

JOSÉ EDUARDO SOUZA DE CURSI

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE CIRCUITOS RLC DISRUPTIVOS

Tese de Mestrado

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO

1 9 8 0

AGRADECIMENTOS

À Alejandra Rotania de Pozzi , pelo cansativo trabalho de datilografia ;

A Marco Antonio Raupp , pela orientação e por ceder a foto que ilustra os resultados;

Ao Carlos Antonio de Moura , pelas críticas efetuadas;

Aos amigos do CBPF , pelo ambiente criado.

RESUMO

Construímos um algoritmo tipo preditor-corretor para a solução numérica da formulação variacional para um circuito RLC disruptivo.

No capítulo I, apresentamos o problema, mostrando a necessidade da formulação variacional, que é apresentada após a introdução de alguns conceitos básicos de análise convexa.

No capítulo II, usamos a técnica de penalização para mostrar a existência e a unicidade da solução. Tais propriedades são derivadas através do uso de estimativas a priori e resultados de compacidade.

Os capítulos III, IV e V dedicam-se à construção de um algoritmo de discretização e prova de convergência das soluções aproximadas, via estimativas a priori (capítulo III), estudo da estabilidade do algoritmo e obtenção de estimativas para o erro na discretização (capítulo IV), possibilidades de aceleração da convergência para diminuição do tempo de computação (capítulo V).

Finalmente, o capítulo VI apresenta os resultados de algumas experiências numéricas efetuadas para uma melhor avaliação do comportamento do algoritmo.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	II
RESUMO	III
LISTA DE FIGURAS	VI
I. UM CIRCUITO RLC NO LIMAR DE DISRUPÇÃO DO CAPACITOR ...	1
1. Teoria linear dos circuitos RLC	1
2. Uma formulação levando em consideração o fenômeno de rompimento de arco no capacitor	4
3. Conceitos básicos de Análise convexa	6
4. Formulação Matemática do problema	11
II. APROXIMAÇÃO CONTÍNUA: PENALIZAÇÃO	13
1. Enunciado e prova de unicidade	13
2. Penalização	14
3. Estimativas a priori	16
4. Convergência do processo de penalização	19
III. DISCRETIZAÇÃO	22
1. O algoritmo	22
2. Convergência das iterações do corretor	25
3. Abordagem matricial do problema de convergência do corretor	29
4. Um algoritmo alternativo	31
5. Convergência de discretização	33
IV. ESTABILIDADE E PRECISÃO DO ALGORITMO	39
1. Os dois tipos de erro local	39
2. Fórmula exata do erro	41
3. Estimativas para o erro global	44

4.	O erro no algoritmo alternativo	46
5.	Estimativas a priori e estabilidade	48
V.	ACELERAÇÃO DA CONVERGÊNCIA	50
1.	Primeira modificação: Uso de $I_{(j+1)}^{n+1}$	51
2.	Segunda modificação: Uso de $V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1}$	53
3.	Relaxação	55
4.	Relaxação no algoritmo III.1	57
5.	Política de escolha do método de aceleração	59
VI.	EXEMPLOS NUMÉRICOS	61
	REFERÊNCIAS	68

LISTA DE FIGURAS

I.1.1.- Diagrama de um circuito RLC clássico	1
I.1.2.- Gráfico $q_{\text{E}} \times V_{\text{E}}$ na teoria linear	3
I.2.1.- O circuito RLC modificado	7
I.2.2.- Comportamento do "arco elétrico"	7
II.2.1.- Gráfico de j e j_{μ}	15
II.2.2.- O circuito aproximado	15
VI.1. - Resultados para o primeiro circuito	
a) A corrente no circuito	62
b) A ddp no capacitor	63
VI.2. - Resultados para o segundo circuito	
a) A corrente no circuito	64
b) A ddp no capacitor	65
VI.3. - Resultados para o terceiro circuito	
a) A corrente no circuito	66
b) A ddp no capacitor	66
VI.4. - Resultado experimental	67

I. UM CIRCUITO RLC NO LIMÍAR DE DISRUPÇÃO DO CAPACITOR

1. Teoria linear dos circuitos RLC.

A teoria dos circuitos elétricos denomina RLC o circuito formado por uma resistência R , uma indutância L , um capacitor C e submetido a uma tensão V_{ext} , fornecida por uma fonte externa, usualmente uma pilha ou bateria (Cf.fig.I.1.1).

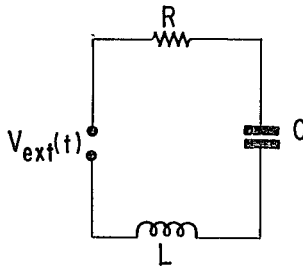


fig.I.1.1 - Diagrama de um circuito RLC clássico

A descrição deste circuito é feita através das seguintes equações:

a) *leis de comportamento*

$$V_R = RI_R \quad (\text{Ohm}) \quad , \quad (\text{I.1.1})$$

$$V_L = L \frac{dI_L}{dt} \quad (\text{Lenz}) \quad , \quad (\text{I.1.2})$$

$$V_C = \frac{q_C}{C} \quad , \quad (\text{I.1.3})$$

onde V_R , V_L , V_C representam as tensões nos elementos R , L e C res

pectivamente. I_R e I_L são as correntes através dos elementos R e L, enquanto q_C representa a carga acumulada no capacitor.

b) *leis de balanço (Kirchoff)*

$$V_{\text{ext}} = V_R + V_C + V_L \quad (\text{I.1.4})$$

$$I_R = I_C = I_L = I \quad (\text{I.1.5})$$

onde $I_C = \frac{dq_C}{dt}$ e I é chamada a corrente no circuito.

Isto significa que, para determinar o estado de um circuito RLC, devemos resolver um problema matemático que pode ser assim formulado: "determinar funções I e V_C deriváveis tais que:

$$I = C \frac{dV_C}{dt} \quad \text{em } [0, T] \quad (\text{I.1.6})$$

$$V_{\text{ext}} = V_C + RI + L \frac{dI}{dt} \quad \text{em } [0, T] \quad (\text{I.1.7})$$

$$I(0) = 0 \quad (\text{I.1.8})$$

$$V_C(0) = 0 \quad (\text{I.1.9})$$

As soluções deste problema são bastante conhecidas, sendo possível obtê-las analiticamente através do uso de transformadas integrais ou outros processos de resolução de sistemas lineares (1,2,3)

Esta teoria, entretanto, admite comportamento linear para os três elementos constituintes do circuito (equações (I.1.1)-(I.1.3)). Por exemplo, um ponto criticável é a proporcionalidade de q_C e V_C , independentemente do valor desta ddp (fig. I.1.2). Este modelo não corresponde à realidade física de um capacitor, u

ma vez que uma ddp excessiva(ou seja, uma carga excessiva) pode provocar a ionização do dielétrico entre as placas. Parece claro então que existem valores críticos da ddp e da carga armazenada, entre os quais deve ser mantido o comportamento linear e tais que qualquer tentativa de ultrapassá-los provocaria uma descarga elétrica. Caso a ddp atinja valores maiores que o crítico, ocorre a destruição do dielétrico.

Tais efeitos não tem lugar na teoria clássica de circuitos elétricos, que só descreve o circuito em seu intervalo de comportamento linear. Para descrever o estado do circuito no limiar de destruição do capacitor faz-se necessária uma nova formulação.

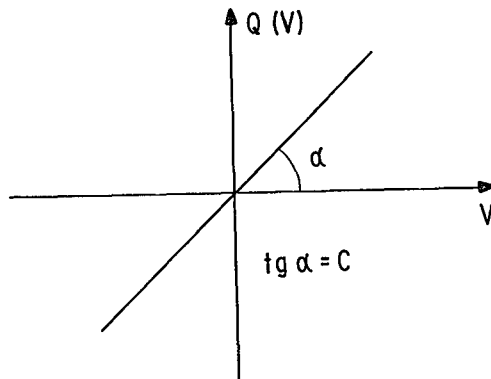


fig.(I.1.2) - Gráfico $q_{\text{e}} \times V_{\text{e}}$ na teoria linear

2. Uma formulação levando em consideração o fenômeno de rompimento de arco no capacitor.

A possibilidade de correntes de disrupção no capacitor deve ser representada por uma não linearidade a ser introduzida na equação (I.1.6), o que, na linguagem da teoria dos circuitos, significaria introduzir um novo elemento no circuito, um "arco elétrico" em paralelo com o capacitor, através do qual processam-se as correntes de disrupção. Este "arco elétrico" seria ativado quando a tensão a que estivesse submetido atingisse um valor crítico V_d - o potencial de disrupção.

Na transmissão do comportamento linear para a destruição do dielétrico, surgiria então um arco elétrico que poderia ser simulado por uma "corrente de disrupção" j .

Nos termos da teoria dos circuitos, a lei de balanço (I.1.5) seria modificada para:

$$I_R = I_L = I = \frac{dq_{\mathbb{E}}}{dt} + j(V_{\mathbb{E}}) \quad (\text{I.2.10})$$

onde $j(V_{\mathbb{E}})$ deveria descrever o comportamento do elemento " arco elétrico". É fisicamente plausível que uma função característica do tipo apresentado na fig. I.2.2 possa desempenhar tal papel.

Esta idéia foi proposta por Baiocchi e Raupp nas referências (4) e (5). Ali os autores mostram também que este comportamento é melhor descrito por um gráfico que por uma função

em seu sentido usual, caracterizando o comportamento do elemento "arco elétrico" por uma função "set-valued" dada por:

$$j(V_{\mathbb{E}}) = \begin{cases} \{0\} , & V_{\mathbb{E}} = -V_d \text{ e } \frac{dV_{\mathbb{E}}}{dt} > 0 \\ \mathbb{R}_- , & V_{\mathbb{E}} = -V_d \text{ e } \frac{dV_{\mathbb{E}}}{dt} = 0 \\ \{0\} , & |V_{\mathbb{E}}| < V_d \\ \mathbb{R}_+ , & V_{\mathbb{E}} = V_d \text{ e } \frac{dV_{\mathbb{E}}}{dt} = 0 \\ \{0\} , & V_{\mathbb{E}} = V_d \text{ e } \frac{dV_{\mathbb{E}}}{dt} < 0 \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Usando esta nova notação , o problema de determinar o estado do circuito em um intervalo de tempo $[0, T]$ é formulado como: "determinar I e $V_{\mathbb{E}}$ suficientemente regulares tais que:

$$I - C \frac{dV_{\mathbb{E}}}{dt} \in j(V_{\mathbb{E}}) \quad \text{em } [0, T] \quad (1.2.12)$$

$$V_{\text{ext}} = V_{\mathbb{E}} + RI + L \frac{dI}{dt} \quad \text{em } [0, T] \quad (1.2.13)$$

$$-V_d \leq V_{\mathbb{U}}(t) \leq V_d \quad \text{em } [0, T] \quad (\text{I.2.14})$$

$$I(0) = 0 \quad (\text{I.2.15})$$

$$V_{\mathbb{U}}(0) = 0 \quad (\text{I.2.16})$$

A compatibilidade destas equações, a existência e unicidade de suas soluções foram estabelecidas na referência(4) , bem como uma formulação mais precisa do ponto de vista matemático. Em função de tornar completo o presente trabalho, introduziremos alguns conceitos básicos de Análise Convexa que nos permitirão apresentar esta formulação. Isto servirá de base para o desenvolvimento da teoria matemática do problema que apresentaremos no capítulo II.

