu}u_{\tau}H^{\alpha}_{\varepsilon}H^{\nu}_{\alpha}) + \eta^{\nu\alpha\rho\sigma}u_{\tau}u_{\rho}\ (-\delta^{\mu}_{\varepsilon}E^{\beta}_{\sigma}H_{\alpha\beta} + u^{\mu}u_{\varepsilon}E^{\beta}_{\sigma}H_{\alpha\beta} + \\
& + E_{\varepsilon\sigma}H^{\mu}_{\alpha} + H^{\mu}_{\sigma}E_{\varepsilon\alpha} - u^{\mu}u_{\varepsilon}H^{\beta}_{\sigma}E_{\alpha\beta}) + \eta^{\mu\alpha\rho\sigma}u_{\varepsilon}u_{\rho}\ (-\delta^{\nu}_{\tau}H_{\alpha\beta}E^{\beta}_{\sigma} + \\
& + u^{\nu}u_{\tau}H_{\alpha\beta}E^{\beta}_{\sigma} + H^{\nu}_{\alpha}E_{\tau\sigma} - H^{\nu}_{\sigma}E_{\tau\alpha} - u^{\nu}u_{\tau}H^{\beta}_{\sigma}E_{\alpha\beta}) + \\
& + \eta_{\varepsilon\alpha\rho\sigma}u^{\mu}u^{\rho}\ (-\delta^{\nu}_{\tau}H^{\alpha\beta}E^{\sigma}_{\beta} - E^{\alpha\nu}H^{\sigma}_{\tau} + H^{\alpha}_{\tau}E^{\nu\sigma} - u^{\nu}u_{\tau}E^{\alpha\beta}H^{\sigma}_{\beta} + \\
& + u^{\nu}u_{\tau}H^{\alpha\beta}E^{\sigma}_{\beta}) + \eta_{\tau\alpha\rho\sigma}u^{\nu}u^{\rho}\ (-\delta^{\mu}_{\varepsilon}H^{\alpha\beta}E^{\sigma}_{\beta} - E^{\mu\alpha}H^{\sigma}_{\varepsilon} + \\
& + H^{\beta}_{\sigma}E^{\mu\sigma} - u^{\mu}u_{\varepsilon}E^{\alpha\beta}H^{\sigma}_{\beta} + u^{\mu}u_{\varepsilon}H^{\alpha\beta}E^{\sigma}_{\beta})
\end{aligned}
\qquad (2.2.10)
$$

Substituindo, nesta expressão, $E_{\alpha\beta}$ por $H_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ por $-E_{\alpha\beta}$, encontramos a expressão de $\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu\beta\nu}\overset{*}{W}_{\alpha\varepsilon\beta\tau}$ em função desses dois tensores:

Recordando que, de acordo com (1.6.34),

$$A = E^{\alpha}_{\beta}E^{\beta}_{\alpha} - H^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}_{\alpha} \equiv E^2 - H^2 \quad , \qquad (2.2.12)$$

concluimos que (2.2.11) é a expressão (2.2.4) que nos propusemos deduzir.

Passemos, agora, à dedução da última identidade dual de segunda ordem associada, como é fácil ver, ao invariante B do campo gravitacional no vazio. A definição (2.1.6) deste invariante e a analogia com a identidade eletromagnética (2.1.4) permitem-nos concluir que deve ser encontrada a relação do produto $\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha\varepsilon\beta\tau}$ com os tensores elétrico ($E_{\alpha\beta}$) e magnético ($H_{\alpha\beta}$) . Infelizmente, é muito difícil e arriscado o uso, para tanto, da relação já conhecida (2.2.10), na qual o par ($E_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}$) seria trocado pelo par ($H_{\alpha\beta}, -E_{\alpha\beta}$) apenas em um dos fatores $W_{\alpha\beta\rho\sigma}$. Em vista disto, calcularemos o produto $\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha\varepsilon\beta\tau}$ parcela por parcela, procurando aproveitar a experiência adquirida anteriormente. O produto

$$\begin{aligned}\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha\varepsilon\beta\tau} = {} & \Big[(\eta^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs} + g^{\alpha\mu pq}g^{\beta\nu rs})u_p u_r H_{qs} - \\ & - (\eta^{\alpha\mu pq}g^{\beta\nu rs} + g^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs})u_p u_r E_{qs}\Big] \times \\ & \times \Big[(\eta_{\alpha\varepsilon ab}\eta_{\beta\tau cd} - g_{\alpha\varepsilon ab}g_{\beta\tau cd})u^a u^c E^{bd} + \\ & + (\eta_{\alpha\varepsilon ab}g_{\beta\tau cd} + g_{\alpha\varepsilon ab}\eta_{\beta\tau cd})u^a u^c H^{bd}\Big] \end{aligned} \qquad (2.2.13)$$

tem a mesma estrutura algébrica que o produto (2.2.9), o que nos permite omitir as passagens intermediárias nos cálculos de cada parcela;

1ª Parcela

$$\eta^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}\eta_{\alpha\varepsilon ab}\eta_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c H_{qs}E^{bd} =$$

$$= (\delta^\mu_\varepsilon\delta^\nu_\tau - u^\nu u_\tau\delta^\mu_\varepsilon - u^\mu u_\varepsilon\delta^\nu_\tau + u^\mu u_\varepsilon u^\nu u_\tau)E.H + H_{\varepsilon\tau}E^{\mu\nu} -$$

$$- \delta^\mu_\varepsilon H^\alpha_\tau E^\nu_\alpha - \delta^\nu_\tau H_{\varepsilon\alpha}E^{\alpha\mu} + u^\nu u_\tau H_{\varepsilon\alpha}E^{\alpha\mu} + u^\mu u_\varepsilon H_{\tau\alpha}E^{\alpha\nu}$$

2ª Parcela

$$- \eta^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}g_{\alpha\varepsilon ab}g_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c H_{qs}E^{bd} =$$

$$= u_\varepsilon u_\tau H^\nu_\alpha E^{\alpha\mu} + u_\varepsilon u_\tau H^\mu_\alpha E^{\alpha\nu} - u_\varepsilon u_\tau g^{\mu\nu}E.H + u_\varepsilon u_\tau u^\mu u^\nu E.H$$

3ª Parcela

$$\eta^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}\eta_{\alpha\varepsilon ab}g_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c H_{qs}H^{bd} =$$

$$= - \eta^{\alpha\nu rs}u_\tau u^r H_{\varepsilon s}H^\mu_\alpha$$

4ª Parcela

$$\eta^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}g_{\alpha\varepsilon ab}\eta_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c H_{qs}H^{bd} =$$

$$= - \eta^{\alpha\mu pq} u_p u_\varepsilon H_{q\tau} H^\nu_\alpha$$

5ª Parcela

$$- g^{\alpha\mu pq} g^{\beta\nu rs} \eta_{\alpha\varepsilon ab} \eta_{\beta\tau cd} u_p u_r u^a u^c H_{qs} E^{bd} =$$

$$= u^\mu u^\nu H^\alpha_\varepsilon E_{\alpha\tau} - u^\mu u^\nu g_{\varepsilon\tau} E.H + u^\mu u^\nu u_\varepsilon u_\tau E.H +$$

$$+ u^\mu u^\nu H_{\tau\alpha} E^\alpha_\varepsilon$$

6ª Parcela

$$g^{\alpha\mu pq} g^{\beta\nu rs} g_{\alpha\varepsilon ab} g_{\beta\tau cd} u_p u_r u^a u^c H_{qs} E^{bd} =$$

$$= H^{\mu\nu} E_{\varepsilon\tau} + u^\nu u_\tau H^\mu_\alpha E^\alpha_\varepsilon + u^\mu u_\varepsilon H^\nu_\alpha E^\alpha_\tau +$$

$$+ u^\mu u^\nu u_\varepsilon u_\tau E.H$$

7ª Parcela

$$+ g^{\alpha\mu pq} g^{\beta\nu rs} \eta_{\alpha\varepsilon ab} g_{\beta\tau cd} u_p u^r u^a u^c H_{qs} H^{bd} =$$

$$= -\eta_{\alpha\varepsilon ab} u^\mu u^a H^{\alpha\nu} H^b_\tau$$

8ª Parcela

$$+ g^{\alpha\mu pq} g^{\beta\nu rs} g_{\alpha\varepsilon ab} \eta_{\beta\tau cd} u_p u_r u^a u^c H_{qs} H^{bd} =$$

$$= -\eta_{\beta\tau cd} u^\nu u^c H^{\mu\beta} H^d_\varepsilon$$

9ª Parcela

$$- \eta^{\alpha\mu pq} g^{\beta\nu rs} \eta_{\alpha\varepsilon ab} \eta_{\beta\tau cd} u_p u_r u^a u^c E_{qs} E^{bd} =$$

$$= - \eta_{\beta\tau cd} u^{\nu} u^c E^{\beta}_{\varepsilon} E^{\mu d}$$

10ª Parcela

$$\eta^{\alpha\mu pq} g^{\beta\nu rs} g_{\alpha\varepsilon ab} g_{\beta\tau cd} u_p u_r u^a u^c E_{qs} E^{bd} =$$

$$= - \eta^{\alpha\mu pq} u_p u_{\varepsilon} E^{\nu}_{q} E_{\alpha\tau}$$

11ª Parcela

$$- \eta^{\alpha\mu pq} g^{\beta\nu rs} \eta_{\alpha\varepsilon ab} g_{\beta\tau cd} u_p u_r u^a u^c E_{qs} H^{bd} =$$

$$= \delta^{\mu}_{\varepsilon} E^{\alpha\nu} H_{\alpha\tau} + u^{\nu} u_{\tau} \delta^{\mu}_{\varepsilon} E.H - u^{\mu} u_{\varepsilon} E^{\alpha\nu} H_{\alpha\tau} -$$

$$- u_{\varepsilon} u_{\tau} u^{\mu} u^{\nu} E.H - E^{\nu}_{\varepsilon} H^{\mu}_{\tau} - u^{\nu} u_{\tau} E^{\alpha}_{\varepsilon} H^{\mu}_{\alpha}$$

12ª Parcela

$$- \eta^{\alpha\mu pq} g^{\beta\nu rs} g_{\alpha\varepsilon ab} \eta_{\beta\tau cd} u_p u_r u^a u^c E_{qs} H^{bd} =$$

$$= - u_{\varepsilon} u^{\nu} E_{\tau\alpha} H^{\alpha\mu} + u_{\varepsilon} u^{\nu} \delta^{\mu}_{\tau} E.H - u_{\varepsilon} u_{\tau} u^{\mu} u^{\nu} E.H$$

$$- u_{\varepsilon} u^{\nu} E^{\mu}_{\alpha} H^{\alpha}_{\tau}$$

13ª Parcela

$$- g^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}\eta_{\alpha\varepsilon ab}\eta_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c E_{qs}E^{bd} =$$

$$= \eta_{\alpha\varepsilon ab}u^a u^\mu E^\alpha_\tau E^{b\nu}$$

14ª Parcela

$$g^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}g_{\alpha\varepsilon ab}g_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c E_{qs}E^{bd} =$$

$$= - \eta^{\beta\nu rs}u_\tau u_r E^\mu_s E_{\varepsilon\beta}$$

15ª Parcela

$$- g^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}\eta_{\alpha\varepsilon ab}g_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c E_{qs}H^{bd} =$$

$$= - u^\mu u^\nu u_\varepsilon u_\tau E.H + u_\tau u^\mu \delta^\nu_\varepsilon E.H - u^\mu u_\tau E^\varepsilon_\alpha H^{\nu\alpha}$$

$$- u^\mu u_\tau E^\nu_\alpha H^\alpha_\varepsilon$$

16ª Parcela

$$- g^{\alpha\mu pq}\eta^{\beta\nu rs}g_{\alpha\varepsilon ab}\eta_{\beta\tau cd}u_p u_r u^a u^c E_{qs}H^{bd} =$$

$$= \delta^\nu_\tau E^{\alpha\mu}H_{\alpha\varepsilon} + u^\mu u_\varepsilon \delta^\nu_\tau E.H - u^\nu u_\tau E^\mu_\alpha H^\alpha_\varepsilon -$$

$$- u^\mu u^\nu u_\varepsilon u_\tau E.H - E^\mu_\tau H^\nu_\varepsilon - u^\mu u_\varepsilon E^\alpha_\tau H^\nu_\alpha$$

Aqui, usamos a definição $E.H \equiv E^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}_{\alpha}$. Adicionando todas essas parcelas com os índices (ε,τ) levantados, obtemos que:

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}{}^{\tau} = g^{\mu\varepsilon}g^{\nu\tau}E.H \;+$$

$$+ (u^{\varepsilon}u^{\nu}g^{\mu\tau} + u^{\mu}u^{\tau}g^{\varepsilon\nu} - u^{\varepsilon}u^{\tau}g^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu}g^{\varepsilon\tau})\; E.H \;+$$

$$+ (E^{\mu\nu}H^{\varepsilon\tau} + E^{\varepsilon\tau}H^{\mu\nu} - E^{\nu\varepsilon}H^{\mu\tau} - E^{\mu\tau}H^{\nu\varepsilon}) + (-u^{\mu}u^{\tau}H^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\alpha\nu} +$$

$$+ u^{\varepsilon}u^{\tau}E^{\mu}_{\alpha}H^{\alpha\nu} + u^{\varepsilon}u^{\tau}E^{\nu}_{\alpha}H^{\alpha\mu} + u^{\mu}u^{\nu}E^{\tau}_{\alpha}H^{\alpha\varepsilon} + u^{\mu}u^{\nu}E^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha}_{\tau} \;+$$

$$+ u^{\nu}u^{\tau}E^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha\mu} - u^{\varepsilon}u^{\nu}E^{\tau}_{\alpha}H^{\alpha\mu} - u^{\varepsilon}u^{\nu}H^{\tau}_{\alpha}E^{\alpha\mu} - u^{\mu}u^{\tau}E^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha\nu} - u^{\nu}u^{\tau}H^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\alpha\mu}) \;-$$

$$- \eta^{\mu\alpha\rho\sigma}u^{\varepsilon}u_{\alpha}\;(H^{\nu}_{\rho}H^{\tau}_{\sigma} + E^{\tau}_{\rho}E^{\nu}_{\sigma}) \;-$$

$$- \eta^{\nu\alpha\rho\sigma}u^{\tau}u_{\alpha}\;(H^{\mu}_{\rho}H^{\varepsilon}_{\sigma} + E^{\varepsilon}_{\rho}E^{\mu}_{\sigma}) \;+$$

$$+ \eta^{\varepsilon\alpha\rho\sigma}u^{\mu}u_{\alpha}\;(H^{\nu}_{\rho}H^{\tau}_{\sigma} + E^{\tau}_{\rho}E^{\nu}_{\sigma}) \;+$$

$$+ \eta^{\tau\alpha\rho\sigma}u^{\nu}u_{\alpha}\;(H^{\mu}_{\rho}H^{\varepsilon}_{\sigma} + E^{\varepsilon}_{\rho}E^{\mu}_{\sigma}) \qquad (2.2.14)$$

Simetrizando ésta expressão em (μ,ε), o cálculo direto fornece a nova identidade

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha(\mu}{}_{\beta\nu}W_{\alpha}{}^{\varepsilon)\beta}{}_{\tau} = (E.H)\; g^{\mu\varepsilon}g_{\nu\tau} \qquad (2.2.15)$$

Lembrando (1.6.35), onde

$$B = 2E^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}_{\alpha} \equiv 2E.H \quad , \qquad (2.2.16)$$

a identidade acima ainda pode ser escrita assim:

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha(\mu}{}_{\beta\nu}W_{\alpha}{}^{\varepsilon)\beta}{}_{\tau} = \frac{B}{2}\, g^{\mu\varepsilon} g_{\nu\tau} \tag{2.2.17}$$

A semelhança desta identidade com a identidade eletromagnética (2.1.4) é total. O que, realmente, admira é o fato de que uma expressão tão longa e complicada como é a relação (2.2.14), quando adicionada a si mesma com os índices (μ,ε) trocados, tenha todos os seus termos cancelados à exceção de um, aquele que está do lado direito da identidade (2.2.15).

Contraindo (2.2.17) nos índices (μ,ε), obtemos a relação

$$W^{\alpha\mu\beta}{}_{\nu}\overset{*}{W}_{\alpha\mu\beta\tau} = 2B g_{\nu\tau} \tag{2.2.18}$$

que é a generalização da identidade de Lanczos.

Para encerrar esta seção, deduzamos uma importante propriedade algébrica do tensor de Weyl. Consideremos as identidades

$$W^{\alpha\varepsilon}{}_{\beta\nu}\overset{*}{W}_{\alpha}{}^{\mu\beta}{}_{\tau} + W^{\alpha\mu}{}_{\beta\nu}\overset{*}{W}_{\alpha}{}^{\varepsilon\beta}{}_{\tau} = B g^{\varepsilon\mu} g_{\nu\tau} \tag{2.2.19}$$

$$W^{\alpha\varepsilon}{}_{\beta\tau}\overset{*}{W}_{\alpha}{}^{\mu\beta}{}_{\nu} + W^{\alpha\mu}{}_{\beta\tau}\overset{*}{W}_{\alpha}{}^{\varepsilon\beta}{}_{\nu} = B g^{\varepsilon\mu} g_{\tau\nu} \tag{2.2.20}$$

Adicionando estas duas relações e reagrupando seus termos, obtemos que

$$W^{\alpha\varepsilon}{}_{\beta\nu}W_{\alpha}{}^{\mu\beta}{}_{\tau} + W^{\alpha\mu}{}_{\beta\nu}\overset{*}{W}_{\alpha}{}^{\varepsilon\beta}{}_{\tau} =$$

$$= -\,(W^{\beta}{}_{\nu\alpha}{}^{\varepsilon}\overset{*}{W}_{\beta\tau}{}^{\alpha\mu} + W^{\beta}{}_{\tau\alpha}{}^{\varepsilon}\overset{*}{W}_{\beta\nu}{}^{\alpha\mu}) + 2B g^{\varepsilon\mu} g^{\nu}{}_{\tau} \tag{2.2.21}$$

Os termos dentro dos parênteses equivalem, de acordo com (2.2.17), a $Bg^{\varepsilon\mu}g_{\nu\tau}$. Por conseguinte, (2.2.11) fica escrita assim:

$$W^{\alpha\mu}{}_{\beta\nu}\overset{*}{W}{}_{\alpha}{}^{\varepsilon\beta}{}_{\tau} + \overset{*}{W}{}^{\alpha\varepsilon}{}_{\beta\nu}W_{\alpha}{}^{\mu\beta}{}_{\tau} = Bg^{\mu\varepsilon}g_{\nu\tau} \qquad (2.2.22)$$

Comparando esta identidade com (2.2.17), vemos que

$$W^{\alpha\varepsilon}{}_{\beta\nu}\overset{*}{W}{}_{\alpha}{}^{\mu\beta}{}_{\tau} = \overset{*}{W}{}^{\alpha\varepsilon}{}_{\beta\nu}W_{\alpha}{}^{\mu\beta}{}_{\tau} \qquad (2.2.23)$$

Esta é uma identidade que desempenhará um importante papel mais adiante. Por enquanto, estamos mais interessados numa regra que é possível extrair dela e da propriedade dual

$$W_{\alpha\beta\rho\sigma}\overset{*}{W}{}^{\rho\sigma\mu\nu} = \overset{*}{W}_{\alpha\beta\rho\sigma}W^{\rho\sigma\mu\nu} \qquad (2.2.24)$$

(Esta propriedade é facilmente verificável com a ajuda direta da definição do dual do tensor de Weyl.)

Com a finalidade de encontrar a regra acima referida, observemos que o produto do tensor de Weyl pelo seu dual com contração em dois índices de cada fator pode ser definido apenas de duas maneiras, a saber: $W_{\alpha\beta\rho\sigma}\overset{*}{W}{}^{\rho\sigma\mu\nu}$ e $W_{\alpha\beta\rho\sigma}\overset{*}{W}{}^{\mu\beta\nu\sigma}$. (Uma terceira possibilidade seria $W_{\alpha\beta\rho\sigma}\overset{*}{W}{}^{\mu\rho\nu\sigma}$, mas, como é fácil demonstrar através das identidades de Ricci, ela se reduz à primeira das duas anteriores.) A cada um desses produtos está associada uma identidade: ao produto $W_{\alpha\beta\rho\sigma}\overset{*}{W}{}^{\mu\beta\nu\sigma}$ corresponde a identidade (2.2.23) e ao produto $W_{\alpha\beta\rho\sigma}\overset{*}{W}{}^{\rho\sigma\mu\nu}$ corresponde a identidade (2.2.24). Por conseguinte, podemos formular a seguinte regra (ou teorema) da álgebra do tensor de Weyl: independentemente dos dois índices que estejam contraídos em cada fator do produto do tensor de Weyl pelo seu dual (simbolicamente, $W\overset{*}{W}$), a operação dual (*) pode ser realizada indistintamente em qualquer desses fatores (simbolicamente, $W\overset{*}{W} = \overset{*}{W}W$). Uma consequência imediata desta regra é que ela permite escrever a identidade (2.2.17) da seguinte forma:

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha(\mu}{}_{\beta\nu}W_{\alpha}{}^{\varepsilon)\beta}{}_{\tau} = \frac{B}{2}\, g^{\mu\varepsilon}\, g_{\nu\tau} \qquad (2.2.17')$$

2.3 - *Identidades Duais de Terceira Ordem*

Na seção anterior, nós obtivemos as duas identidades duais de segunda ordem no tensor de Weyl e no seu dual inspirando-nos nas identidades eletromagnéticas correspondentes. Se, por outro lado, atentarmos para o fato de que o tensor de Weyl é de quarta ordem - uma das propriedades a que nos referimos como o distinguindo substancialmente do tensor eletromagnético - perceberemos que apenas aquela analogia com o eletromagnetismo não teria sido suficiente para conduzir nossa análise ao lugar desejado.

Com efeito, sem maiores argumentos foram calculados, em função das partes elétrica e magnética do tensor de Weyl, os produtos $W^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha\varepsilon\beta\tau}$, $\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu\beta\nu}\overset{*}{W}_{\alpha\varepsilon\beta\tau}$ e $\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha\varepsilon\beta\tau}$. Não resta dúvida que a analogia com os produtos $F_{\alpha\lambda}F_{\beta}{}^{\lambda}$, $\overset{*}{F}_{\alpha\lambda}\overset{*}{F}_{\beta}{}^{\lambda}$ e $\overset{*}{F}_{\alpha\lambda}F_{\beta}{}^{\lambda}$, que aparecem nas identidades eletromagnéticas, foi determinante. No que se refere, porém, aos índices contraidos, poderíamos perguntar: "Por que, justamente, foram contraidos índices pertencentes a pares diferentes, em ambos os fatores ?". A resposta a esta pergunta obviamente não pode ser dada pela analogia que vi emos explorando. Portanto, deve ser considerada a especificidade da álgebra do tensor de Weyl.