3. Conceitos básicos de Análise Convexa.

Apresentaremos inicialmente os conceitos de subgradiente e subdiferencial de uma função real convexa. Suas propriedades não serão aprofundadas aqui. Para os interessados a referência (6) contém uma introdução e (7) e (8) apresentam tratamentos mais avançados do assunto. A referência(9) dedica-se especialmente a funções em espaços de dimensão finita, enquanto(8) dedica-se à dimensão infinita. Em(7), na seção 4 são apresentados conceitos e propriedades básicas de funções convexas e na seção 23, os conceitos e propriedades dos subgradientes e subdiferenciais. Na referência(8) tais assuntos encontram-se na parte I, seções 2 e 5 respectivamente.

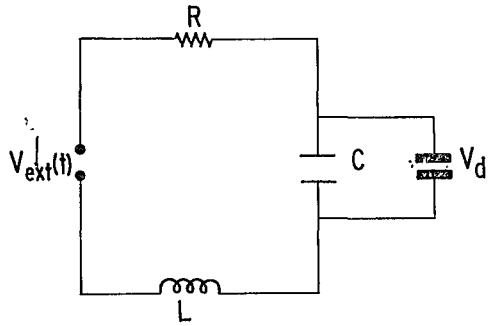


fig.(I.2.1) - O circuito RLC modificado

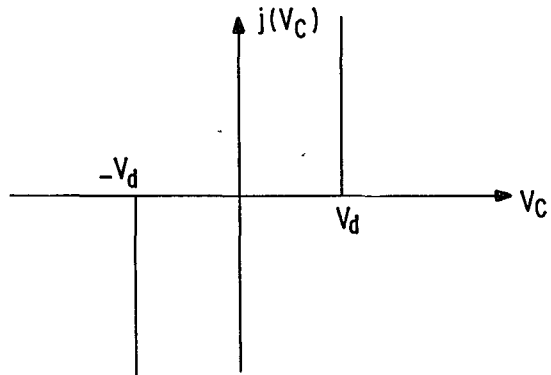


fig.I.2.2 - Comportamento do "arco elétrico"

Definição I.3.1. Subgradiente de uma função Real Convexa.

Seja $\rho: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e $x_0 \in \mathbb{R}$. Dizemos que $\xi \in \mathbb{R}$ é um subgradiente de ρ no ponto x_0 se e somente se:

$$\rho(x) \geq \rho(x_0) + \xi(x-x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{I.3.17})$$

Se ρ é derivável em x_0 , seu único subgradiente em x_0 é o valor $\xi_0 = \rho'(x_0)$, pois da definição (I.3.17) resulta:

$$\frac{\rho(x) - \rho(x_0)}{x - x_0} \leq \xi, \quad \forall x < x_0 \quad (\text{I.3.18})$$

$$\frac{\rho(x) - \rho(x_0)}{x - x_0} \geq \xi, \quad \forall x > x_0 \quad (\text{I.3.19})$$

para todo ξ subgradiente de ρ em x_0 . Como ρ é derivável em x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\rho(x) - \rho(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\rho(x) - \rho(x_0)}{x - x_0} = \rho'(x_0) \quad (\text{I.3.20})$$

As equações (I.3.18) - (I.3.19) levam a:

$$\xi \geq \rho'(x_0) \text{ e } \xi \leq \rho'(x_0) \Rightarrow \xi = \rho'(x_0) \quad (\text{I.3.21})$$

Assim, o único candidato a subgradiente é $\xi_0 = \rho'(x_0)$. Mas, da convexidade de ρ :

$$\rho(x) - \rho(x_0) \leq \rho'(x_0) \cdot (x-x_0) \quad (\text{I.3.22})$$

e o único subgradiente de ρ em x_0 é $\rho'(x_0)$.

O conceito de subgradiente é, porém, mais amplo que o de derivada. Funções convexas podem possuir um ou mais subgradi- entes em pontos onde não são deriváveis. Alguns exemplos es- clarecerão melhor este conceito.

Exemplo 1.3.1 - Função convexa com infinitos subgradientes na origem.

Seja $\rho: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ dada por $\rho(x) = |x|$.

Da desigualdade triangular segue-se trivialmente a convexidade de ρ . Além disso, ξ é subgradiente de ρ em $x_0 = 0$ se e só se:

$$|x| \geq \xi x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{I.3.23})$$

A solução desta inequação é:

$$V = \{\xi \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \xi \leq 1\} \quad (\text{I.3.24})$$

E portanto qualquer número real no intervalo $[-1, 1]$ é um subgradiente de ρ em $x = 0$.

Exemplo 1.3.2 - Função convexa sem subgradiente $x \notin [-1, 1]$

Seja $\rho: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ dada por:

$$\rho(x) = \begin{cases} +\infty, & x \notin [-1, 1] \\ 0, & x \in [-1, 1] \end{cases} \quad (\text{I.3.23})$$

ρ é conhecida como função indicatriz do intervalo $[-1, 1]$.

Para $x \in (-1, 1)$, ρ é derivável e portanto o único subgradiente de ρ nesse intervalo é $\xi = 0$.

Para $x_0 = 1$, ξ é subgradiente de ρ se e somente se

$$\rho(x) \geq \xi(x-1), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{I.3.24})$$

desigualdade que tem como conjunto-solução $V = \{\xi \in \mathbb{R} \mid \xi \geq 0\} = \mathbb{R}_+$.

Se $x_0 = -1$, a inequação a resolver é

$$\rho(x) \geq \xi(x+1), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{I.3.25})$$

cuja solução é $V = \{\xi \in \mathbb{R} \mid \xi \leq 0\} = \mathbb{R}_-$.

Entretanto, se $x_0 \notin [-1, 1]$ e ξ é subgradiente de ρ em x_0 :

$$\rho(x) \geq \rho(x_0) + \xi(x-x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{I.3.26})$$

Para $x = 0$, isto significa

$$\xi \geq +\infty \quad (\text{I.3.27})$$

E portanto nenhum $\xi \in \mathbb{R}$ pode ser subgradiente de ρ em x_0 .

Estas considerações e o desejo de introduzir um elemento capaz de representar o papel atribuído à diferencial no cálculo tradicional motivam um novo conceito.

Definição I.3.2: Subdiferencial de uma função real convexa.

Seja $\rho: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, definimos o subdiferencial de ρ no ponto x_0 como o conjunto $\partial\rho(x_0)$ definido por

$$\xi \in \partial\rho(x_0) \iff \xi \text{ é subgradiente de } \rho \text{ no ponto } x_0.$$

Contrariamente ao subgradiente, o subdiferencial sempre existe. Caso não haja subgradiente de ρ em x_0 , temos $\partial\rho(x_0) = \emptyset$.

Exemplo I.3.3 - Subdiferencial de uma função convexa.

Seja $\rho: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ dada por $\rho(x) = |x|$. Do exemplo I.3.1, vemos que:

$$\partial\rho(x) = \begin{cases} \{-1\}, & x < 0 \\ [-1, 1], & x = 0 \\ \{1\}, & x > 0 \end{cases} \quad (\text{I.3.28})$$

Propriedades análogas à da diferenciabilidade clássica (expansões de Taylor, continuidade, etc) são, de certo modo, mantidas pelo subdiferencial. Tais temas estão, entretanto, além dos objetivos a que nos propomos. A referência (7) pode ser consultada para um estudo sobre estes tópicos.

4. Formulação matemática do problema.

Seja $I_d = [-V_d, +V_d]$ e definamos $J: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ por:

$$J(x) = \begin{cases} 0, & x \in I_d \\ +\infty, & x \notin I_d \end{cases} \quad (\text{I.4.29})$$

J é então a indicatriz de I_d . É então trivial obter (Cf. exemplo I.3.2):

$$\partial J(x) = \begin{cases} \phi, & x < -V_d \\ \mathbb{R}_-, & x = -V_d \\ \{0\}, & -V_d < x < V_d \\ \mathbb{R}_+, & x = V_d \\ \phi, & x > V_d \end{cases} \quad (\text{I.4.30})$$

Aproximando então $j(x) \sim \partial J(x)$ (Cf. eqs. (I.2.11)), a expressão para (I.2.12) é:

$$\left[\dot{I}(t) - \frac{dq}{dt}(t) \right] \in \partial J(V_{\mathbb{C}}) \quad (\text{I.4.31})$$

Usando a definição (I.3.1), resulta

$$J(V) \geq J(V_{\mathbb{C}}) + \left[I - \frac{dq}{dt} \right](t) [V - V_{\mathbb{C}}], \quad \forall V \in \mathbb{R} \quad (\text{I.4.32})$$

Introduzindo a lei de comportamento do capacitor (eq. (I.1.3)):

$$\left[\mathbb{E} \frac{dV_{\mathbb{C}}}{dt} - I \right](t) [V - V_{\mathbb{C}}(t)] \geq 0, \quad \forall V \in I_d \quad (\text{I.4.33})$$

onde já utilizamos a definição de J para reduzir o problema ao

intervalo I_d .

O problema matemático a ser resolvido pode ser então formulado (5,6) da seguinte forma: Determinar funções I e V_C tais que:

$$(i) \quad V_C(t) \in I_d \quad \forall t \in [0, T] \quad (I.4.34)$$

$$(ii) \quad V_{ext}(t) = L \frac{dI}{dt}(t) + RI(t) + V_C(t), \forall t \in [0, T] \quad (I.4.35)$$

$$(iii) \quad \left[C \frac{dV_C}{dt} - I \right](t) \left[V - V_C(t) \right] \geq 0, \forall t \in [0, T] \quad (I.4.36)$$

$$\forall V \in I_d$$

$$(iv) \quad I(0) = V_C(0) = 0 \quad (I.4.37)$$

Deve-se observar que a determinação de $V_C(t)$ implica na obtenção de $q_C(t)$, tendo em vista a lei de comportamento do capacitor. Por este motivo, eliminamos a equação correspondente do problema. O uso de condições iniciais homogêneas visa tão somente a simplificação dos cálculos uma vez que os argumentos apresentados podem ser repetidos levando em consideração condições iniciais quaisquer.