Com efeito, suponhamos, por um instante, que sejam contraidos os índices de um mesmo par, digamos, num dos fatores do produto. Neste caso temos, por exemplo, que

$$W^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha\varepsilon\mu\tau} = \frac{1}{2} W^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha\mu\varepsilon\tau}$$

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu\beta\nu}\overset{*}{W}_{\alpha\varepsilon\mu\tau} = -\frac{1}{2} W^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha\mu\varepsilon\tau}$$

Subtraindo a segunda relação da primeira, obtemos a identidade

$$W^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha\varepsilon\mu\tau} - \overset{*}{W}{}^{\alpha\mu\beta\nu}\overset{*}{W}_{\alpha\varepsilon\mu\tau} = W^{\alpha\mu\beta\nu}W_{\alpha\mu\varepsilon\tau}$$

que, por ser trivial, não pode conduzir a resultado substancial algum.

Nesta seção, serão procuradas as identidades duais de terceira ordem. Esta procura será dificultada pela falta de identidades duais da mesma ordem no tensor eletromagnético e no seu dual, sobre as quais pudéssemos apoiar a analogia. Em compensação, as propriedades de simetria do tensor de Weyl e as definições (2.1.7) e (2.1.8) não permitem muitas alternativas para a formação de produtos de terceira ordem no tensor de Weyl e no seu dual. Examinando todas as variantes possíveis e argumentando, como fizemos acima, sobre os índices que devem ser contraidos, chegamos à conclusão de que apenas os produtos $\overset{*}{W}_{\varepsilon\beta\mu\alpha}W^{\varepsilon\tau\lambda\sigma}\overset{*}{W}_{\lambda\rho\ \gamma}^{\ \ \alpha}$ e $\overset{*}{W}_{\varepsilon\beta\mu\alpha}W^{\varepsilon\tau\lambda\gamma}W_{\lambda\gamma\rho}^{\ \ \ \alpha}$ devem ser calculados.

Nesta seção, contrariamente ao que fizemos na anterior, será usada uma técnica bem mais simples e direta, que dispensa a decomposição do tensor de Weyl (e seu dual) nas suas partes elétrica e magnética. Calculemos, inicialmente, o produto

$\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta} W^{\rho\sigma}{}_{\lambda\varepsilon} \overset{*}{W}{}^{\lambda\tau}{}_{\alpha\nu}$. Temos, portanto, que devido às propriedades do tensor de Weyl

$$\overset{**}{W}{}^{\rho\sigma}{}_{\lambda\varepsilon} = - W^{\rho\sigma}{}_{\lambda\varepsilon} \qquad (2.3.1)$$

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta} = W^{\alpha\mu}{}_{\overset{*}{\rho\beta}} = \overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta} \qquad (2.3.2)$$

como, também, às propriedades do tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita, podemos escrever:

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta} W^{\rho\sigma}{}_{\lambda\varepsilon} \overset{*}{W}{}^{\lambda\tau}{}_{\alpha\nu} = - \overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta} \overset{**}{W}{}^{\rho\sigma}{}_{\lambda\varepsilon} \overset{**}{W}{}^{\lambda\tau}{}_{\alpha\nu} =$$

$$= - \frac{1}{16} \eta_{\rho\beta jk} \eta^{\rho\sigma mn} \eta_{\lambda\varepsilon}{}^{pq} \eta^{\lambda\tau}{}_{rs} W^{\alpha\mu jk} W_{mnpq} W^{rs}{}_{\alpha\nu} =$$

$$= - \frac{1}{16} \delta^{\sigma mn}_{\beta jk} W^{\alpha\mu jk} W_{mn}{}^{pq} W_{rs\alpha\nu} \delta^{\tau rs}_{\varepsilon pq} =$$

$$= - \frac{1}{16} (\delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{m}_{j}\delta^{n}_{k} + \delta^{m}_{\beta}\delta^{n}_{j}\delta^{\sigma}_{k} + \delta^{n}_{\beta}\delta^{\sigma}_{j}\delta^{m}_{k} - \delta^{m}_{\beta}\delta^{\sigma}_{j}\delta^{n}_{k} - \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{n}_{j}\delta^{m}_{k} -$$

$$- \delta^{n}_{\beta}\delta^{m}_{j}\delta^{\sigma}_{k}) W^{\alpha\mu jk} W_{mn}{}^{pq} W_{rs\alpha\nu} (\delta^{\tau}_{\varepsilon}\delta^{r}_{p}\delta^{s}_{q} +$$

$$+ \delta^{r}_{\varepsilon}\delta^{s}_{p}\delta^{\tau}_{q} + \delta^{s}_{\varepsilon}\delta^{\tau}_{p}\delta^{r}_{q} - \delta^{r}_{\varepsilon}\delta^{\tau}_{p}\delta^{s}_{q} - \delta^{\tau}_{\varepsilon}\delta^{s}_{p}\delta^{r}_{q} - \delta^{s}_{\varepsilon}\delta^{r}_{p}\delta^{\tau}_{q})$$

Abrindo os parênteses e realizando as contrações indicadas, nós obtemos a seguinte expressão·

$$- \overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta} W^{\rho}{}_{\sigma\lambda\varepsilon} \overset{*}{W}{}^{\lambda}{}_{\tau\alpha\nu} - W^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma} W^{\rho}{}_{\beta\lambda\tau} W^{\lambda}{}_{\varepsilon\alpha\nu} +$$

$$+ \frac{1}{2} (g_{\beta\sigma} W^{\alpha\mu}{}_{\rho\delta} W^{\rho\sigma}{}_{\lambda\tau} W^{\lambda}{}_{\varepsilon\alpha\nu} + g_{\varepsilon\tau} W^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma} W^{\rho}{}_{\beta\lambda\delta} W^{\lambda\delta}{}_{\alpha\nu}) =$$

$$= \frac{1}{4} g_{\beta\sigma} g_{\varepsilon\tau} W^{\alpha\mu}{}_{\lambda\rho} W^{\lambda\rho}{}_{\gamma\delta} W^{\gamma\delta}{}_{\alpha\nu} \qquad (2.3.3)$$

Esta é a expressão mais geral que temos para deduzir a identidade de terceira ordem associada ao invariante $\mathbb{C}$. Contraindo (2.3.3) nos índices (μ,ν) e introduzindo a definição (2.1.7) para o invariante $\mathbb{C}$, encontramos que

$$- W^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma} W^{\rho}{}_{\beta\lambda\tau} W^{\lambda}{}_{\varepsilon\alpha\mu} - \overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta} W^{\rho}{}_{\sigma\lambda\varepsilon} \overset{*}{W}{}^{\lambda}{}_{\tau\alpha\mu} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(g_{\sigma\beta} W^{\alpha\mu}{}_{\rho\gamma} W^{\rho\gamma}{}_{\lambda\tau} W^{\lambda}{}_{\varepsilon\alpha\mu} + g_{\tau\varepsilon} W^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma} W^{\rho}{}_{\beta\lambda\delta} W^{\lambda\tau}{}_{\alpha\mu} \right) =$$

$$= 4 g_{\sigma\beta} g_{\tau\varepsilon} \, \mathbb{C} \tag{2.3.4}$$

Esta ainda não é a identidade que procuramos, pela razão de que todas as identidades duais devem ter, do lado esquerdo da igualdade, apenas os produtos formados pelo tensor de Weyl e seu dual e, do lado direito, apenas o tensor métrico e o invariante do campo. Contraindo (2.3.4) nos índices (σ,β), obtemos que

$$W^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\lambda\tau} W^{\lambda}{}_{\varepsilon\alpha\mu} - \overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\lambda\varepsilon} \overset{*}{W}{}^{\lambda}{}_{\tau\alpha\mu} = 8 g_{\tau\varepsilon} \, \mathbb{C} \tag{2.3.5}$$

Escrita desta forma, a identidade dual para o invariante $\mathbb{C}$ lembra a identidade de Debever. Usando as propriedades (2.2.24) e (2.3.1), temos que

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\lambda\varepsilon} \overset{*}{W}{}^{\lambda}{}_{\tau\alpha\mu} = - W^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\lambda\varepsilon} W^{\lambda}{}_{\tau\alpha\mu} \tag{2.3.6}$$

Por conseguinte, (2.3.5) pode, ainda, ser escrita na forma seguinte:

$$W^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\lambda\tau} W^{\lambda}{}_{\varepsilon\alpha\mu} = 4 \, \mathbb{C} \, g_{\tau\varepsilon} \tag{2.3.7}$$

Escrita assim, a identidade dual para o invariante $\mathbb{C}$ lembra a identidade de Lanczos. Portanto, no que se refere ao invariante $\mathbb{C}$, as identidades de Debever e de Lanczos coincidem.

Passemos, agora, ao cálculo do produto $\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta}W^{\rho\sigma}{}_{\lambda\varepsilon}W^{\lambda\tau}{}_{\alpha\nu}$. Novamente, devido às propriedades (2.3.1) e (2.3.2) do tensor de Weyl e às propriedades do tensor de Levi-Civita, temos:

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta}W^{\rho\sigma}{}_{\lambda\varepsilon}W^{\lambda\tau}{}_{\alpha\nu} = -\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta}\overset{**}{W}{}^{\rho\sigma}{}_{\lambda\varepsilon}W^{\lambda\tau}{}_{\alpha\nu} =$$

$$= -\frac{1}{4}\,\eta_{\rho\beta jk}\eta^{\rho\sigma mn}W^{\alpha\mu jk}\overset{**}{W}_{mn\lambda\varepsilon}W^{\lambda\tau}{}_{\alpha\nu} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\delta^{\sigma mn}_{\beta jk}W^{\alpha\mu jk}\overset{*}{W}_{mn\lambda\varepsilon}W^{\lambda\tau}{}_{\alpha\nu} =$$

$$= \frac{1}{4}\,(\delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{m}_{j}\delta^{n}_{k} + \delta^{m}_{\beta}\delta^{n}_{j}\delta^{\sigma}_{k} + \delta^{n}_{\beta}\delta^{\sigma}_{j}\delta^{m}_{k} - \delta^{m}_{\beta}\delta^{\sigma}_{j}\delta^{n}_{k} - \delta^{\sigma}_{\rho}\delta^{n}_{j}\delta^{m}_{k} -$$

$$- \delta^{n}_{\beta}\delta^{m}_{j}\delta^{\sigma}_{k})W^{\alpha\mu jk}\,\overset{*}{W}_{mn\lambda\varepsilon}W^{\lambda\tau}{}_{\alpha\nu}$$

Abrindo os parênteses e efetuando as contrações indicadas, nós obtemos a expressão:

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta}W^{\rho}{}_{\sigma\lambda\varepsilon}W^{\lambda\tau}{}_{\alpha\nu} + W^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma}\overset{*}{W}{}^{\rho}{}_{\beta\lambda\varepsilon}W^{\lambda\tau}{}_{\alpha\nu} =$$

$$= \frac{1}{2}\,g_{\beta\sigma}W^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma}\overset{*}{W}{}^{\rho\sigma}{}_{\lambda\varepsilon}W^{\lambda\tau}{}_{\alpha\nu} \qquad (2.3.8)$$

Esta é a expressão mais geral de que dispomos para encontrar a identidade dual associada ao invariante $\mathbb{D}$. Contraindo (2.3.8) nos índices (ε,τ) e (μ,ν) e considerando a definição (2.7.8) do invariante D, obtemos que

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta}W^{\rho}{}_{\sigma\lambda\varepsilon}W^{\lambda\varepsilon}{}_{\alpha\mu} + \overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma}W^{\rho}{}_{\beta\lambda\varepsilon}W^{\lambda\varepsilon}{}_{\alpha\mu} = 8\,\mathbb{D}\,g_{\beta\sigma} \tag{2.3.9}$$

onde, no segundo produto do lado esquerdo da igualdade, usamos, duas vezes consecutivas, a propriedade dual (2.2.24). A identidade (2.3.9) tem o mesmo aspecto da identidade dual (2.2.17) , associada ao invariante B. Como

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma}W^{\rho}{}_{\beta\lambda\varepsilon}W^{\lambda\varepsilon}{}_{\alpha\mu} = W^{\lambda\varepsilon}{}_{\rho\beta}\overset{*}{W}{}^{\rho}{}_{\sigma\alpha\mu}W^{\alpha\mu}{}_{\lambda\varepsilon} =$$

$$= \overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\beta}W^{\rho}{}_{\sigma\lambda\varepsilon}W^{\lambda\varepsilon}{}_{\alpha\mu} \quad , \tag{2.3.10}$$

a identidade (2.3.9) pode ser escrita, mais simplesmente, assim:

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha\mu}{}_{\rho\sigma}W^{\rho}{}_{\beta\lambda\varepsilon}W^{\lambda\varepsilon}{}_{\alpha\mu} = 4\,\mathbb{D}\,g_{\beta\sigma} \tag{2.3.11}$$

Escrita desta forma, a identidade dual para o invariante D lembra a identidade dual (2.2.18) para o invariante B. Por conseguinte, às duas identidades duais (2.2.17) e (2.2.18), associadas ao invariante B, corresponde apenas uma identidade — (2.3.10) ou (2.3.11) — associada ao invariante D.