II - APROXIMAÇÃO CONTÍNUA: PENALIZAÇÃO

Neste capítulo iremos enunciar e demonstrar o resultado de (6) sobre existência e unicidade da solução do problema (I.4.34) - (I.4.37). Tal prova será efetuada em quatro etapas:

- 1 - Unicidade
- 2 - Penalização
- 3 - Estimativas a priori para as soluções visando a prova de convergência do processo de penalização
- 4 - Convergência da penalização: existência de solução

1. Enunciado e Prova de Unicidade.

Teorema II.1.1: Sejam $T > 0$ e $V_{\text{ext}} \in L^2(0, T)$ dados. Suponha também que $\frac{dV_{\text{ext}}}{dt} \in L^2(0, T)$. Então existe um único par de funções $(I, V_{\mathbb{E}})$ tais que:

$$I \in L^\infty(0, T) \cap L^2(0, T) \cap \mathcal{E}^0(0, T) \quad (\text{II.1.1})$$

$$V_{\mathbb{E}} \in L^\infty(0, T) \cap \mathcal{E}^0(0, T) \quad (\text{II.1.2})$$

$$\frac{dI}{dt} \in L^\infty(0, T) \cap L^2(0, T) \quad (\text{II.1.3})$$

$$\frac{dV_{\mathbb{E}}}{dt} \in L^\infty(0, T) \quad (\text{II.1.4})$$

e são soluções de (I.4.34) - (I.4.37) quase toda parte em $(0, T]$. Além disso, existe uma constante K tal que:

$$\|I\|_\infty + \|I\|_2 + \|V_{\mathbb{E}}\|_\infty \leq K \|V_{\text{ext}}\|_2 \quad (\text{II.1.5})$$

e quando $T \rightarrow \infty$, $I(T) \rightarrow 0$.

Para a prova deste resultado, comecemos com a etapa de unicidade: Sejam $(I^1, V_{\mathbb{C}}^1)$, $(I^2, V_{\mathbb{C}}^2)$ duas soluções nas condições do teorema. Sejam então $I = I^1 - I^2$ e $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}}^1 - V_{\mathbb{C}}^2$. Temos:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + V_{\mathbb{C}} = 0 \quad (\text{II.1.6})$$

$$V_{\mathbb{C}} \left[I - \mathbb{C} \cdot \frac{dV_{\mathbb{C}}}{dt} \right] \geq 0 \quad (\text{II.1.7})$$

$$I(0) = V_{\mathbb{C}}(0) = 0 \quad (\text{II.1.8})$$

Multiplicando (II.1.6) por I , vem:

$$\frac{L}{2} \frac{dI^2}{dt} + RI^2 + V_{\mathbb{C}}I = 0 \quad (\text{II.1.9})$$

E usando (II.1.7):

$$\frac{L}{2} \frac{dI^2}{dt} + RI^2 + \frac{\mathbb{C}}{2} \frac{dV_{\mathbb{C}}^2}{dt} \leq 0 \quad (\text{II.1.10})$$

Integrando (II.1.10) de 0 a t , vem:

$$\frac{L}{2} I^2 + \frac{\mathbb{C}}{2} V_{\mathbb{C}}^2 + R \int_0^t I^2(\tau) d\tau \leq 0 \quad (\text{II.1.11})$$

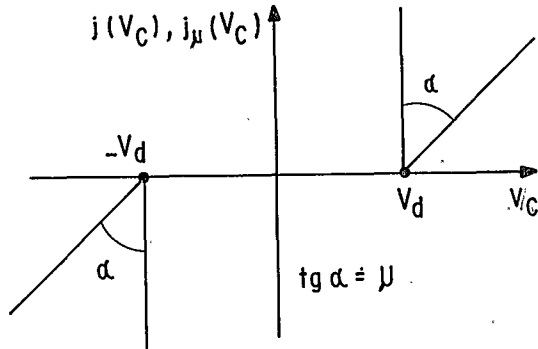
para todo $t \geq 0$. Como o membro da esquerda é uma soma de termos não negativos, isto implica:

$$I = 0 \quad \text{e} \quad V_{\mathbb{C}} = 0 \quad (\text{II.1.12})$$

o que estabelece a unicidade da solução.

2. Penalização.

A penalização consiste na aproximação da função "set-valued" definida em (I.4.30) por uma função a valores reais cujo gráfico tende ao gráfico da figura (I.2.2) quando um parâmetro μ tende a zero. À função de penalização chamamos j_{μ} .

Fig.II.2.1 - Gráficos de j e j_μ

Assim como a introdução de j nas equações pode ser interpretada como a alteração do circuito, introduzindo um diodo de potencial crítico V_d em paralelo com o capacitor (6), aproximação de j por j_μ corresponde à introdução de uma resistência μ e um gerador em paralelo com o condensador (fig.II.2.2)

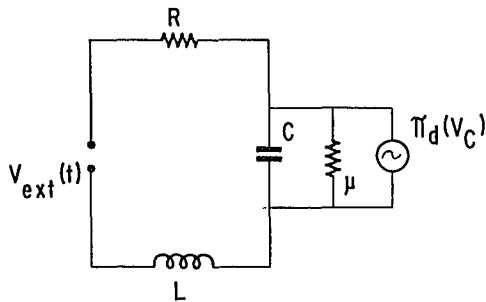


Fig.II.2.2 - O circuito aproximado

A diferença de potencial fornecida por esse gerador é o negativo da projeção de $V_{\mathbb{C}}$ no intervalo $[-V_d, V_d]$ que é a função $\pi_d: \mathbb{R} \rightarrow I_d$, dada por

$$\pi_d(x) = \begin{cases} -V_d & , \quad x < -V_d \\ x & , \quad x \in I_d \\ V_d & , \quad x > V_d \end{cases} \quad (\text{II.2.13})$$

A função j_μ pode ser então definida como:

$$j_\mu(x) = \frac{1}{\mu} (x - \pi_d(x)) \quad (\text{II.2.14})$$

O problema a resolver é então: determinar funções $(I^\mu, V_{\mathbb{C}}^\mu)$ tais que:

$$L \frac{dI^\mu}{dt} + RI^\mu + V_{\mathbb{C}}^\mu = V_{\text{ext}} \quad (\text{II.2.15})$$

$$I^\mu = \mathbb{E} \frac{dV_{\mathbb{C}}^\mu}{dt} + j_\mu(V_{\mathbb{C}}^\mu) \quad (\text{II.2.16})$$

$$I^\mu(0) = V_{\mathbb{C}}^\mu(0) = 0 \quad (\text{II.2.17})$$

Como j_μ obedece a uma condição de Lipschitz, é possível construir uma sequência de soluções aproximadas $(I^\mu, V_{\mathbb{C}}^\mu)$ e espera-se que, para $\mu \rightarrow 0$, esta sequência seja convergente e este limite seja uma solução de (I.4.34) - (I.4.37).

3. Estimativas a priori.

Uma vez que a unicidade da solução já está estabelecida (Seção 1), devemos estabelecer a existência. Nosso objetivo

será então estabelecer que a sequência $(I^\mu, V_\mathbb{E}^\mu)$ possui pontos de acumulação e que estes pontos de acumulação são soluções de (I.4.34) - (I.4.37). Para isso, serão necessárias as estimativas obtidas nesta seção.

A primeira estimativa é obtida multiplicando-se (II.2.15) por I^μ , (II.2.16) por $V_\mathbb{E}^\mu$:

$$\frac{L}{2} \frac{d}{dt} (I^\mu)^2 + R (I^\mu)^2 + V_\mathbb{E}^\mu I^\mu = V_{\text{ext}} I^\mu \quad (\text{II.3.18})$$

$$V_\mathbb{E}^\mu I^\mu = \frac{\mathbb{E}}{2} \frac{d}{dt} (V_\mathbb{E}^\mu)^2 + V_\mathbb{E}^\mu j_\mu (V_\mathbb{E}^\mu) \quad (\text{II.3.19})$$

Substituindo a segunda na primeira e integrando de 0 até t :

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} (I^\mu)^2 + \frac{\mathbb{E}}{2} (V_\mathbb{E}^\mu)^2 + R \int_0^t (I^\mu(\tau))^2 d\tau + \int_0^t V_\mathbb{E}^\mu(\tau) j_\mu (V_\mathbb{E}^\mu(\tau)) d\tau \\ = \int_0^t V_{\text{ext}}(\tau) I^\mu(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{II.3.20})$$

Por outro lado

$$V_{\text{ext}} \cdot I^\mu \leq \frac{1}{2R} V_{\text{ext}}^2 + \frac{R}{2} (I^\mu)^2 \quad (\text{II.3.21})$$

Assim, usando o fato de que $j_\mu (V_\mathbb{E}^\mu) \cdot V_\mathbb{E}^\mu \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} (I^\mu)^2 + \frac{\mathbb{E}}{2} (V_\mathbb{E}^\mu)^2 + \frac{R}{2} \int_0^t [I^\mu(\tau)]^2 d\tau \leq \\ \leq \frac{1}{2R} \int_0^t V_{\text{ext}}^2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{II.3.22})$$

Isto nos permite concluir:

$$\frac{L}{2} \| I^\mu \|_\infty^2 + \frac{\mathbb{E}}{2} \| V_\mathbb{E}^\mu \|_\infty^2 + \frac{R}{2} \| I^\mu \|_2^2 \leq \frac{1}{2R} \| V_{\text{ext}} \|_2^2 \quad (\text{II.3.23})$$

Assim:

- (i) I^μ pertence a um conjunto limitado de $L^\infty(0, T) \cap L^2(0, T)$
(ii) $V_{\mathbb{E}}^\mu$ pertence a um conjunto limitado de $L^\infty(0, T)$

Por outro lado, tomando as derivadas em (II.2.15) e (II.2.16) e multiplicando as equações resultantes por $\frac{dI^\mu}{dt}$ e $\frac{dV_{\mathbb{E}}^\mu}{dt}$ respectivamente, obtemos:

$$\frac{L}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dI^\mu}{dt} \right)^2 + R \left(\frac{dI^\mu}{dt} \right)^2 + \frac{dV_{\mathbb{E}}^\mu}{dt} \cdot \frac{dI^\mu}{dt} = \frac{dV_{\text{ext}}}{dt} \cdot \frac{dI^\mu}{dt} \quad (\text{II.3.24})$$

$$\frac{dI^\mu}{dt} \cdot \frac{dV_{\mathbb{E}}^\mu}{dt} = \frac{\mathbb{E}}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dV_{\mathbb{E}}^\mu}{dt} \right)^2 + \frac{dj_\mu}{dt} \frac{dV_{\mathbb{E}}^\mu}{dt} \quad (\text{II.3.25})$$

Mas

$$\frac{dj_\mu}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{j_\mu(V_{\mathbb{E}}(t+\Delta t)) - j_\mu(V_{\mathbb{E}}(t))}{\Delta t} \quad (\text{II.3.26})$$

e este limite existe, pois $(I^\mu, V_{\mathbb{E}}^\mu)$ é solução do problema (II.2.15)-(II.2.17).

Assim, usando o fato de que j_μ é monótona, temos:

$$\frac{dV_{\mathbb{E}}^\mu}{dt} \cdot \frac{dj_\mu}{dt} \geq 0 \quad (\text{II.3.27})$$

E resulta, substituindo (II.3.24) em (II.3.25) e usando (II.3.27):

$$\begin{aligned} & \frac{L}{2} \left[\frac{dI^\mu}{dt} \right]^2 + \frac{\mathbb{E}}{2} \left[\frac{dV_{\mathbb{E}}^\mu}{dt} \right]^2 + R \int_0^t \left[\frac{dI^\mu}{dt}(\tau) \right]^2 d\tau \leq \\ & \int_0^t \left[\frac{dV_{\text{ext}}}{dt} \cdot \frac{dI^\mu}{dt} \right] d\tau + \Lambda \end{aligned} \quad (\text{II.3.28})$$

onde $\Lambda = \frac{2}{L} V_{\text{ext}}^2(0)$ é uma constante de integração. De forma inteiramente análoga à usada para obter (II.3.23) resulta:

$$\frac{L}{2} \left\| \frac{dI^\mu}{dt} \right\|_\infty^2 + \frac{C}{2} \left\| \frac{dV^\mu}{dt} \right\|_\infty^2 + \frac{R}{2} \left\| \frac{dI^\mu}{dt} \right\|_2^2 \leq \frac{1}{2R} \left\| \frac{dV_{\text{ext}}}{dt} \right\|_2^2 + \Lambda \quad (\text{II.3.29})$$

E portanto:

- (i) $\frac{dI^\mu}{dt}$ pertence a um conjunto limitado de $L^\infty(0,T) \cap L^2(0,T)$
- (ii) $\frac{dV^\mu}{dt}$ pertence a um conjunto limitado de $L^\infty(0,T)$

Não deve deixar de ser notado que (II.3.23) e (II.3.29) levam, usando (II.2.16), à conclusão de que $j_\mu(V_\mathbb{E}(t))$ está em um conjunto limitado de $L^\infty(0,T)$, qualquer que seja $\mu > 0$.

4. Convergência do processo de penalização.

Para estabelecer a existência de um limite para a sequência $(I^\mu, V_\mathbb{E}^\mu)$ devemos notar inicialmente que:

$$|I^\mu(t_1) - I^\mu(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{dI^\mu}{dt}(\tau) d\tau \right| \leq \Gamma |t_1 - t_2| \quad (\text{II.4.30})$$

$$|V_\mathbb{E}^\mu(t_1) - V_\mathbb{E}^\mu(t_2)| = \left| \int_{t_2}^{t_1} \frac{dV_\mathbb{E}^\mu}{dt}(\tau) d\tau \right| \leq \Gamma |t_1 - t_2| \quad (\text{II.4.31})$$

onde usamos as desigualdades (II.3.23) e (II.3.29). Estas relações em conjunto com (II.4.30) - (II.4.31) mostram que as famílias $\{I^\mu\}$, $\{V_\mathbb{E}^\mu\}$ são limitadas e equicontínuas. Assim, pelo teorema de Arzelá-Ascoli(9,10), existem funções I , $V_\mathbb{E}$ em $\mathcal{E}^0(0,T)$ que são limites uniformes de subsequências $\{I^\nu\} \subset \{I^\mu\}$ e $\{V_\mathbb{E}^\nu\} \subset \{V_\mathbb{E}^\mu\}$

para $v \rightarrow 0$.

Também de (II.3.23) e (II.3.29) resulta, para $v \rightarrow 0$:

- (i) I^v converge fracamente (11, 12, 13) para I em $L^2(0, T)$
- (ii) I^v converge fraco-estrela (11, 12, 13) para I em $L^\infty(0, T)$
- (iii) $V_{\mathbb{E}}^v$ converge fraco-estrela para $V_{\mathbb{E}}$ em $L^\infty(0, T)$
- (iv) $\frac{dI^v}{dt}$ converge fracamente para $\frac{dI}{dt}$ em $L^2(0, T)$
- (v) $\frac{dI^v}{dt}$ converge fraco-estrela para $\frac{dI}{dt}$ em $L^\infty(0, T)$
- (vi) $\frac{dV_{\mathbb{E}}^v}{dt}$ converge fraco-estrela para $\frac{dV_{\mathbb{E}}}{dt}$ em $L^\infty(0, T)$

Das equações (II.2.15) e (II.2.16) obtemos então (I.4.35) e (I.4.37).

Seja agora:

$$J_{I_d}^v(x) = \frac{1}{2v} [x - \pi_d(x)]^2 \quad (\text{II.4.32})$$

e seja

$$M(x) = \frac{1}{2} [x - \pi_d(x)]^2 \quad (\text{II.4.33})$$

Então:

$$(i) \quad j_v(x) = (J_{I_d}^v(x))' \quad (\text{II.4.34})$$

$$(ii) \quad M(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in I_d \quad (\text{II.4.35})$$

$$(iii) \quad M(x) = v J_{I_d}^v(x) \quad (\text{II.4.36})$$

Além disso, como:

$$J_{I_d}^v(x) = \frac{1}{2} j_v(x) [x - \pi_d(x)] \quad (\text{II.4.37})$$

Resulta:

$$\| J_{I_d}^v \|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \| j_v \|_{\infty} (\| V_{\mathbb{E}}^v \|_{\infty} + \| \pi_d \cdot V_{\mathbb{E}}^v \|_{\infty}) \quad (\text{II.4.38})$$

Disto, deduzimos que:

$$0 \leq M(V_{\mathbb{E}}^v(t)) \leq K_v \quad (\text{II.4.39})$$

o que implica:

$$M(V_{\mathbb{E}}^v(t)) = 0 \quad (\text{II.4.40})$$

Isto em conjunto com (II.4.35) estabelece (I.4.34). Por outro lado, como $J_{I_d}^v(x)$ é convexa e derivável, vem:

$$J_{I_d}^v(V) - J_{I_d}^v(V_{\mathbb{E}}^v(t)) \geq j_v(V_{\mathbb{E}}^v(t))(V - V_{\mathbb{E}}^v(t)), \quad \forall t > 0, \forall V \in \mathbb{R} \quad (\text{II.4.41})$$

Para $v \in I_d$, isto equivale a:

$$\left[\mathbb{E} \cdot \frac{dV_{\mathbb{E}}^v}{dt} - I^v \right] \left[V - V_{\mathbb{E}}^v(t) \right] \geq J_{I_d}^v(V_{\mathbb{E}}^v(t)) \quad (\text{II.4.42})$$

Lembrando que $J_{I_d}^v$ é não negativa:

$$\left[\mathbb{E} \frac{dV_{\mathbb{E}}^v}{dt} - I^v \right] \left[V - V_{\mathbb{E}}^v(t) \right] \geq 0, \quad \forall V \in I_d \quad (\text{II.4.43})$$

Tomando os limites para $v \rightarrow 0$, resulta então (I.4.36), o que completa a prova do teorema (II.1.1).

III. DISCRETIZAÇÃO

No capítulo anterior, vimos que o problema (I.4.34) - (I.4.37), pode ser resolvido através de uma seqüência de pares de funções $(I^\mu, V_{\mathbb{E}}^\mu)$, cada um deles solução de um problema penalizado (II.2.15) - (II.2.17). No limite para $\mu \rightarrow 0$, obteremos um par $(I, V_{\mathbb{E}})$ solução do problema original. Passamos agora à discretização do problema penalizado, visando à sua resolução computacional. Apresentamos inicialmente a discretização utilizada e construímos um algoritmo tipo "preditor-corretor" para esta finalidade. Nas seções 2, 3 e 4 discutiremos as condições para que o algoritmo esteja bem definido. Finalmente, apresentaremos uma prova de que as soluções do problema discretizado convergem para as do problema contínuo.

1. O algoritmo

Como o problema apresenta uma não linearidade (equação (II.2.16)), torna-se conveniente usar um processo de discretização por diferenças finitas, tipo "preditor-corretor". Tal processo será localmente de 2.^a ordem ($O(\epsilon^2)$), uma vez que maiores ordens exigiriam uma regularização das funções envolvidas (14, 15).

A discretização natural para (II.2.15) é então:

$$V_{\text{ext}}^{n+1/2} = L \frac{I^{n+1} - I^n}{\epsilon} + RI^{n+1/2} + V_{\mathbb{E}}^{n+1/2} \quad \text{II.1.1)}$$

onde ϵ é o parâmetro de discretização e denotamos:

$$x^i = x(t_i) \quad , \quad x^{n+1/2} = \frac{x^{n+1} + x^n}{2} \quad , \quad t_i = i \cdot \epsilon \quad (\text{III.1.2})$$

Analogamente (II.2.16) pode ser discretizada:

$$I^{n+1/2} = \mathbb{C} \cdot \frac{V_{\mathbb{C}}^{n+1} - V_{\mathbb{C}}^n}{\epsilon} + j_{\mu} (V_{\mathbb{C}}^{n+1/2}) \quad (\text{III.1.3})$$

De (III.1.1) e (III.1.3) resultam então as equações:

$$V_{\mathbb{C}}^{n+1} + \left(\frac{2L}{\epsilon} + R \right) I^{n+1} = V_{\text{ext}}^{n+1} + V_{\text{ext}}^n + \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) I^n - V_{\mathbb{C}}^n \quad (\text{III.1.4})$$

$$\frac{2\mathbb{C}}{\epsilon} V_{\mathbb{C}}^{n+1} - I^{n+1} = I^n + \frac{2\mathbb{C}}{\epsilon} V_{\mathbb{C}}^n - 2j_{\mu} \left(\frac{V_{\mathbb{C}}^{n+1} + V_{\mathbb{C}}^n}{2} \right) \quad (\text{III.1.5})$$

que devem ser satisfeitas simultaneamente. Assim, podemos escrever as relações de recorrência:

$$I^{n+1} = \frac{1}{D} \left\{ \frac{4\mathbb{C}}{\epsilon} V_{\text{ext}}^{n+1/2} + 2j_{\mu} (V_{\mathbb{C}}^{n+1/2}) + \left[\frac{2\mathbb{C}}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 \right] I^n - \frac{4\mathbb{C}}{\epsilon} V_{\mathbb{C}}^n \right\} \quad (\text{III.1.6})$$

$$V_{\mathbb{C}}^{n+1} = \frac{1}{D} \left\{ \frac{4L}{\epsilon} I^n + \left[\frac{2\mathbb{C}}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 \right] V^n + 2V_{\text{ext}}^{n+1/2} - 2 \left(R + \frac{2L}{\epsilon} \right) j_{\mu} (V_{\mathbb{C}}^{n+1/2}) \right\} \quad (\text{III.1.7})$$

onde

$$D = 1 + \frac{2\mathbb{C}}{\epsilon} \left(R + \frac{2L}{\epsilon} \right) \quad (\text{III.1.8})$$

Aproximando $j_{\mu} (V_{\mathbb{C}}^{n+1/2})$ por $j_{\mu} (V_{\mathbb{C}}^n)$ podemos usar como preditor:

$$\tilde{I}^{n+1} = \frac{1}{D} \left\{ \left[\frac{2E}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 \right] I^n - \frac{4E}{\epsilon} V_{\mathbb{E}}^n + \frac{4E}{\epsilon} V_{\text{ext}}^{n+1/2} 2j_{\mu} (V_{\mathbb{E}}^n) \right\} \quad (\text{III.1.9})$$

$$\tilde{V}_{\mathbb{E}}^{n+1} = \frac{1}{D} \left\{ \frac{4L}{\epsilon} I^n + \left[\frac{2E}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 \right] V_{\mathbb{E}}^n + 2V_{\text{ext}}^{n+1/2} - 2 \left(R + \frac{2L}{\epsilon} \right) j_{\mu} (V_{\mathbb{E}}^n) \right\} \quad (\text{III.1.10})$$

As equações (III.1.1) e (III.1.3) fornecem expressões para o corretor:

$$I_{(j+1)}^{n+1} = \frac{\epsilon}{2L} \left[2V_{\text{ext}}^{n+1/2} + RI^n + RI_{(j)}^{n+1} + V_{\mathbb{E}}^n + V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} \right] + I^n \quad (\text{III.1.11})$$

$$V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} = \frac{\epsilon}{2E} \left[I_{(j)}^{n+1} + I^n + 2j_{\mu} \left(\frac{V_{\mathbb{E}}^n + V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1}}{2} \right) \right] + V_{\mathbb{E}}^n \quad (\text{III.1.12})$$

onde o índice j refere-se a iterações partindo de $I_{(0)}^{n+1} = \tilde{I}^{n+1}$ e $V_{\mathbb{E}(0)}^{n+1} = \tilde{V}_{\mathbb{E}}^{n+1}$.