Nas Tabelas 2.3.1 e 2.3.2 seguintes estão reunidas , respectivamente, as identidades duais de segunda e terceira ordens. Em algumas delas a ordem dos fatores ou a disposição dos índices foram deliberadamente alteradas em comparação com o texto, visando maior elegância e maior facilidade para a memorização.

TABELA 2.3.1 - Identidades duais do tensor de Weyl (duplos produtos).

$$W_{\alpha\rho\mu\sigma}W_{\beta}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} - \overset{*}{W}_{\alpha\rho\nu\sigma}\overset{*}{W}_{\beta}{}^{\rho}{}_{\mu}{}^{\sigma} = A g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}$$

$$W^{(\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}W^{\beta)\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} - \overset{*}{W}^{(\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}\overset{*}{W}^{\beta)\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} = A g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}$$

$$\overset{*}{W}^{(\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}W^{\beta)\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} = \frac{B}{2}\, g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}.$$

$$W^{\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}W^{\beta\rho\mu\sigma} = 2\,A g^{\alpha\beta}$$

$$\overset{*}{W}^{\alpha}{}_{\rho\mu\sigma}W^{\beta\rho\mu\sigma} = 2\,B g^{\alpha\beta}$$

$$W_{\alpha\rho\mu\sigma}\overset{*}{W}^{\beta\rho\nu\sigma} = \overset{*}{W}_{\alpha\rho\mu\sigma}W^{\beta\rho\nu\sigma}$$

$$\overset{*}{W}_{\alpha\rho\mu\sigma}W_{\beta}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} + W_{\alpha\rho\nu\sigma}\overset{*}{W}_{\beta}{}^{\rho}{}_{\mu}{}^{\sigma} = B g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}$$

TABELA 2.3.2 - Identidades duais do tensor de Weyl (triplos produtos)

$$W_{\varepsilon}{}^{\lambda}{}_{\alpha\beta}W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\tau\lambda} - W_{\tau}{}^{\lambda}{}_{\alpha\beta}W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\varepsilon\lambda} = 8\mathbb{C}g_{\varepsilon\tau}$$

$$\overset{*}{W}_{\varepsilon}{}^{\lambda}{}_{\alpha\beta}W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\tau\lambda} = 4\mathbb{C}g_{\varepsilon\tau}$$

$$W_{\varepsilon}{}^{\lambda}{}_{\alpha\beta}W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}\overset{*}{W}^{\rho\sigma}{}_{\tau\varepsilon} + W_{\varepsilon}{}^{\lambda}{}_{\alpha\beta}W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}\overset{*}{W}^{\rho\sigma}{}_{\tau\varepsilon} = 8\mathbb{D}\,g_{\varepsilon\tau}$$

$$W_{\varepsilon}{}^{\lambda}{}_{\alpha\beta}W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}\overset{*}{W}^{\rho\sigma}{}_{\tau\lambda} = 4\mathbb{D}\,g_{\varepsilon\tau}$$

CAPÍTULO 3

ALGUMAS APLICAÇÕES DAS IDENTIDADES DUAIS

3.1 - *Introdução*

Em todo o Capítulo anterior, nós procuramos explorar, da melhor maneira possível, a analogia formal verificada entre a teoria da gravitação de Einstein e a teoria eletromagnética de Maxwell. Como resultado, conseguimos deduzir as quatro identidades duais do campo gravitacional no vazio, além de outras relações importantes, para o tensor de Weyl.

Uma pergunta natural que se impõe, nesta altura de nossas investigações, está relacionada com as aplicações dessas identidades e relações. É impossível dar uma resposta definitiva e completa a uma questão como esta, pelo simples fato de que o desenvolvimento da teoria de Einstein abrirá fronteiras sempre novas para o uso daquelas identidades e relações. Uma coisa, porém, é certa: as identidades que acabamos de encontrar desempenharão um papel na teoria da gravitação de Einstein de relevância não menor do que o desempenhado pelas identidades duais eletromagnéticas na teoria de Maxwell.

A finalidade deste Capítulo não é, precisamente, aprofundar o estudo dessa e de outras questões semelhantes, mas mostrar como as identidades duais podem ser aplicadas na simplificação de alguns cálculos encontrados no estudo do campo gravitacional.

3.2 - *A Energia-Momento do Campo Gravitacional*

Desde que surgiu, a teoria da gravitação de Einstein tem encontrado dificuldades para construir o tensor energia-momento do campo gravitacional. Podemos mesmo dizer que ela não é capaz de construí-lo. Dentre as dificuldades formais existentes, destaca-se uma: as propriedades matemáticas, fisicamente impostas ao tensor energia-momento do campo gravitacional no vazio, são incompatíveis com as propriedades de simetria do tensor que representa este campo — o tensor de Weyl.

Com efeito, como todo tensor energia-momento, o do campo gravitacional no vazio deve possuir as seguintes propriedades:

(a) ser de segunda ordem (representêmo-lo por $t_{\mu\nu}$) ;

(b) ser simétrico, $t_{\mu\nu} = t_{\nu\mu}$; e

(c) ter divergência covariante nula, $t^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0$

Além destas propriedades gerais, ele deve possuir propriedades específicas, quais sejam:

(d) ter traço nulo, $g^{\mu\nu}t_{\mu\nu} = 0$ e

(e) ser construido com os produtos de segunda ordem do tensor de Weyl.

Esta última exigência é incompatível com o conjunto das anteriores. Não é possível construir um tensor quadrático no tensor de Weyl e que possua as propriedades (a)-(b). A propriedade (c) <u>satisfaz duas exigências físicas; uma, é a que requer que todo tensor energia-momento de um campo deve ser construido com as grandezas que representam o campo</u>; outra, é a

<u>que exige que a densidade de energia total do campo seja positiva.</u>

Para ilustrar como podem ser aplicadas as identidades duais que encontramos, procuremos construir um tensor "energia - -momento" do campo gravitacional no vazio, mas que não seja quadrático no tensor de Weyl. Com isto, esperaríamos eliminar a incompatibilidade acima. Um exame, mesmo superficial, nos convence de que a única alternativa é a de um tensor de terceira ordem em $W_{\alpha\beta\mu\nu}$. Argumentando da mesma forma como fizemos na última seção do Capítulo anterior, chegamos à conclusão de que só existem três candidatos desse tipo, a saber:

$$
\begin{aligned}
a_{\mu\nu} &= W_{\mu\rho}{}^{\lambda}{}_{\sigma} W^{\alpha\rho\beta\sigma} W_{\nu\alpha\lambda\beta} \\
b_{\mu\nu} &= W_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta}{}_{\nu\lambda} \\
c_{\mu\nu} &= \overset{*}{W}_{\mu\rho}{}^{\lambda}{}_{\sigma} W^{\alpha\rho\beta\sigma} \overset{*}{W}_{\nu\alpha\lambda\beta} \\
d_{\mu\nu} &= W_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta}{}_{\nu\lambda}
\end{aligned}
$$

Os tensores $b_{\mu\nu}$ e $d_{\mu\nu}$ são, respectivamente, $4\mathbb{C}g_{\mu\nu}$ e $4\mathbb{D}g_{\mu\nu}$ (ver Tab. 2.3.2). A propriedade (d) implica, portanto, em que $\mathbb{C} = \mathbb{D} = 0$; logo, $b_{\mu\nu}$ e $d_{\mu\nu}$ são trivialmente nulos. Quanto ao tensor $a_{\mu\nu}$, ele pode ser escrito de outra forma; de fato, usando duas vezes sucessivas as identidades de Ricci, (1.6.8a), para o tensor de Weyl, podemos transformá-lo, assim:

$$
\begin{aligned}
a_{\mu\nu} &= W_{\mu\rho}{}^{\lambda}{}_{\sigma} W^{\alpha\rho\beta\sigma} W_{\nu\alpha\lambda\beta} = \\
&= (-W_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\sigma\rho} - W_{\mu\sigma\rho}{}^{\lambda}) W^{\alpha\rho\beta\sigma} W_{\nu\alpha\lambda\beta} = \\
&= \frac{1}{2} W_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma\alpha\beta} W_{\nu\alpha\lambda\beta} - W_{\mu\sigma\rho}{}^{\lambda} W^{\alpha\rho\beta\sigma} W_{\nu\alpha\lambda\beta} =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{4} W_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta}{}_{\nu\lambda} - W_{\mu\sigma\rho}{}^{\lambda} W^{\alpha\rho\beta\sigma} W_{\nu\alpha\lambda\beta}$$

Agora, usando a identidade de Debever e, novamente, as identidades de Ricci duas vêzes sucessivas, podemos transformar a última parcela da expressão acima, como a seguir:

$$W_{\mu\sigma\rho}{}^{\lambda} W^{\alpha\rho\beta\sigma} W_{\nu\alpha\lambda\beta} = - W_{\rho}{}^{\lambda}{}_{\sigma\mu} W^{\alpha\rho\beta\sigma} W_{\nu\alpha\lambda\beta} =$$

$$= - (\overset{*}{W}_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma\mu} \overset{*}{W}{}^{\lambda\rho\beta\sigma} + A g^{\alpha\lambda} \delta^{\beta}_{\mu}) W_{\nu\alpha\lambda\beta} =$$

$$= - \overset{*}{W}_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma\mu} \overset{*}{W}{}^{\lambda\rho\beta\sigma} W_{\nu\alpha\lambda\beta} - A g^{\alpha\lambda} \delta^{\beta}_{\mu} W_{\nu\alpha\lambda\beta} =$$

$$= - \frac{1}{2} \overset{*}{W}_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma\mu} \overset{*}{W}{}^{\lambda\rho\beta\sigma} W_{\nu\alpha\lambda\beta} = - \frac{1}{4} W_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta}{}_{\nu\lambda} \quad ,$$

onde levamos em consideração o traço nulo do tensor de Weyl Substituindo este produto na expressão para o tensor $a_{\mu\nu}$, encontramos, finalmente, que

$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{2} W_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta}{}_{\nu\lambda} \quad ,$$

o que reduz $a_{\mu\nu}$ ao tensor trivialmente nulo, $b_{\mu\nu}$. Se repetirmos o raciocínio para o tensor $c_{\mu\nu}$, encontraremos o mesmo resultado: ele se converte no tensor trivialmente nulo, $d_{\mu\nu}$. Assim, nossas identidades duais permitiram-nos provar que todo tensor de segunda ordem em seus índices, de terceira ordem no tensor de Weyl e de traço nulo, é trivialmente nulo. Desta forma, parece definitivamente excluida a possibilidade da existência, nos marcos da teoria de Einstein, de um tensor energia-momento do campo gravitacional no vazio.

APÊNDICE A

Neste Apêndice nós vamos calcular o produto $W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}$ em função dos tensores elétrico $(E_{\alpha\beta})$ e magnético $(H_{\alpha\beta})$. Pela definição (2.2.6) temos que:

$$
\begin{aligned}
W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} = &\Big[(\eta^{\alpha\beta ab}\eta_{\rho\sigma cd} - g^{\alpha\beta ab}g_{\rho\sigma cd})u_a u^c\, E^d_b \; + \\
&+ (\eta^{\alpha\beta ab}g_{\rho\sigma cd} + g^{\alpha\beta ab}\eta_{\rho\sigma cd})u_a u^c\, H^d_b\Big] \times \\
&\times\Big[(\eta^{\rho\sigma mn}\eta_{\mu\nu st} - g^{\rho\sigma mn}g_{\mu\nu st})u_m u^s\, E^t_n \; + \\
&+ (\eta^{\rho\sigma mn}g_{\mu\nu st} + g^{\rho\sigma mn}\eta_{\mu\nu st})u_m u^s\, H^t_n\Big]
\end{aligned}
\qquad (A.1)
$$

Efetuemos todas as operações indicadas por partes, isto é, parcela por parcela:

1ª Parcela

$$\eta^{\alpha\beta ab}\eta_{\rho\sigma cd}\, u_a u^c E^d_b \eta^{\rho\sigma mn}\eta_{\mu\nu st}u_m u^s\, E^t_n =$$

$$= +2\delta^{mn}_{cd}u_c u^m E^d_b \delta^{\alpha\beta ab}_{\mu\nu st}u_a u^s E^t_n = \delta^{\alpha\beta ab}_{\mu\nu st}\, u_a u^s\, E^n_b\, E^t_n =$$

$$= + 2 \begin{vmatrix} \delta^\alpha_\mu & \delta^\beta_\mu & \delta^a_\mu & \delta^b_\mu \\ \delta^\alpha_\nu & \delta^\beta_\nu & \delta^a_\nu & \delta^b_\nu \\ \delta^\alpha_s & \delta^\beta_s & \delta^a_s & \delta^b_s \\ \delta^\alpha_t & \delta^\beta_t & \delta^a_t & \delta^b_t \end{vmatrix} u_a u^s E^n_b E^t_n =$$

$$= 2\Big[(u^\alpha u_\nu \delta^\beta_\mu - u^\alpha u_\mu \delta^\beta_\nu - u^\beta u_\nu \delta^\alpha_\mu + u^\beta u_\mu \delta^\alpha_\nu) E^2 + u^\alpha u_\mu E^\rho_\nu E^\beta_\rho -$$

$$- u^\alpha u_\nu E^\rho_\mu E^\beta_\rho - u^\beta u_\mu E^\rho_\nu E^\alpha_\rho + u^\beta u_\nu E^\rho_\mu E^\alpha_\rho + \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} E^2 +$$

$$+ \delta^\beta_\mu E^\rho_\nu E^\alpha_\rho - \delta^\alpha_\mu E^\rho_\nu E^\beta_\rho + \delta^\alpha_\nu E^\rho_\mu E^\beta_\rho - \delta^\beta_\nu E^\rho_\mu E^\alpha_\rho \Big]$$

2ª Parcela

$$-\eta^{\alpha\beta ab} \eta_{\rho\sigma cd} u_a u \, E^d_b g^{\rho\sigma mn} g_{\mu\nu st} u_m u^s E^t_n =$$

$$= -\eta^{\alpha\beta ab} (u_\mu g_{\nu t} - u_\nu g_{\mu t}) u_a \eta_{\rho\sigma cd} (u^\rho g^{\sigma n} - u^\sigma g^{\rho n}) u^c E^d_b E^t_n = 0$$

3ª Parcela

$$\eta^{\alpha\beta ab} \eta_{\rho\sigma cd} u_a u^c E^d_b \eta^{\rho\sigma mn} g_{\mu\nu st} u_m u^s H^t_n =$$

$$= - 2\eta^{\alpha\beta ab} (g_{\mu s} g_{\nu t} - g_{\mu t} g_{\nu s}) u^s u_a \delta^{mn}_{cd} u^c E^d_b u_m H^t_n =$$

$$= - 2\eta^{\alpha\beta ab} u_\mu u_a E^\rho_b H_{\rho\nu} + 2\eta^{\alpha\beta ab} u_\nu u_a E^\rho_b H_{\rho\mu}$$

4ª Parcela

$$\eta^{\alpha\beta ab}\eta_{\rho\sigma cd}u_a u^c E_b^d g^{\rho\sigma mn}\eta_{\mu\nu st}u_m u^s H_n^t =$$

$$= \eta^{\alpha\beta ab}\eta_{\mu\nu st}u_a u_s \eta_{\rho\sigma cd}(u^\rho g^{\sigma n} - u^\sigma g^{\rho n})\ u^c E_b^d H_n^t = 0$$

5ª Parcela

$$-g^{\alpha\beta ab}g_{\rho\sigma cd}u_a u^c E_b^d \eta^{\rho\sigma mn}\eta_{\mu\nu st}u_m u^s E_n^t =$$

$$= -\eta_{\mu\nu st}(u^\alpha g^{\beta b} - u^\beta g^{\alpha b})u^s \eta^{\rho\sigma mn}(u_\rho g_{\sigma d} - u_\sigma g_{\rho d})u_m E_b^d E_n^t = 0$$

6ª Parcela

$$g^{\alpha\beta ab}g_{\rho\sigma cd}u_a u^c E_b^d g^{\rho\sigma mn}g_{\mu\nu st}u_m u^s E_n^t =$$

$$= (u^\alpha g^{\beta b} - u^\beta g^{\alpha b})(u_\rho g_{\sigma d} - u_\sigma g_{\rho d})(u^\rho g^{\sigma n} - u^\sigma g^{\rho n})(u_\mu g_{\nu t} - u_\nu g_{\mu t})\ E_b^d E_n^t =$$

$$= 2(u^\alpha u_\mu E_\rho^\beta E_\nu^\rho - u^\alpha u_\nu E_\rho^\beta E_\mu^\rho - u^\beta u_\mu E_\rho^\alpha E_\nu^\rho + u^\beta u_\nu E_\rho^\alpha E_\mu^\rho)$$

7ª Parcela

$$-g^{\alpha\beta ab}g_{\rho\sigma cd}u_a u^c E_b^d \eta^{\rho\sigma mn}g_{\mu\nu st}u_m u^s H_n^t =$$

$$= -(u^\alpha g^{\beta b} - u^\beta g^{\alpha b})(u_\mu g_{\nu t} - u_\nu g_{\mu t})\eta^{\rho\sigma mn}(u_\rho g_{\sigma d} - u_\sigma g_{\rho d})u^m E_b^d H_n^t = 0$$

8ª Parcela

$$-g^{\alpha\beta ab}g_{\rho\sigma cd}u_a u^c E^d_b g^{\rho\sigma mn}\eta_{\mu\nu st}u_m u^s H^t_n =$$

$$= -\eta_{\mu\nu st}(u^\alpha g^{\beta b}-u^\beta g^{\alpha b})(u_\rho g_{\sigma d}-u_\sigma g_{\rho d})(u^\rho g^{\sigma n}-u^\sigma g^{\rho n})u^s E^d_b H^t_n =$$

$$= -2\eta_{\mu\nu st}(u^\alpha g^{\beta b}-u^\beta g^{\alpha b})u^s E^\rho_d H^t_\rho =$$

$$= -2\eta_{\mu\nu st}u^\alpha u^s E^{\rho\beta}H^t_\rho + 2\eta_{\mu\nu st}u^\beta u^s E^{\rho\alpha}H^t_\rho$$

9ª Parcela

$$\eta^{\alpha\beta ab}g_{\rho\sigma cd}u_a u^c H^d_b \eta^{\rho\sigma mn}\eta_{\mu\nu st}u_m u^s E^t_n =$$

$$= \eta^{\alpha\beta ab}\eta_{\mu\nu st}\eta^{\rho\sigma mn}(u_\rho g_{\sigma d}-u_\sigma g_{\rho d})u_m u_a u^s H^d_b E^t_n = 0$$

10ª Parcela

$$-\eta^{\alpha\beta ab}g_{\rho\sigma cd}u_a u^c H^d_b g^{\rho\sigma mn}g_{\mu\nu st}u_m u^s E^t_n =$$

$$= -\eta^{\alpha\beta ab}(u_\mu g_{\nu t}-u_\nu g_{\mu t})(u_\rho g_{\sigma d}-u_\sigma g_{\rho d})(u^\rho g^{\sigma n}-u^\sigma g^{\rho n})u_a H^d_b E^t_n$$

$$= -2\eta^{\alpha\beta ab}(u_\mu g_{\nu t}-u_\nu g_{\mu t})u_a H^\rho_b E^t_\rho =$$

$$= -2\eta^{\alpha\beta ab}u_a u_\mu H^\rho_b E_{\rho\nu} + 2\eta^{\alpha\beta ab}u_a u_\nu H^\rho_b E_{\rho\mu}$$

11ª Parcela

$$\eta^{\alpha\beta ab} g_{\rho\sigma cd} u_a u^c H_b^d \eta^{\rho\sigma mn} g_{\mu\nu st} u_m u^s H_n^t =$$

$$= \eta^{\alpha\beta ab} \eta^{\rho\sigma mn} (u_\rho g_{\sigma d} - u_\sigma g_{\rho d}) u_m g_{\mu\nu st} u_a u^s H_b^d H_n^t = 0$$

12ª Parcela

$$\eta^{\alpha\beta ab} g_{\rho\sigma cd} u_a u^c H_b^d g^{\rho\sigma mn} \eta_{\mu\nu st} u_m u^s H_n^t =$$

$$= \eta^{\alpha\beta ab} \eta_{\mu\nu st} (u_\rho g_{\sigma d} - u_\sigma g_{\rho d})(u^\rho g^{\sigma n} - u^\sigma g^{\rho n}) u_a u^s H_b^d H_n^t =$$

$$= 2\eta^{\alpha\beta ab} \eta_{\mu\nu st} u_a u^s H_b^\rho H_\rho^t = - 2\delta^{\alpha\beta ab}_{\mu\nu st} u_a u^s H_b^\rho H_\rho^t =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} \delta_\mu^\alpha & \delta_\mu^\beta & \delta_\mu^a & \delta_\mu^b \\ \delta_\nu^\alpha & \delta_\nu^\beta & \delta_\nu^a & \delta_\nu^b \\ \delta_s^\alpha & \delta_s^\beta & \delta_s^a & \delta_s^b \\ \delta_t^\alpha & \delta_t^\beta & \delta_t^a & \delta_t^b \end{vmatrix} u_a u^s H_b^\rho H_\rho^t =$$

$$= -2(u^\alpha u_\nu \delta_\mu^\beta - u^\alpha u_\mu \delta_\nu^\beta - u^\beta u_\nu \delta_\mu^\alpha + u^\beta u_\mu \delta_\nu^\alpha + \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha) \; H^2 -$$

$$- 2(u^\alpha u_\mu H_\nu^\rho H_\rho^\beta - u^\alpha u_\nu H_\mu^\rho H_\rho^\beta - u^\beta u_\mu H_\nu^\rho H_\rho^\alpha + u^\beta u_\nu H_\mu^\rho H_\rho^\alpha +$$

$$+ \delta_\mu^\beta H_\nu^\rho H_\rho^\alpha - \delta_\mu^\alpha H_\nu^\rho H_\rho^\beta + \delta_\nu^\alpha H_\mu^\rho H_\rho^\beta - \delta_\nu^\beta H_\mu^\rho H_\rho^\alpha)$$