O algoritmo para determinação da sequência $(I^n, V_{\mathbb{E}}^n)$ pode ser então esquematizado:

(i) $I^0 = 0$, $V_{\mathbb{E}}^0 = 0$, $n = 0$

(ii) Determinar $I_{(0)}^{n+1}$, $V_{\mathbb{E}(0)}^{n+1}$ por:

$$\begin{pmatrix} I_{(0)}^{n+1} \\ V_{\mathbb{E}(0)}^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \frac{2E}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 & -\frac{4E}{\epsilon} \\ \frac{4L}{\epsilon} & \frac{2E}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^n \\ V_{\mathbb{E}}^n \end{pmatrix} + \frac{2V_{\text{ext}}^{n+1/2}}{D} \begin{pmatrix} \frac{2E}{\epsilon} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{D} j_{\mu} (V_{\mathbb{E}}^n) \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2L}{\epsilon} + R \end{pmatrix} \quad (\text{III.1.13})$$

(iii) $j \neq 0$ (iv) Determinar $I_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1}$, $V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1}$ por

$$\begin{pmatrix} I_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} \\ V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R}{2L} \epsilon & \frac{\epsilon}{2L} \\ \frac{\epsilon}{2\mathbb{E}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} \\ V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + \frac{R}{2L} \epsilon & \frac{\epsilon}{2L} \\ \frac{\epsilon}{2\mathbb{E}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathbb{E}}^n \\ V_{\mathbb{E}}^n \end{pmatrix} \\ + j_{\mu} \begin{pmatrix} \frac{V_{\mathbb{E}}^n + V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1}}{2} \\ \frac{\epsilon}{\mathbb{E}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\epsilon}{\mathbb{E}} \end{pmatrix} \quad (\text{III.1.14})$$

(v) $j \leftarrow j + 1$ (vi) Repetir(iv) e (v) até que o erro local seja menor que um δ dado.(vii) $I_{\mathbb{E}}^{n+1} \leftarrow I_{\mathbb{E}(j-1)}^{n+1}$, $V_{\mathbb{E}}^{n+1} \leftarrow V_{\mathbb{E}(j-1)}^{n+1}$ (viii) $n \leftarrow n + 1$ (ix) se $n \epsilon > T$ então pára

O passo (ii) corresponde à predição e as iterações(iv)-(v) à correção do valor previsto.

2. Convergência das iterações do corretor.

Uma das primeiras questões suscitadas pelo algoritmo li ga-se aos passos (iv) e (v): Há a convergência das iterações do corretor?. A resposta a esta pergunta deve ser sim, pois em ca so contrário o algoritmo não está bem definido. Para garantir esta convergência, entretanto, será necessário restringir a es colha dos parâmetros ϵ e μ , até aqui quaisquer.

Para obter este resultado, devemos observar que as iterações (iv)-(v) podem ser escritas

$$I_{(j+1)}^{n+1} = \rho_1(I_{(j)}^{n+1}, V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1}) \quad (\text{III.2.15})$$

$$V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} = \rho_2(I_{(j)}^{n+1}, V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1}) \quad (\text{III.2.16})$$

onde cada ρ_i é uma função contínua e derivável. Assim se existem $I^{n+1}, V_{\mathbb{E}}^{n+1}$ tais que:

$$I^{n+1} = \lim_{j \in \mathbb{N}} I_{(j)}^{n+1} \quad (\text{III.2.17})$$

$$V_{\mathbb{E}}^{n+1} = \lim_{j \in \mathbb{N}} V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} \quad (\text{III.2.18})$$

então

$$I^{n+1} = \rho_1(I^{n+1}, V_{\mathbb{E}}^{n+1}) \quad (\text{III.2.19})$$

$$V_{\mathbb{E}}^{n+1} = \rho_2(I^{n+1}, V_{\mathbb{E}}^{n+1}) \quad (\text{III.2.20})$$

Assim:

$$|I_{(j+1)}^{n+1} - I^{n+1}| = |\rho_1(I_{(j)}^{n+1}, V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1}) - \rho_1(I^{n+1}, V_{\mathbb{E}}^{n+1})| \quad (\text{III.2.21})$$

$$|V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} - V_{\mathbb{E}}^{n+1}| = |\rho_2(I_{(j)}^{n+1}, V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1}) - \rho_2(I^{n+1}, V_{\mathbb{E}}^{n+1})| \quad (\text{III.2.22})$$

E uma aplicação da desigualdade do valor médio resulta em:

$$|I_{(j+1)}^{n+1} - I^{n+1}| \leq \frac{R\epsilon}{2L} |I_{(j)}^{n+1} - I^{n+1}| + \frac{\epsilon}{2L} |V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} - V_{\mathbb{E}}^{n+1}| \quad (\text{III.2.23})$$

$$|v_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} - v_{\mathbb{E}}^{n+1}| \leq \frac{\epsilon}{2\mathbb{E}} |I_{(j)}^{n+1} - I^{n+1}| + \frac{\epsilon}{2\mu\mathbb{E}} |v_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} - v_{\mathbb{E}}^{n+1}| \quad (\text{III.2.24})$$

onde já usamos o fato de que j_μ obedece a uma condição de Lipschitz:

$$|j_\mu(X) - j_\mu(Y)| \leq \frac{1}{\mu} |X - Y| \quad (\text{III.2.25})$$

A métrica natural para medir a convergência é então:

$$d(X_{(k)}^{n+1}, X^{n+1}) = \|X_{(k)}^{n+1} - X^{n+1}\|_1 = |I_{(k)}^{n+1} - I^{n+1}| + |v_{\mathbb{E}(k)}^{n+1} - v_{\mathbb{E}}^{n+1}| \quad (\text{III.2.26})$$

onde denotamos:

$$X_{(k)}^{n+1} = \begin{pmatrix} I_{(k)}^{n+1} \\ v_{\mathbb{E}(k)}^{n+1} \end{pmatrix}, \quad X^{n+1} = \begin{pmatrix} I^{n+1} \\ v_{\mathbb{E}}^{n+1} \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.28})$$

E desta forma, fazendo:

$$M_1(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2} \sup \left\{ \frac{R}{L} + \frac{1}{\mathbb{E}}, \frac{1}{L} + \frac{1}{\mu\mathbb{E}} \right\} \quad (\text{III.2.28})$$

obtemos:

$$\|X_{(j+1)}^{n+1} - X^{n+1}\| \leq M_1(\epsilon) \|X_{(j)}^{n+1} - X^{n+1}\| \quad (\text{III.2.29})$$

E por indução sobre j é fácil ver que:

$$\|X_{(k)}^{n+1} - X^{n+1}\| \leq [M_1(\epsilon)]^k \|X_{(0)}^{n+1} - X^{n+1}\| \quad (\text{III.2.30})$$

E para a convergência é suficiente:

$$M_1(\epsilon) < 1 \iff \epsilon < \inf \left\{ \frac{2}{\frac{R+1}{L+\mu}}, \frac{2}{\frac{1}{L+\mu}} \right\} \quad (\text{III.2.31})$$

A estimativa (III.2.30) pode ser modificada para eliminarmos o limite X^{n+1} :

$$\| X_{(k)}^{n+1} - X^{n+1} \| \leq \frac{[M_1(\epsilon)]^k}{1 - [M_1(\epsilon)]^k} \| X_{(0)}^{n+1} - X_{(k)}^{n+1} \| \quad (\text{III.2.32})$$

A semelhança deste resultado com uma estimativa de ponto fixo não é acidental, uma vez que X^{n+1} é exatamente um ponto fixo de $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F(X) = \begin{pmatrix} \rho_1(X) \\ \rho_2(X) \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.33})$$

(ρ_1 e ρ_2 de (III.2.15) e (III.2.16)), como vemos de (III.2.19) e (III.2.20). Além disso, a condição (III.2.31) é suficiente para garantir a existência de um ponto fixo para a F dada por (III.2.33). (Teorema do ponto fixo de Banach (16,17)). Esse mesmo teorema garante então a convergência da seqüência $\{F^k(X_{(0)}^{n+1})\}_{k \in \mathbb{N}}$ para este ponto fixo e fornece a estimativa:

$$\| X_{(k)}^{n+1} - X^{n+1} \| \leq \frac{[M_1(\epsilon)]^k}{1 - M_1(\epsilon)} \| X_{(1)}^{n+1} - X_{(0)}^{n+1} \| \quad (\text{III.2.34})$$

A condição (III.2.31) é então suficiente para garantir a convergência do corretor.

3. Abordagem matricial do problema de convergência do corre - tor.

Um outro "approach" à questão da seção anterior pode ser obtido se escrevermos:

$$X_{(j+1)}^{n+1} = AX_{(j)}^{n+1} + BX^n + \mathbb{E}j_{\mu} \left(\frac{V_{\mathbb{E}}^n + V_{\mathbb{E}}^{n+1}}{2} \right) \quad (\text{III.3.35})$$

onde A, B e \mathbb{E} são dados por (III.1.14).

Assim, o limite existe se e somente se

$$\exists X^{n+1} \text{ tal que } X^{n+1} = AX^{n+1} + BX^n + \mathbb{E}j_{\mu} \left(\frac{V_{\mathbb{E}}^n + V_{\mathbb{E}}^{n+1}}{2} \right) \quad (\text{III.3.36})$$

E:

$$\begin{aligned} \left[X^{n+1} - X_{(j+1)}^{n+1} \right] &= A \left[X^{n+1} - X_{(j)}^{n+1} \right] + \mathbb{E} \left[j_{\mu} \left(\frac{V_{\mathbb{E}}^n + V_{\mathbb{E}}^{n+1}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - j_{\mu} \left(\frac{V_{\mathbb{E}}^n + V_{\mathbb{E}}^{n+1}}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.3.37})$$

Assim:

$$\| X_{(j+1)}^{n+1} - X^{n+1} \| \leq M_1^*(\epsilon) \| X_{(j)}^{n+1} - X^{n+1} \| \quad (\text{III.3.38})$$

onde:

$$M_1^*(\epsilon) = \| A \| + \frac{1}{2\mu} \| \mathbb{E} \| \quad (\text{III.3.39})$$

onde as normas de \mathbb{R}^2 e das matrizes são quaisquer normas compatíveis (17, 18). Analogamente à Seção 2, a condição:

$$M_1^*(\epsilon) < 1 \Leftrightarrow \|A\| + \frac{1}{2\mu} \|C\| < 1 \quad (\text{III.3.40})$$

é suficiente para garantir a existência do ponto fixo de (III.3.36) (16, 19) e, em consequência, do limite da seqüência $\{X_{(j)}^{n+1}\}_{j \in \mathbb{N}}$. É possível obter também as estimativas

$$\|X_{(k)}^{n+1} - X^{n+1}\| \leq \frac{[M_1^*(\epsilon)]^k}{1 - [M_1^*(\epsilon)]^k} \|X_{(0)}^{n+1} - X_{(k)}^{n+1}\| \quad (\text{III.3.41})$$

$$\|X_{(k)}^{n+1} - X^{n+1}\| \leq \frac{[M_1^*(\epsilon)]^k}{1 - M_1^*(\epsilon)} \|X_{(0)}^{n+1} - X_{(1)}^{n+1}\| \quad (\text{III.3.42})$$

de forma inteiramente análoga à usada para obter (III.2.32) e (III.2.34).