13ª Parcela

$$g^{\alpha\beta ab}\eta_{\rho\sigma cd}u_a u^c H_b^d \eta^{\rho\sigma mn}\eta_{\mu\nu st}u_m u^s E_n^t =$$

$$= -2\eta_{\mu\nu st}(\delta_d^n - u^n u_d)(u^\alpha g^{\beta b} - u^\beta g^{\alpha b})u^s H_b^d E_n^t =$$

$$= -2\eta_{\mu\nu st}u^\alpha u^s H^{\rho\beta}E_\rho^t + 2\eta_{\mu\nu st}u^\beta u^s H^{\rho\alpha}E_\rho^t$$

14ª Parcela

$$g^{\alpha\beta ab}\eta_{\rho\sigma cd}u_a u^c H_d^b \eta^{\rho\sigma mn}g_{\mu\nu st}u_m u^s H_n^t =$$

$$= -2\delta_{cd}^{mn}u^c u_m(u^\alpha g^{\beta b} - u^\beta g^{\alpha b})(u_\mu g_{\nu t} - u_\nu g_{\mu t})H_b^d H_n^t =$$

$$= -2(u^\alpha u_\mu H^{\rho\beta}H_{\rho\nu} - u^\alpha u_\nu H^{\rho\beta}H_{\rho\mu} - u^\beta u_\mu H^{\rho\alpha}H_{\rho\nu} + u^\beta u_\nu H^{\rho\alpha}H_{\rho\mu})$$

15ª Parcela

$$-g^{\alpha\beta ab}\eta_{\rho\sigma cd}u_a u^c H_d^b g^{\rho\sigma mn}g_{\mu\nu st}u_m u^s E_n^t =$$

$$= -\eta_{\rho\sigma cd}(u^\rho g^{\sigma n} - u^\sigma g^{\rho n})u^c g^{\alpha\beta ab}g_{\mu\nu st}u_a u^s H_b^d E_n^t = 0$$

16ª Parcela

$$g^{\alpha\beta ab}\eta_{\rho\sigma cd}u_a u^c H_b^d g^{\rho\sigma mn}\eta_{\mu\nu st}u_m u^s H_n^t =$$

$$= \eta_{\mu\nu st}g^{\alpha\beta ab}\eta_{\rho\sigma cd}(u^\rho g^{\sigma n} - u^\sigma g^{\rho n})u^c u_a u^s H_b^d H_n^t = 0 \quad ,$$

onde fizemos $E^2 \equiv E^{\alpha}_{\beta}E^{\beta}_{\alpha}$ e $H^2 \equiv H^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}_{\alpha}$. e onde $g_{\alpha\beta\mu\nu}$ é definido em (2.2.8). Reunindo todas essas parcelas e agrupando seus termos, obtemos, finalmente, que:

$$
\begin{aligned}
W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} = {} & 2(u^{\alpha}u_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu}-u^{\alpha}u_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu}-u^{\beta}u_{\nu}\delta^{\alpha}_{\mu}+u^{\beta}u_{\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}+\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \\
& - \delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\alpha}_{\nu})(E^2-H^2)+2(u^{\alpha}u_{\mu}E^{\rho}_{\nu}E^{\beta}_{\rho}-u^{\alpha}u_{\nu}E^{\rho}_{\mu}E^{\beta}_{\rho}-u^{\beta}u_{\mu}E^{\rho}_{\nu}E^{\alpha}_{\rho} + \\
& + u^{\beta}u_{\nu}E^{\rho}_{\mu}E^{\alpha}_{\rho}+\delta^{\beta}_{\mu}E^{\rho}_{\nu}E^{\alpha}_{\rho}-\delta^{\alpha}_{\mu}E^{\rho}_{\nu}E^{\beta}_{\rho}+\delta^{\alpha}_{\nu}E^{\rho}_{\mu}E^{\beta}_{\rho}-\delta^{\beta}_{\nu}E^{\rho}_{\mu}E^{\alpha}_{\rho} + \\
& + u^{\alpha}u_{\mu}E^{\beta}_{\rho}E^{\rho}_{\nu}-u^{\alpha}u_{\nu}E^{\beta}_{\rho}E^{\rho}_{\mu}-u^{\beta}u_{\mu}E^{\alpha}_{\rho}E^{\rho}_{\nu}+u^{\beta}u_{\nu}E^{\alpha}_{\rho}E^{\rho}_{\mu}) - \\
& - 2(u^{\alpha}u_{\mu}H^{\rho}_{\nu}H^{\beta}_{\rho}-u^{\alpha}u_{\nu}H^{\rho}_{\mu}H^{\beta}_{\rho}-u^{\beta}u_{\mu}H^{\rho}_{\nu}H^{\alpha}_{\rho}+u^{\beta}u_{\nu}H^{\rho}_{\mu}H^{\alpha}_{\rho} + \\
& + \delta^{\beta}_{\mu}H^{\rho}_{\nu}H^{\alpha}_{\rho}-\delta^{\alpha}_{\mu}H^{\rho}_{\nu}H^{\beta}_{\rho}+\delta^{\alpha}_{\nu}H^{\rho}_{\mu}H^{\beta}_{\rho}-\delta^{\beta}_{\nu}H^{\rho}_{\mu}H^{\alpha}_{\rho}+u^{\alpha}u_{\mu}H^{\beta}_{\rho}H^{\rho}_{\nu} - \\
& - u^{\alpha}u_{\nu}H^{\beta}_{\rho}H^{\rho}_{\mu}-u^{\beta}u_{\mu}H^{\alpha}_{\rho}H^{\rho}_{\nu}+u^{\beta}u_{\nu}H^{\alpha}_{\rho}H^{\rho}_{\mu})-2\eta^{\alpha\beta ab}u_{\mu}u^{a}E^{\rho}_{b}H_{\rho\nu} + \\
& + 2\eta^{\alpha\beta ab}u_{\nu}u_{a}E^{\rho}_{b}H_{\rho\mu}-2\eta_{\mu\nu st}u^{\nu}u^{s}E^{\beta}_{\rho}H^{\rho t}+2\eta_{\mu\nu st}u^{\beta}u^{s}E^{\alpha}_{\rho}H^{\rho t} \\
& - 2\eta^{\alpha\beta ab}u_{\mu}u_{a}H^{\rho}_{b}E_{\rho\nu}+2\eta^{\alpha\beta ab}u_{\nu}u_{a}H^{\rho}_{b}E_{\rho\mu} - \\
& - 2\eta_{\mu\nu st}u^{\alpha}u^{s}H^{\beta}_{\rho}E^{\rho t}+2\eta_{\mu\nu st}u^{\beta}u^{s}H^{\alpha}_{\rho}E^{\rho t}
\end{aligned}
\qquad (A.2)
$$

APÊNDICE B

Outro produto importante, em certos cálculos, é $\overset{*}{W}{}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}$. Para expressá-lo em função dos tensores elétrico e magnético é suficiente substituirmos a última componente de cada parcela de (A.2) segundo a regra: $E_{\alpha\beta} \rightarrow H_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta} \rightarrow -E_{\alpha\beta}$. Este procedimento direto só é possível porque (A.2) conserva a mesma ordem das componentes $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ em cada parcela que na expressão inicial (A.1). Temos, portanto, que:

$$
\begin{aligned}
\overset{*}{W}{}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} = {} & 4(u^{\alpha}u_{\mu}E^{\rho}_{\nu}H^{\beta}_{\rho} - u^{\alpha}u_{\nu}E^{\rho}_{\mu}H^{\beta}_{\rho} - u^{\beta}u_{\mu}E^{\rho}_{\nu}H^{\alpha}_{\rho} + \\
& + u^{\beta}u_{\nu}E^{\rho}_{\mu}H^{\alpha}_{\rho} + u^{\alpha}u_{\mu}E^{\beta}_{\rho}H^{\rho}_{\nu} - u^{\alpha}u_{\nu}E^{\beta}_{\rho}H^{\rho}_{\mu} - u^{\beta}u_{\mu}E^{\alpha}_{\rho}H^{\rho}_{\nu} + \\
& + u^{\beta}u_{\nu}E^{\alpha}_{\rho}H^{\rho}_{\mu}) + 2\delta^{\beta}_{\mu}(E^{\rho}_{\nu}H^{\alpha}_{\rho} + H^{\rho}_{\nu}E^{\alpha}_{\rho}) - 2\delta^{\alpha}_{\mu}(E^{\rho}_{\nu}H^{\beta}_{\rho} + H^{\rho}_{\nu}E^{\beta}_{\rho}) + \\
& + 2\delta^{\alpha}_{\nu}(E^{\rho}_{\mu}H^{\beta}_{\rho} + H^{\rho}_{\mu}E^{\beta}_{\rho}) - 2\delta^{\beta}_{\nu}(E^{\rho}_{\mu}H^{\alpha}_{\rho} + H^{\rho}_{\mu}E^{\alpha}_{\rho}) + \\
& + 2\eta^{\alpha\beta ab}u_{\mu}u_{a}(E^{\rho}_{b}E_{\rho\nu} - H^{\rho}_{b}H_{\rho\nu}) - 2\eta^{\alpha\beta ab}u_{\nu}u_{a}(E^{\rho}_{b}E_{\rho\mu} - H^{\rho}_{b}H_{\rho\mu}) + \\
& + 2\eta_{\mu\nu st}u^{\alpha}u^{s}(E^{\beta}_{\rho}E^{\rho t} - H^{\beta}_{\rho}H^{\rho t}) - 2\eta_{\mu\nu st}u^{\beta}u^{s}(E^{\alpha}_{\rho}E^{\rho t} - H^{\alpha}_{\rho}H^{\rho t}) + \\
& + 4(u^{\alpha}u_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu} - u^{\alpha}u_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - u^{\beta}u_{\nu}\delta^{\alpha}_{\mu} + u^{\beta}u_{\mu}\delta^{\alpha}_{\nu} + \delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\alpha}_{\nu})E.H
\end{aligned}
\qquad (B.1)
$$

onde $E.H \equiv E^{\alpha}_{\rho}H^{\rho}_{\alpha}$.