A vantagem desta formulação sobre a anterior é evidente: agora podemos escolher a norma a usar tanto em \mathbb{R}^2 quanto no espaço das matrizes, observando apenas a compatibilidade de ambas (17, 18).

Por exemplo:

$$\|A\| = 2 \sup\{|a_{ij}|\} \quad (\text{III.3.43})$$

é compatível com

$$\|X\| = \sup\{|X_i|\} \quad (\text{III.3.44})$$

uma vez que

$$\|AX\| \leq \sup_i \left\{ \sum_j |a_{ij}| \cdot |X_j| \right\} \leq \|A\| \cdot \|X\| \quad (\text{III.3.45})$$

Assim, a condição (III.3.40) nesta norma escreve-se:

$$2 \sup \left\{ \frac{R}{2L}, \epsilon, \frac{\epsilon}{2L}, \frac{\epsilon}{2E} \right\} + \frac{\epsilon}{\mu E} < 1 \quad (\text{III.3.46})$$

onde $\| \mathbb{E} \|$ deve ser calculada como:

$$\| \mathbb{E} \| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \overline{\mathbb{E}} \end{array} \right\| \equiv \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon/\mathbb{E} \end{array} \right\| \quad (\text{III.3.47})$$

definição de motivação evidente, considerando(III.1.14).

A mesma norma é compatível com:

$$\| X \| = |X_1| + |X_2| \quad (\text{III.3.48})$$

pois

$$\| AX \| \leq \sum_i \sum_j |a_{ij}| |X_j| \leq \| A \| \cdot \| X \| \quad (\text{III.3.49})$$

e também com:

$$\| X \| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad (\text{III.3.50})$$

Assim, (III.3.46) garante a convergência nestas normas.

4. Um algoritmo alternativo.

O algoritmo apresentado na seção 2 admite uma variação, trocando-se o passo(iv) por

$$(iv') \quad \begin{pmatrix} I_{(j+1)}^{n+1} \\ V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \frac{2\mathbb{E}}{\epsilon}(\frac{2L}{\epsilon}-R)-1 & -\frac{4\mathbb{E}}{\epsilon} \\ \frac{4L}{\epsilon} & \frac{2\mathbb{E}}{\epsilon}(\frac{2L}{\epsilon}-R)-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^n \\ V_{\mathbb{E}}^n \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{2V_{\text{ext}}^{n+1/2}}{D} \begin{pmatrix} \frac{2\mathbb{E}}{\epsilon} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{D\mu} \left(\frac{V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} + V_{\mathbb{E}}^n}{2} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2L}{\epsilon} + R \end{pmatrix} \quad (\text{III.4.51})$$

o que corresponde a iterações no preditor, aqui usado também como corretor.

Aqui também ocorre o fenômeno de convergência condicionada a certas relações entre os parâmetros ϵ, μ, R, L e \mathbb{E} .

Numa abordagem semelhante à efetuada na seção 2, é possível estabelecer resultados análogos aos ali obtidos com

$$\tilde{M}_1(\epsilon) = \sup \left\{ \frac{1}{D} \left[\frac{4L}{\epsilon} + \frac{2\mathbb{E}}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 \right], \right. \\ \left. \frac{1}{D} \left[\frac{4\mathbb{E}}{\epsilon} + \frac{2}{\mu} (1+R + \frac{2L}{\epsilon}) + \frac{2\mathbb{E}}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 \right] \right\} \quad (\text{III.4.52})$$

E na abordagem matricial também podemos estabelecer resultados análogos aos da seção 3, usando:

$$\tilde{M}_1^*(\epsilon) = \|\tilde{A}\| + \frac{1}{2\mu} \|\tilde{\mathbb{E}}\| \quad (\text{III.4.53})$$

com: \tilde{A} e $\tilde{\mathbb{E}}$ dados por(III.4.51):

$$\tilde{A} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \frac{2\mathbb{E}}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 & -\frac{4\mathbb{E}}{\epsilon} \\ \frac{4L}{\epsilon} & \frac{2\mathbb{E}}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.4.54})$$

$$\tilde{\mathbb{E}} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} -1 \\ R + \frac{2L}{\epsilon} \end{pmatrix} \quad (\text{III.4.55})$$

A determinação de um δ conveniente, dados μ , R , L e \mathbb{C} , a partir destes resultados é, entretanto, mais trabalhosa que a partir das relações construídas para o algoritmo original. Por este motivo, daremos preferência ao algoritmo apresentado na seção 1.

5. Convergência da discretização.

Consideremos $\tilde{I}_\varepsilon, \tilde{V}_{\mathbb{E}\varepsilon} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$\tilde{I}_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^m [I^{k+1} + \delta I^{k+1/2}(t-t_k)] \xi_k(t) \quad (\text{III.5.56})$$

$$\tilde{V}_{\mathbb{E}\varepsilon}(t) = \sum_{k=0}^m [V_{\mathbb{E}}^k + \delta V_{\mathbb{E}}^{k+1/2}(t-t_k)] \xi_k(t) \quad (\text{III.5.57})$$

onde:

$$\delta X^{k+1/2} = \frac{X^{k+1} - X^k}{\varepsilon} \quad (\text{III.5.58})$$

$$m\varepsilon < T \leq (m+1)\varepsilon \quad (\text{III.5.59})$$

$$\xi_k(t) = \begin{cases} 0, & t \notin (t_k, t_{k+1}] \\ 1, & t \in (t_k, t_{k+1}] \end{cases} \quad (\text{III.5.60})$$

$$t_k = k \cdot \varepsilon \quad (\text{III.5.61})$$

\tilde{I}_ε e $\tilde{V}_{\mathbb{E}\varepsilon}$ são aproximações lineares por partes e contínuas que, esperamos, convirjam para a solução $I^\mu, V_{\mathbb{E}}^\mu$.

Temos:

$$\tilde{V}_{\mathbb{E}}(0) = 0 \quad (\text{III.5.62})$$

$$\tilde{I}_{\mathbb{E}}(0) = 0 \quad (\text{III.5.63})$$

$$\tilde{I}_{\mathbb{E}}(t_{k+1/2}) = I^{k+1/2} \quad (\text{III.5.64})$$

$$V_{\mathbb{E}}(t_{k+1/2}) = V_{\mathbb{E}}^{k+1/2} \quad (\text{III.5.65})$$

$$\frac{dV_{\mathbb{E}}}{dt}(t_{k+1/2}) = \delta V_{\mathbb{E}}^{k+1/2} \quad (\text{III.5.66})$$

$$\frac{dI_{\mathbb{E}}}{dt}(t_{k+1/2}) = \delta I^{k+1/2} \quad (\text{III.5.67})$$

onde denotamos

$$t_{k+1/2} = \frac{t_k + t_{k+1}}{2} \quad (\text{III.5.68})$$

Resulta então que $\tilde{I}_{\mathbb{E}}$ e $\tilde{V}_{\mathbb{E}}$ são funções contínuas tais que:

$$V_{\text{ext}}^{n+1/2} = L \frac{d\tilde{I}}{dt}(t_{n+1/2}) + R \tilde{I}_{\mathbb{E}}(t_{n+1/2}) + \tilde{V}_{\mathbb{E}}(t_{n+1/2}) \quad (\text{III.5.69})$$

$$\tilde{I}_{\mathbb{E}}(t_{n+1/2}) = \mathbb{E} \frac{dV_{\mathbb{E}}}{dt}(t_{n+1/2}) + j_{\mu}(V_{\mathbb{E}}(t_{n+1/2})) \quad (\text{III.5.70})$$

Por outro lado temos:

$$\frac{L}{2} \sup_{0 < \underline{n} < \underline{m}} |I^{n+1}|^2 + \frac{R}{2} \sum_{k=0}^m |I^{n+1/2}|^2 + \frac{\mathbb{E}}{2} \sup_{0 < \underline{n} < \underline{m}} |V_{\mathbb{E}}^{n+1}|^2 < \Lambda_1 \quad (\text{III.5.71})$$

Sendo $\Lambda_1 = \frac{1}{2R} \|V_{\text{ext}}\|^2$.

Para demonstrar este resultado, devemos multiplicar (III.1.1) por $I^{n+1/2}$ e (III.1.3) por $V_{\mathbb{E}}^{n+1/2}$. Somando as igualda-

des obtidas e usando a desigualdade $j_{\mu}(V_{\mathbb{E}})$. $V_{\mathbb{E}} \geq 0$ resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{L}{2} |I^{n+1}|^2 - \frac{L}{2} |I^n|^2 + R \varepsilon |I^{n+1/2}|^2 + \frac{\mathbb{E}}{2} |V_{\mathbb{E}}^{n+1}|^2 - \frac{\mathbb{E}}{2} |V_{\mathbb{E}}^n|^2 \\ & \leq \varepsilon V_{\text{ext}}^{n+1/2} |I^{n+1/2}|^2 \end{aligned} \quad (\text{III.5.72})$$

Introduzindo:

$$V_{\text{ext}}^{n+1/2} |I^{n+1/2}|^2 \leq \frac{1}{2R} |V_{\text{ext}}^{n+1/2}|^2 + \frac{R}{2} |I^{n+1/2}|^2 \quad (\text{III.5.73})$$

obtemos, somando de 0 a k:

$$\frac{L}{2} |I^{k+1}|^2 + \frac{R}{2} \sum_{i=0}^k \varepsilon |I^{i+1/2}|^2 + \frac{\mathbb{E}}{2} |V_{\mathbb{E}}^{k+1}|^2 \leq \frac{1}{2R} \sum_{i=0}^k \varepsilon |V_{\text{ext}}^{i+1/2}|^2 \quad (\text{III.5.74})$$

E como $V_{\text{ext}} \in L^2(0, T)$, é fácil obter (III.5.71).