APÊNDICE C

Calculemos os invariantes do campo gravitacional no vazio, definidos em (2.1.5)–(2.1.8), em função dos tensores elétrico ($E_{\alpha\beta}$) e magnético ($H_{\alpha\beta}$). Contraindo (A.2) nos índices (α,β) e ($\mu;\nu$), obtemos que

$$A = \frac{1}{8} W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} = E^{\alpha}_{\beta} E^{\beta}_{\alpha} - H^{\alpha}_{\beta} H^{\beta}_{\alpha} \tag{C.1}$$

Da mesma forma, contraindo (B.1) nos índices (α,β) e (μ,ν), obtemos que

$$B = \frac{1}{8} \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} = 2E^{\alpha}_{\beta} H^{\beta}_{\alpha} \tag{C.2}$$

Calculemos, agora, o produto

$$W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} W^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} =$$

$$= W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \Big[(\eta^{\mu\nu ij} \eta_{\alpha\beta km} - g^{\mu\nu ij} g_{\alpha\beta km}) u_i u^k E^m_j \; +$$

$$+ \; (\eta^{\mu\nu ij} g_{\alpha\beta km} + g^{\mu\nu ij} \eta_{\alpha\beta km}) u_i u^k H^m_j \Big] =$$

$$= W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu ij} \eta_{\alpha\beta km} u_i u^k E^m_j \; -$$

$$- \; W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu ij} g_{\alpha\beta km} u_i u^k E^m_j \; +$$

$$+ W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu ij}g_{\alpha\beta km}u_i u^k H^m_j \quad +$$

$$+ W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu ij}\eta_{\alpha\beta km}u_i u^k H^m_j \qquad (C.3)$$

parcela por parcela, em função dos tensores $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$

1ª Parcela

$$W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu ij}\eta_{\alpha\beta km}u_i u^k E^m_j = 4\overset{*}{W}_{km\rho\sigma}\overset{*}{W}^{\rho\sigma ij}u_i u^k E^m_j =$$

$$= -4W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}u_\alpha u^\mu E^\nu_\beta =$$

$$= -4\left[2(E^\rho_\nu E^\beta_\rho E^\nu_\beta - E^\rho_\nu E^\beta_\rho E^\nu_\beta + E^\beta_\rho E^\rho_\nu E^\nu_\beta) - 2(H^\rho_\nu H^\beta_\rho E^\nu_\mu - H^\rho_\nu H^\beta_\rho E^\nu_\beta + H^\beta_\rho H^\rho_\nu E^\nu_\beta)\right] =$$

$$= -8\,(E^\beta_\rho E^\rho_\nu E^\nu_\beta - H^\beta_\rho H^\rho_\nu E^\nu_\beta)$$

2ª Parcela

$$-W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}g^{\mu\nu ij}g_{\alpha\beta km}u_i u^k E^m_j =$$

$$= -W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}(g^{\mu i}g^{\nu i} - g^{\mu j}g^{\nu i})(g_{\alpha k}g_{\beta m} - g_{\alpha m}g_{\beta k})u_i u^k E^m_j =$$

$$= -4W^{ij}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{km}u_i u^k E^m_j = -4W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}u_\alpha u^\mu E^\nu_\beta =$$

$$= -4\left[2(E^\rho_\nu E^\beta_\rho E^\nu_\beta - E^\rho_\nu E^\beta_\rho E^\nu_\beta + E^\beta_\rho E^\rho_\nu E^\nu_\beta) - 2(H^\rho_\nu H^\beta_\rho E^\nu_\beta - H^\rho_\nu H^\beta_\rho E^\nu_\beta + H^\beta_\rho H^\rho_\nu E^\nu_\beta)\right] =$$

$$= -8\,(E^\beta_\rho E^\rho_\nu E^\nu_\beta - H^\beta_\rho H^\rho_\nu E^\nu_\beta)$$

3ª Parcela

$$\overset{*}{W}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu ij} g_{\alpha\beta km} u_i u^k H^m_j =$$

$$= W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} \overset{*}{W}^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu ij} (g_{\alpha k} g_{\beta m} - g_{\alpha m} g_{\beta k})\; u_i u^k H^m_j =$$

$$= 4 W^{km}{}_{\rho\sigma} \overset{*}{W}^{\rho\sigma}{}_{ij} u^i u_k H^j_m = 4 \overset{*}{W}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} u^\mu u_\alpha H^\nu_\beta =$$

$$= 4 \left[2 (E^\rho_\nu H^\beta_\rho H^\nu_\beta - E^\rho_\nu H^\beta_\rho H^\nu_\beta + E^\beta_\rho H^\rho_\nu H^\nu_\beta) + 2 (H^\rho_\nu E^\beta_\rho H^\nu_\beta - H^\rho_\nu E^\beta_\rho H^\nu_\beta + H^\beta_\rho E^\rho_\nu H^\nu_\beta) \right] =$$

$$= 16\; H^\beta_\rho H^\rho_\nu E^\nu_\beta$$

4ª Parcela

$$W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} g^{\mu\nu ij} \eta_{\alpha\beta km} u_i u^k H^m_j =$$

$$= 2\; \overset{*}{W}_{km\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} (g^{\mu i} g^{\nu j} - g^{\mu j} g^{\nu i}) u_i u^k H^m_j =$$

$$= 4 \overset{*}{W}^{ij}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{km} u_i u^k H^m_j = 4 \overset{*}{W}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} u_\alpha u^\mu H^\nu_\beta =$$

$$= 16\; H^\beta_\rho H^\rho_\nu E^\nu_\beta$$

como podemos ver pela comparação com a parcela anterior. Nos cálculos das duas primeiras parcelas fizemos uso da relação(A.2) e nos cálculos das duas últimas parcelas usamos o produto (B.1)

Levando os resultados acima à expressão (C.3) e considerando a definição (2.1.7) do invariante $\mathbb{C}$, obtemos que

$$\mathbb{C} = \frac{1}{16} W^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} W^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} =$$

$$= -E^{\beta}_{\rho} E^{\rho}_{\nu} E^{\nu}_{\beta} + 3H^{\beta}_{\rho} H^{\rho}_{\nu} E^{\nu}_{\beta} \qquad (C.4)$$

Finalmente, expressemos o produto

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} W^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \qquad (C.5)$$

$$= \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \Big[(\eta^{\mu\nu ij} \eta_{\alpha\beta km} - g^{\mu\nu ij} g_{\alpha\beta km}) u_i u^k E^m_j +$$

$$+ (\eta^{\mu\nu ij} g_{\alpha\beta km} + g^{\mu\nu ij} \eta_{\alpha\beta km}) u_i u^k H^m_j \Big]$$

em termos dos tensores $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$. Para tanto, efetuemos os cálculos indicados, parcela por parcela.

<u>1ª Parcela</u>

$$\overset{*}{W}{}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu ij} \eta_{\alpha\beta km} u_i u^k E^m_j =$$

$$= 4\, \overset{*}{W}_{km\rho\sigma} \overset{**}{W}{}^{\rho\sigma ij} u_i u^k E^m_j = -\,4\, \overset{*}{W}{}^{ij}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{km} u_i u^k E^m_j =$$

$$= -\,4\, \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} u_\alpha u^\mu E^\nu_\beta =$$

$$= -\,4 \Big[2(E^{\rho}_{\nu} H^{\beta}_{\rho} E^{\nu}_{\beta} - E^{\rho}_{\nu} H^{\beta}_{\rho} E^{\nu}_{\rho} + E^{\beta}_{\rho} H^{\rho}_{\nu} E^{\nu}_{\beta}) + 2(H^{\rho}_{\nu} E^{\beta}_{\rho} E^{\nu}_{\beta} - H^{\rho}_{\nu} E^{\beta}_{\rho} E^{\nu}_{\beta} + H^{\beta}_{\rho} E^{\rho}_{\nu} E^{\nu}_{\beta}) \Big] =$$

$$= -\,16\, E^{\beta}_{\rho} E^{\rho}_{\nu} H^{\nu}_{\beta}$$

$$= -8 \ (E^{\beta}_{\rho}E^{\rho}_{\nu}H^{\nu}_{\rho} - H^{\beta}_{\rho}H^{\rho}_{\nu}H^{\nu}_{\beta})$$

em analogia com a parcela anterior. Novamente, fizemos uso, aqui, dos produtos (A.2) e (B.1).

Levando os resultados acima à expressão (C.5) e considerando a definição (2.1.8) do invariante $\mathbb{D}$, obtemos que

$$\mathbb{D} = \frac{1}{16} \overset{*}{W}{}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} W^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} =$$

$$= H^{\beta}_{\rho}H^{\rho}_{\nu}H^{\nu}_{\beta} - 3 \ E^{\beta}_{\rho}E^{\rho}_{\nu}H^{\nu}_{\beta} \qquad \text{(C.6)}$$

APÊNDICE D

Calculemos o tensor de Bel em função das componentes elétrica ($E_{\alpha\beta}$) e magnética ($H_{\alpha\beta}$) do tensor de Weyl. A forma mais conveniente de escrever o tensor de Bel com esta finalidade é dada por

$$T^{\mu\epsilon\nu\tau} = \frac{1}{2}\,(W^{\mu\alpha\nu\beta}W^{\epsilon\ \ \tau}_{\ \alpha\ \ \beta} + \overset{*}{W}{}^{\mu\alpha\nu\beta}\overset{*}{W}{}^{\epsilon\ \ \tau}_{\ \alpha\ \ \beta}) \qquad \text{(D.1)}$$

Substituindo os produtos dentro dos parênteses por suas expressões em têrmos de $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ dadas em (2.2.10) e (2.2.10'), obtemos, após reagruparmos convenientemente todos os termos, as seguintes parcelas:

1ª Parcela

$$= (g^{\mu\epsilon}g^{\nu\tau} - u^{\tau}u^{\nu}g^{\mu\epsilon} - u^{\epsilon}u^{\mu}g^{\nu\tau} + u^{\epsilon}u^{\tau}g^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu}g^{\epsilon\tau} +$$

$$+ 2u^{\mu}u^{\nu}u^{\epsilon}u^{\tau} - u^{\tau}u^{\nu}g^{\mu\epsilon} - u^{\epsilon}u^{\mu}g^{\nu\tau} + u^{\tau}u^{\mu}g^{\nu\epsilon} -$$

$$- u^{\epsilon}u^{\nu}g^{\mu\tau} + 2u^{\mu}u^{\nu}u^{\epsilon}u^{\tau})(E^2 + H^2) =$$

$$= g^{\mu\epsilon}g^{\nu\tau}(E^2 + H^2) - (u^{\epsilon}u^{\tau}g^{\mu\nu} + u^{\mu}u^{\nu}g^{\epsilon\tau} + u^{\mu}u^{\tau}g^{\nu\epsilon} +$$

$$+ u^{\epsilon}u^{\nu}g^{\mu\tau})(E^2+H^2) - 2(u^{\nu}u^{\tau}g^{\mu\epsilon} + u^{\mu}u^{\epsilon}g^{\nu\tau})(E^2+H^2) + 8u^{\mu}u^{\epsilon}u^{\nu}u^{\tau}(E^2+H^2) .$$

2ª Parcela

$$= - g^{\mu\varepsilon}(E^{\tau}_{\alpha}E^{\alpha\nu}+H^{\tau}_{\alpha}H^{\alpha\nu}) - g^{\nu\tau}(E^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\alpha\mu}+H^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha\mu}) +$$

$$+ 2\ (E^{\varepsilon\tau}E^{\mu\nu}+H^{\varepsilon\tau}H^{\mu\nu}) + 2u^{\tau}u^{\nu}(E^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\alpha\mu}+H^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha\mu}) +$$

$$+ 2u^{\varepsilon}u^{\mu}(E^{\tau}_{\alpha}E^{\alpha\nu}+H^{\tau}_{\alpha}H^{\alpha\nu}) + 2u^{\varepsilon}u^{\tau}(E^{\mu}_{\alpha}E^{\alpha\nu}+H^{\mu}_{\alpha}H^{\alpha\nu}) +$$

$$+ 2u^{\mu}u^{\nu}(E^{\tau}_{\alpha}E^{\alpha\varepsilon}+H^{\tau}_{\alpha}H^{\alpha\varepsilon}) - g^{\mu\varepsilon}(E^{\tau}_{\alpha}E^{\alpha\nu}+H^{\tau}_{\alpha}H^{\alpha\nu}) +$$

$$+ 2(E^{\nu\varepsilon}E^{\mu\tau}+H^{\nu\varepsilon}H^{\mu\tau}) + 2u^{\tau}u^{\nu}(E^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\alpha\mu}+H^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha\mu}) +$$

$$+ 2u^{\varepsilon}u^{\mu}(E^{\tau}_{\alpha}E^{\alpha\nu}+H^{\tau}_{\alpha}H^{\alpha\nu}) + 2u^{\varepsilon}u^{\nu}(E^{\tau}_{\alpha}E^{\alpha\mu}+H^{\tau}_{\alpha}H^{\alpha\mu}) -$$

$$- g^{\nu\tau}(E^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\alpha\mu}+H^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha\mu}) + 2u^{\tau}u^{\mu}(E^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\alpha\nu}+H^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha\nu}) =$$

$$= - 2g^{\mu\varepsilon}(E^{\tau}_{\alpha}E^{\alpha\nu}+H^{\tau}_{\alpha}H^{\alpha\nu}) - 2g^{\nu\tau}(E^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\alpha\mu}+H^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha\mu}) +$$

$$+ 2(E^{\varepsilon\tau}E^{\mu\nu}+H^{\varepsilon\tau}H^{\mu\nu}) + 2(E^{\varepsilon\nu}E^{\tau\mu}+H^{\varepsilon\nu}H^{\tau\mu}) +$$

$$+ 2u^{\varepsilon}u^{\tau}(E^{\mu}_{\alpha}E^{\alpha\nu}+H^{\mu}_{\alpha}H^{\alpha\nu}) + 2u^{\mu}u^{\nu}(E^{\tau}_{\alpha}E^{\alpha\varepsilon}+H^{\tau}_{\alpha}H^{\alpha\varepsilon}) +$$

$$+ 2u^{\varepsilon}u^{\nu}(E^{\tau}_{\alpha}E^{\alpha\mu}+H^{\tau}_{\alpha}H^{\alpha\mu}) + 2u^{\tau}u^{\mu}(E^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\alpha\nu}+H^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha\nu}) +$$

$$+ 4u^{\tau}u^{\nu}(E^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\alpha\mu}+H^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha\mu}) + 4u^{\varepsilon}u^{\mu}(E^{\tau}_{\alpha}E^{\alpha\nu}+H^{\tau}_{\alpha}H^{\alpha\nu})$$