Uma segunda estimativa ainda é possível. Se diferenciarmos (III.1.1):

$$\delta V_{\text{ext}}^{n+1/2} = L \delta (\delta I^{n+1/2}) + R \delta I^{n+1/2} + \delta V_{\mathbb{E}}^{n+1/2} \quad (\text{III.5.75})$$

E também (III.1.3)

$$\delta I^{n+1/2} = \mathbb{E} \delta (\delta V_{\mathbb{E}}^{n+1/2}) + \delta j_{\mu} (V_{\mathbb{E}}^{n+1/2}) \quad (\text{III.5.76})$$

Multiplicando (III.5.75) por $\delta I^{n+1/2}$, (III.5.76) por $\delta V_{\mathbb{E}}^{n+1/2}$ e lembrando que $\delta j_{\mu} (V_{\mathbb{E}}^{n+1/2}) \delta V_{\mathbb{E}}^{n+1/2} \geq 0$:

$$\begin{aligned} \delta I^{n+1/2} \delta V_{\text{ext}}^{n+1/2} &\geq L \delta (\delta I^{n+1/2}) \delta I^{n+1/2} + R |\delta I^{n+1/2}|^2 + \\ &+ \mathbb{E} \delta (\delta V_{\mathbb{E}}^{n+1/2}) \delta V_{\mathbb{E}}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (\text{III.5.77})$$

Como:

$$\delta (\delta I^{n+1/2}) \delta I^{n+1/2} = \frac{|\delta I^{n+1/2}|^2 - \delta I^{n+1/2} \delta I^{n-1/2}}{\varepsilon} \quad (\text{III.5.78})$$

Resulta:

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} |\delta I^{n+1/2}|^2 + \frac{1}{2R} |\delta V_{\text{ext}}^{n+1/2}|^2 &\geq \frac{L}{2\varepsilon} (|\delta I^{n+1/2}|^2 - |\delta I^{n-1/2}|^2) + \\ R |\delta I^{n+1/2}|^2 + \frac{\mathbb{E}}{2\varepsilon} (|\delta V_{\mathbb{E}}^{n+1/2}|^2 - |\delta V_{\mathbb{E}}^{n-1/2}|^2) &\quad (\text{III.5.79}) \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2R} |\delta V_{\text{ext}}^{n+1/2}|^2 &\geq \frac{L}{2} (|\delta I^{n+1/2}|^2 - |\delta I^{n-1/2}|^2) + \frac{R}{2\varepsilon} |\delta I^{n+1/2}|^2 \\ &+ \frac{\mathbb{E}}{2} (|\delta V_{\mathbb{E}}^{n+1/2}|^2 - |\delta V_{\mathbb{E}}^{n-1/2}|^2) \end{aligned} \quad (\text{III.5.80})$$

E é fácil obter:

$$\frac{L}{2} \sup_{0 < n < m} |\delta I^{n+1/2}|^2 + \frac{R}{2} \sum_{n=0}^m \varepsilon |\delta I^{n+1/2}|^2 + \frac{\mathbb{E}}{2} \sup_{0 < n < m} |\delta V_{\mathbb{E}}^{n+1/2}|^2 \leq \Lambda_2 \quad (\text{III.5.81})$$

As desigualdades (III.5.71) e (III.5.81) mostram então que:

- (i) \tilde{I}_{ε} pertence a um conjunto limitado de $L^{\infty}(0, T) \cap L^2(0, T)$

- (ii) $\tilde{V}_{\mathbb{E}_\epsilon}$ pertence a um conjunto limitado de $L^\infty(0, T)$
- (iii) $\frac{d\tilde{I}}{dt}^\epsilon$ pertence a um conjunto limitado de $L^\infty(0, t) \cap L^2(0, T)$
- (iv) $\frac{dV_{\mathbb{E}}}{dt}^\epsilon$ pertence a um conjunto limitado de $L^\infty(0, T)$.

Como $\{\tilde{I}_\epsilon\}$ e $\{\tilde{V}_{\mathbb{E}_\epsilon}\}$ são famílias eqüicontínuas, pelo teorema de Arzelá-Ascoli, existem funções \tilde{I} , $\tilde{V}_{\mathbb{E}}$ contínuas que são limites uniformes de subsequências de $\{\tilde{I}_\epsilon\}$ e $\{\tilde{V}_{\mathbb{E}_\epsilon}\}$. Denotando estas subsequências por $\{\tilde{I}_\delta\}$ e $\{\tilde{V}_{\mathbb{E}_\delta}\}$ e usando a compacidade fraca de subconjuntos limitados de $L^p(0, T)$, obtemos além disso que:

- (i) \tilde{I}_δ converge fracamente para \tilde{I} em $L^2(0, T)$
- (ii) \tilde{I}_δ converge fraco-estrela para \tilde{I} em $L^\infty(0, T)$
- (iii) $\tilde{V}_{\mathbb{E}_\delta}$ converge fraco-estrela para $\tilde{V}_{\mathbb{E}}$ em $L^\infty(0, T)$
- (iv) $\frac{d\tilde{I}}{dt}^\delta$ converge fraco-estrela para $\frac{d\tilde{I}}{dt}$ em $L^\infty(0, T)$
- (v) $\frac{d\tilde{I}}{dt}^\delta$ converge fracamente para $\frac{d\tilde{I}}{dt}$ em $L^2(0, T)$
- (vi) $\frac{d\tilde{V}_{\mathbb{E}}}{dt}^\delta$ converge fraco-estrela para $\frac{d\tilde{V}_{\mathbb{E}}}{dt}$ em $L^\infty(0, T)$

Por outro lado, dados $t \in (0, T)$ e $\delta > 0$, existe n tal que $t_n < t \leq t_{n+1}$. Resulta então:

$$|\tilde{I}_\delta(t) - \tilde{I}_\delta(t_{n+1/2})| = o(\delta)$$

$$|\frac{d\tilde{I}}{dt}^\delta(t) - \frac{d\tilde{I}}{dt}^\delta(t_{n+1/2})| = 0$$

$$|\tilde{V}_{\mathbb{E}_\delta}(t) - \tilde{V}_{\mathbb{E}_\delta}(t_{n+1/2})| = o(\delta)$$

$$\left| \frac{d\tilde{V}_{\mathbb{E}_\delta}}{dt}(t) - \frac{d\tilde{V}_{\mathbb{E}_\delta}}{dt}(t_{n+1/2}) \right| = 0$$

$$|j_\mu(V_{\mathbb{E}_\delta}(t)) - j_\mu(V_{\mathbb{E}_\delta}(t_{n+1/2}))| = o(\delta)$$

Usando agora (III.5.69), (III.5.70), vemos que o par $(\tilde{I}, \tilde{V}_{\mathbb{E}})$ satisfaz a (II.2.15) - (II.2.17). Assim $\tilde{I} = I^\mu$, $\tilde{V}_{\mathbb{E}} = V_{\mathbb{E}}^\mu$.

O mesmo resultado pode ser obtido por outro caminho, se observarmos que:

$$\begin{aligned} |I^\mu(t) - \tilde{I}_\delta(t)| &\leq |I^\mu(t) - I^\mu(t_{n+1/2})| + \\ &+ |I^\mu(t_{n+1/2})| - |\tilde{I}_\delta(t_{n+1/2})| + |\tilde{I}_\delta(t_{n+1/2}) - \tilde{I}_\delta(t)| \end{aligned}$$

Usando agora:

$$|I^\mu(t) - I^\mu(t_{n+1/2})| = o(\delta)$$

$$|I^\mu(t_{n+1/2}) - \tilde{I}_\delta(t_{n+1/2})| = o(\delta^2)$$

$$|\tilde{I}_\delta(t_{n+1/2}) - \tilde{I}_\delta(t)| = o(\delta)$$

é fácil ver que $I^\mu = \tilde{I}$. Um raciocínio análogo mostra que $\tilde{V}_{\mathbb{E}} = V_{\mathbb{E}}^\mu$

IV. ESTABILIDADE E PRECISÃO DO ALGORITMO.

Construímos no capítulo anterior um esquema de diferenças finitas e provamos sua estabilidade e convergência. Apresentamos também um algoritmo para solução computacional, estabelecendo condições para que estivesse bem definido. No presente capítulo estudaremos o comportamento do erro global, resultante do uso de aproximações finitas e do cálculo aproximado de ponto fixo.

1. Os dois tipos de erro local.

O esquema construído para a solução consiste de dois passos básicos:

- (i) Construir uma equação de diferenças que deve ser satisfeita por X^{n+1}
- (ii) Determinar a solução desta equação.

A equação construída é (III.3.35):

$$X^{n+1} = AX^{n+1} + BX^n + \mathbb{E}j_{\mu} \left(\frac{V_{\mathbb{E}}^n + V_{\mathbb{E}}^{n+1}}{2} \right) \quad (\text{IV.1.1})$$

O primeiro erro cometido é dado por:

$$X(t_{n+1}) = AX(t_{n+1}) + BX(t_n) + \mathbb{E}j_{\mu} \left(\frac{V_{\mathbb{E}}(t_n) + V_{\mathbb{E}}(t_{n+1})}{2} \right) + T_n \quad (\text{IV.1.2})$$

onde T_n é um erro introduzido pela substituição:

$$\frac{dX}{dt}(t_{n+1/2}) \sim \frac{X(t_{n+1}) - X(t_n)}{\epsilon} \quad (\text{IV.1.3})$$

Na verdade:

$$\frac{dX}{dt}(t_{n+1/2}) = \frac{X(t_{n+1}) - X(t_n)}{\epsilon} + O(\epsilon^2) \quad (\text{IV.1.4})$$

Assim:

$$\|T_n\| = O(\epsilon^2) \quad (\text{IV.1.5})$$

Por outro lado, o X^{n+1} é determinado não por um limite, mas por um número finito de iterações do corretor. Assim, (IV.1.1) não é satisfeita exatamente:

$$X^{n+1} = AX^{n+1} + BX^n + \mathbb{E}j_\mu \left(\frac{V_{\mathbb{E}}^{n+1}}{2} \right) - \eta_n \quad (\text{IV.1.6})$$

Este erro é controlado pelo corretor. Se \tilde{X}^{n+1} é o limite do corretor:

$$\tilde{X}^{n+1} = A\tilde{X}^{n+1} + B\tilde{X}^n + \mathbb{E}j_\mu \left(\frac{\tilde{V}_{\mathbb{E}}^n + \tilde{V}_{\mathbb{E}}^{n+1}}{2} \right) \quad (\text{IV.1.7})$$

Subtraindo (IV.1.6) de (IV.1.7):

$$\eta_n = (I-A)(\tilde{X}^{n+1} - X^{n+1}) + B(X^n - \tilde{X}^{n+1}) + \mathbb{E} \left[j_\mu \left(\frac{V_{\mathbb{E}}^n + V_{\mathbb{E}}^{n+1}}{2} \right) - j_\mu \left(\frac{\tilde{V}_{\mathbb{E}}^n + \tilde{V}_{\mathbb{E}}^{n+1}}{2} \right) \right] \quad (\text{IV.1.8})$$

E:

$$\| \eta_n \| \leq \Lambda \delta < \infty \quad (\text{IV.1.9})$$

onde:

$$\Lambda = \| I - A \| + \| B \| + \frac{\| C \|}{\mu} \quad (\text{IV.1.10})$$

As normas das matrizes devem ser entendidas como no capítulo anterior.