3ª Parcela

$$= + \eta^{\alpha\nu\rho\sigma}u^{\tau}u_{\rho}(-g^{\mu\varepsilon}E^{\alpha}_{\sigma}H_{\alpha\beta}+u^{\varepsilon}u^{\nu}E^{\alpha}_{\sigma}H_{\alpha\beta}-E^{\varepsilon}_{\sigma}H^{\mu}_{\beta}+H^{\mu}_{\sigma}E^{\varepsilon}_{\beta} -$$

$$- u^{\varepsilon}u^{\mu}H^{\alpha}_{\sigma}E_{\alpha\beta}+g^{\mu\varepsilon}H^{\alpha}_{\sigma}E_{\alpha\beta}-u^{\mu}u^{\varepsilon}H^{\alpha}_{\sigma}E_{\alpha\beta}-H^{\varepsilon}_{\sigma}E^{\mu}_{\beta}+E^{\mu}_{\sigma}H^{\varepsilon}_{\beta}+u^{\varepsilon}u^{\mu}E^{\alpha}_{\sigma}H_{\alpha\beta}) =$$

$$= + 2\eta^{\nu\alpha\rho\sigma}u^{\tau}u_{\rho}(-g^{\mu\varepsilon}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}+H^{\mu}_{\alpha}E^{\varepsilon}_{\sigma}-E^{\mu}_{\alpha}H^{\varepsilon}_{\sigma}+2u^{\mu}u^{\varepsilon}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma})$$

4ª Parcela

$$= \eta^{\alpha\mu\rho\sigma}u^{\varepsilon}u_{\rho}(g^{\nu\tau}H_{\alpha\beta}E^{\beta}_{\sigma}+u^{\tau}u^{\nu}E_{\alpha\beta}H^{\beta}_{\sigma}-H^{\nu}_{\alpha}E^{\tau}_{\sigma}+H^{\nu}_{\sigma}E^{\tau}_{\alpha} +$$

$$+ u^{\tau}u^{\nu}H^{\beta}_{\sigma}E_{\alpha\beta}-g^{\nu\tau}E_{\alpha\beta}H^{\beta}_{\sigma}+u^{\tau}u^{\nu}E_{\alpha\beta}H^{\beta}_{\sigma}+E^{\nu}_{\alpha}H^{\tau}_{\sigma} -E^{\nu}_{\sigma}H^{\tau}_{\alpha}-u^{\tau}u^{\nu}E^{\beta}_{\sigma}H_{\alpha\beta}) =$$

$$= - 2\eta^{\mu\alpha\rho\sigma}u^{\varepsilon}u_{\rho}(g^{\nu\tau}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}-H^{\nu}_{\alpha}E^{\tau}_{\sigma}+E^{\nu}_{\alpha}H^{\tau}_{\sigma}-2u^{\tau}u^{\nu}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma})$$

5ª Parcela

$$= \eta^{\alpha\varepsilon\rho\sigma}u^{\mu}u_{\rho}(E^{\nu}_{\alpha}H^{\tau}_{\sigma}+u^{\tau}u^{\nu}E^{\beta}_{\alpha}H_{\beta\sigma}+g^{\nu\tau}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}-H^{\tau}_{\alpha}E^{\nu}_{\sigma} -$$

$$- u^{\tau}u^{\nu}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}-H^{\nu}_{\alpha}E^{\tau}_{\sigma}-u^{\tau}u^{\nu}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}-g^{\nu\tau}E^{\beta}_{\alpha}H_{\beta\sigma} +E^{\tau}_{\alpha}H^{\nu}_{\sigma}+u^{\tau}u^{\nu}E^{\beta}_{\alpha}H_{\beta\sigma}) =$$

$$= - 2\eta^{\varepsilon\alpha\rho\sigma}u^{\mu}u_{\rho}(g^{\nu\tau}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}+E^{\nu}_{\alpha}H^{\tau}_{\sigma}-H^{\nu}_{\alpha}E^{\tau}_{\sigma}-2u^{\nu}u^{\tau}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma})$$

6ª Parcela

$$= \eta^{\alpha\tau\rho\sigma}u^{\nu}u_{\rho}(E^{\mu}_{\alpha}H^{\varepsilon}_{\sigma}+u^{\varepsilon}u^{\mu}E^{\beta}_{\alpha}H_{\beta\sigma}+g^{\mu\varepsilon}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}-H^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\mu}_{\sigma}-$$

$$- u^{\varepsilon}u^{\mu}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}-H^{\mu}_{\alpha}E^{\varepsilon}_{\sigma}+E^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\mu}_{\sigma}-u^{\varepsilon}u^{\mu}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}-g^{\mu\varepsilon}E^{\beta}_{\alpha}H_{\beta\sigma}+u^{\varepsilon}u^{\mu}E^{\beta}_{\alpha}H_{\beta\sigma}) =$$

$$= - 2\eta^{\tau\alpha\rho\sigma}u^{\nu}u_{\rho}(g^{\mu\varepsilon}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}+E^{\mu}_{\alpha}H^{\varepsilon}_{\sigma}-H^{\mu}_{\alpha}E^{\varepsilon}_{\sigma}-2u^{\mu}u^{\varepsilon}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma})$$

Reunindo todas essas parcelas em (D.1), obtemos a expressão do tensor de Bel em função das componentes eléctrica ($E_{\alpha\beta}$) e magnética $(H_{\alpha\beta})$ do tensor de Weyl, isto é:

$$T^{\mu\varepsilon\nu\tau} = \frac{1}{2} g^{\mu\varepsilon} g^{\nu\tau}(E^2+H^2) + 4u^{\mu}u^{\varepsilon}u^{\nu}u^{\tau}(E^2+H^2) -$$

$$- \frac{1}{2} (u^{\varepsilon}u^{\tau}g^{\mu\nu}+u^{\mu}u^{\nu}g^{\varepsilon\tau}+u^{\mu}u^{\tau}g^{\nu\varepsilon}+u^{\nu}u^{\varepsilon}g^{\mu\tau})(E^2+H^2) -$$

$$- (u^{\nu}u^{\tau}g^{\mu\varepsilon}+u^{\mu}u^{\varepsilon}g^{\nu\tau})(E^2+H^2) -$$

$$- g^{\mu\varepsilon}(E^{\nu}_{\alpha}E^{\alpha\tau}+H^{\nu}_{\alpha}H^{\alpha\tau}) - g^{\nu\tau}(E^{\mu}_{\alpha}E^{\alpha\varepsilon}+H^{\mu}_{\alpha}H^{\alpha\varepsilon}) +$$

$$+ (E^{\mu\nu}E^{\varepsilon\tau}+H^{\mu\nu}H^{\varepsilon\tau}) + (E^{\varepsilon\nu}E^{\mu\tau}+H^{\varepsilon\nu}H^{\mu\tau}) +$$

$$+ u^{\mu}u^{\nu}(E^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\alpha\tau}+H^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha\tau}) + u^{\varepsilon}u^{\tau}(E^{\mu}_{\alpha}E^{\alpha\nu}+H^{\mu}_{\alpha}H^{\alpha\nu}) +$$

$$+ u^{\varepsilon}u^{\nu}(E^{\mu}_{\alpha}E^{\alpha\tau}+H^{\mu}_{\alpha}H^{\alpha\tau}) + u^{\mu}u^{\tau}(E^{\varepsilon}_{\alpha}E^{\alpha\nu}+H^{\varepsilon}_{\alpha}H^{\alpha\nu}) +$$

$$+ 2u^{\nu}u^{\tau}(E^{\mu}_{\alpha}E^{\alpha\varepsilon}+H^{\mu}_{\alpha}H^{\alpha\varepsilon}) + 2u^{\mu}u^{\varepsilon}(E^{\nu}_{\alpha}E^{\alpha\tau}+H^{\nu}_{\alpha}H^{\alpha\tau}) +$$

$$+ 2\eta^{\alpha\rho\sigma(\nu}{}_{u}{}^{\tau)}u_{\rho}(g^{\mu\varepsilon}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}-H^{\mu}_{\alpha}E^{\varepsilon}_{\sigma}+E^{\mu}_{\alpha}H^{\varepsilon}_{\sigma} - 2u^{\mu}u^{\varepsilon}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}) +$$

$$+ 2\eta^{\alpha\rho\sigma(\mu}{}_{u}{}^{\varepsilon)}u_{\rho}(g^{\nu\tau}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}-H^{\nu}_{\alpha}E^{\tau}_{\sigma}+E^{\nu}_{\alpha}H^{\tau}_{\sigma}-2u^{\nu}u^{\tau}H^{\beta}_{\alpha}E_{\beta\sigma}) \qquad (D.2)$$

Aqui, como sempre, fizemos $E^2 \equiv E^{\alpha}_{\beta}E^{\beta}_{\alpha}$ e $H^2 \equiv H^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}_{\alpha}$

BIBLIOGRAFIA

(1) - Einstein, A.- "Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento", Ann. Physik, 17, 891-921 (1905) - Obras Científicas Completas, T.1 (em Russo).

(2) - Einstein, A.- "Sobre a Teoria da Relatividade Geral", Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 44 (2), 778-786 (1915).

(3) - Rachevsky, P.K. - "Geometria de Riemann e Análise Tensorial" (Moscou, 1953) (em Russo).

(4) - Gehéniau, J., Debever, R. -"Les Invariants de courbure de l'espace de Riemann à quatre dimensions",Bull. Acad.Roy. Belgique, 47, 114 (1956).

(5) - Lanczos, C. - "A Remarkable Property of the Riemann-Christoffel Tensor in Four Dimensions",Ann. of Math., 39, 842 (1938).

(6) - Debever, R. - "La super-énergie en relativité générale",Bull. Soc. Math. Belgique, X, 112 (1958).

(7) - Ellis, G.F.R. - "Relativistic Cosmology" - Int. School of Physics "Enrico Fermi" (Course XLVIII, Varena).

(8) - Novello, M. - "Tópicos de Gravitação" (I Escola de Cosmologia e Gravitação", CBPF, Rio, 1978).