2. Fórmula exata do erro.

Se subtrairmos (IV.1.6) de (IV.1.2) obteremos:

$$e^{n+1} = Ae^{n+1} + Be^n + \mathbb{E} \Delta j_\mu + T_n + \eta_n \quad (\text{IV.2.11})$$

onde denotamos

$$e^k = X(t_k) - \tilde{X}^k \quad (\text{IV.2.12})$$

$$\Delta j_\mu = j_\mu \left(\frac{V_{\mathbb{E}}(t_{n+1}) + V_{\mathbb{E}}(t_n)}{2} \right) - j_\mu \left(\frac{V_{\mathbb{E}}^{n+1} + V_{\mathbb{E}}^n}{2} \right) \quad (\text{IV.2.13})$$

Notando que j_μ é linear por partes:

$$\Delta j_\mu = \frac{\lambda^n}{2\mu} (e^{n+1} + e^n), \quad 0 \leq \lambda^n \leq 1 \quad (\text{IV.2.14})$$

Assim:

$$(I - A - \frac{\lambda^n}{2\mu} \tilde{\mathbb{E}}) e^{n+1} = (B + \frac{\lambda^n}{2\mu} \tilde{\mathbb{E}}) e^n + T_n + \eta_n \quad (\text{IV.2.14})$$

agrupando os erros num único erro δ^n :

$$\begin{aligned} e^{n+1} &= (I-A-\frac{\lambda}{2\mu} \mathbb{E})^{-1} (B+\frac{\lambda}{2\mu} \mathbb{E}) e^n + \\ &+ (I-A-\frac{\lambda}{2\mu} \mathbb{E})^{-1} \delta^n \end{aligned} \quad (\text{IV.2.15})$$

onde \mathbb{E} é dada por(III.3.47). Introduzindo o operador de diferenças $Ee^n = e^{n+1}$, esta expressão pode ser escrita:

$$G(E)e^n = b^n$$

onde

$$G(E) = E - (I-A-\frac{\lambda}{2\mu} \mathbb{E})^{-1} (B+\frac{\lambda}{2\mu} \mathbb{E}) \quad (\text{IV.2.15})$$

$$b^n = (I-A-\frac{\lambda}{2\mu} \mathbb{E})^{-1} \delta^n \quad (\text{IV.2.16})$$

O estudo da estabilidade reduz-se então ao estudo dos autovalores de:

$$\Gamma = (I-A-\frac{\lambda}{2\mu} \mathbb{E})^{-1} (B+\frac{\lambda}{2\mu} \mathbb{E}) \quad (\text{IV.2.17})$$

como:

$$I-A-\frac{\lambda}{2\mu} \mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{R}{2L} \epsilon & \frac{-\epsilon}{2L} \\ \frac{-\epsilon}{2\mathbb{E}} & 1 - \frac{\lambda}{2\mu} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.2.18})$$

resulta:

$$\Gamma_{11} = \frac{(1 - \frac{\lambda^n}{2\mu})(1 + \frac{R\epsilon}{2L}) + \frac{\epsilon^2}{4L\mathbb{E}}}{(1 - \frac{R\epsilon}{2L})(1 - \frac{\lambda^n}{2\mu}) - \frac{\epsilon^2}{4L\mathbb{E}}} \quad (\text{IV.2.19})$$

$$\Gamma_{12} = \frac{(1 - \frac{\lambda^n}{2\mu}) \frac{\epsilon}{2L}}{(1 - \frac{R\epsilon}{2L})(1 - \frac{\lambda^n}{2\mu}) - \frac{\epsilon^2}{4L\mathbb{E}}} \quad (\text{IV.2.20})$$

$$\Gamma_{21} = \frac{(1 + \frac{R\epsilon}{2L}) \frac{\epsilon}{2L}}{(1 - \frac{R\epsilon}{2L})(1 - \frac{\lambda^n}{2\mu}) - \frac{\epsilon^2}{4L\mathbb{E}}} \quad (\text{IV.2.21})$$

$$\Gamma_{22} = \frac{(1 + \frac{\lambda^n}{2\mu})(1 - \frac{R\epsilon}{2L}) + \frac{\epsilon^2}{4L\mathbb{E}}}{(1 - \frac{R\epsilon}{2L})(1 - \frac{\lambda^n}{2\mu}) - \frac{\epsilon^2}{4L\mathbb{E}}}$$

Uma vez que o erro δ^n é limitado (IV.1.5) e (IV.1.9), se garantirmos que os autovalores de Γ tem módulo no máximo 1 ou que $\|\Gamma\| \leq 1$, o processo será absolutamente estável (20). Caso tal não seja possível, entretanto, isso não significa que o esquema possua uma instabilidade intrínseca. Pelo contrário, é possível garantir que o método sempre é relativamente estável (20). Não deve ser esquecido que todo $\lambda^n \in [0, 1]$ deve ser analisado.

Podemos ainda notar que:

$$\text{tr}\Gamma = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\epsilon^2}{2L\mathbb{E}} - \frac{\lambda^n R}{2\mu L} \epsilon + 2 \right) \quad (\text{IV.2.23})$$

$$\det \Gamma = \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{\varepsilon^4}{16L^2 \mathbb{E}^2} - \left(1 + \frac{\lambda^n}{2L}\right) \frac{R}{8\mu L \mathbb{E}} \varepsilon^3 + \left(\frac{1}{4L\mathbb{E}} + \frac{\lambda^n}{8\mu L \mathbb{E}} - \frac{R^2}{4L^2} + \frac{(\lambda^n)^2 R^2}{16\mu^2 L^2}\right) \varepsilon^2 + \left(1 - \frac{(\lambda^n)^2}{4\mu^2}\right) \right] \quad (\text{IV.2.24})$$

E portanto os autovalores de Γ são as soluções de

$$X^2 - (\text{tr}\Gamma)X + \det \Gamma = 0 \quad (\text{IV.2.25})$$

3. Estimativas para o erro global.

Como vimos na seção anterior, a obtenção da fórmula exata do erro é bastante difícil, envolvendo análise dos autovalores de uma matriz de elementos variáveis a cada passo. A obtenção de estimativas para o erro a partir de (IV.2.15) é também problemática, envolvendo uma análise do mesmo tipo.

Em certos casos, entretanto, é possível obter estimativas para o erro a partir de (IV.2.11):

$$\|I-A\| \|e^{n+1}\| \leq \|B\| \|e^n\| + \frac{\|C\|}{2\mu} (\|e^n\| + \|e^{n+1}\|) + \|\delta^n\| \quad (\text{IV.3.26})$$

E como δ^n é limitado:

$$\left(\|I-A\| - \frac{\|C\|}{2\mu}\right) \|e^{n+1}\| \leq \left(\|B\| + \frac{\|C\|}{2\mu}\right) \|e^n\| + M \quad (\text{IV.3.27})$$

Se $\|I-A\| > \frac{\|C\|}{2\mu}$ resulta então a inequação de diferenças:

$$\| e^{n+1} \| \leq \xi \| e^n \| + M \quad (\text{IV.3.28})$$

onde

$$\xi = (\| B \| + \frac{1}{2\mu} \| \mathbb{C} \|) / (\| I-A \| - \frac{1}{2\mu} \| \mathbb{C} \|) \quad (\text{IV.3.29})$$

E temos uma estimativa para o erro no passo $n+1$ a partir do erro no passo n . Além disso como:

$$\| e^0 \| = 0$$

Resulta, por indução:

$$\| e^{n+1} \| \leq (\xi^{n+1} + \xi^n + \dots + \xi + 1)M \quad (\text{IV.3.30})$$

Sendo $\xi > 1$, vem:

$$\| e^n \| \leq n \xi^n M \quad (\text{IV.3.31})$$

Num intervalo $(0, T)$ é possível escrever:

$$\| e^n \| \leq \frac{T}{\epsilon} \xi^{T/\epsilon} M \quad (\text{IV.3.32})$$

E é conveniente recordar que $\xi = \xi(\epsilon)$ e $M = M(\epsilon, \delta)$ onde $M(\epsilon, \delta)$ tendem a zero com ϵ^2 e δ (Veja eqs. (IV.1.5) e (IV.1.9)) e ξ tende a 1 com ϵ . É fácil ver então que:

$$\lim_{(\epsilon, \delta) \rightarrow 0} \| e^n \| = 0 \quad (\text{IV.3.32a})$$

O mesmo resultado pode ser obtido se observarmos que:

$$\forall i, j, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_{ij} = 0 \quad (\text{IV.3.32b})$$

Estimativas semelhantes resultam no caso $\|I-A\| < \frac{\|E\|}{2\mu}$ com

$$\xi = (\|B\| + \frac{1}{2\mu}\|E\|) / \inf_{0 < \lambda^n \leq 1} \{ \|I-A - \frac{\lambda^n}{2\mu}\|E\| \} \quad (\text{IV.3.33})$$

4. O erro no algoritmo alternativo.

Para o algoritmo alternativo, temos:

$$X(t_{n+1}) = \tilde{A}X(t_n) + \tilde{B} + \tilde{E}_{j\mu} \left(\frac{V_E(t_n) + V_E(t_{n+1})}{2} \right) + T_n \quad (\text{IV.4.34})$$

$$X^{n+1} = \tilde{A}X^n + \tilde{B} + \tilde{E}_{j\mu} \left(\frac{V_E^{n+1} + V_E^n}{2} \right) + \eta_n \quad (\text{IV.4.35})$$

E podemos escrever:

$$e^{n+1} = \tilde{A}e^n + \frac{\tilde{E}\lambda^n}{2\mu}(e^n + e^{n+1}) + \delta^n \quad (\text{IV.4.36})$$

onde o erro δ^n é limitado.

Temos então:

$$e^{n+1} = \left(I - \frac{\lambda^n \tilde{E}^*}{2\mu} \right)^{-1} \left(\tilde{A} + \frac{\lambda^n}{2\mu} \right) e^n + \delta^n \quad (\text{IV.4.37})$$

onde

$$\tilde{\mathbb{C}}^* = \frac{-1}{\tilde{\mathbb{D}}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & R + \frac{2L}{\epsilon} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4.38})$$

E o problema agora é analisar os auto-valores

$$\Gamma^* = \left(I - \frac{\lambda^n \tilde{\mathbb{C}}^*}{2\mu} \right)^{-1} \tilde{\mathbb{A}} + \frac{\lambda^n \tilde{\mathbb{C}}^*}{2\mu} \quad (\text{IV.4.39})$$

o que apresenta as mesmas dificuldades da análise dos auto-valores de Γ . O mesmo é aplicável à norma de Γ^* . Neste caso, também podemos obter estimativas para o erro:

$$\| e^{n+1} \| \leq \| \tilde{\mathbb{A}} \| \| e^n \| + \frac{\| \tilde{\mathbb{C}} \|}{2\mu} \| e^n \| + \frac{\| \tilde{\mathbb{C}} \|}{2\mu} \| e^{n+1} \| + \tilde{\mathbb{M}} \quad (\text{IV.4.40})$$

Assim:

$$\| e^{n+1} \| \leq \tilde{\xi} \| e^n \| + \tilde{\mathbb{M}} \quad (\text{IV.4.41})$$

onde:

$$\tilde{\xi} = \left(\| \tilde{\mathbb{A}} \| + \frac{\| \tilde{\mathbb{C}} \|}{2\mu} \right) / \left(1 - \frac{\| \tilde{\mathbb{C}} \|}{2\mu} \right) \quad (\text{IV.4.42})$$

A estimativa é válida para $\frac{\| \tilde{\mathbb{C}} \|}{2\mu} < 1$.

Em caso contrário, devemos tomar, analogamente a (IV.3.33):

$$\tilde{\xi} = \left(\| \tilde{\mathbb{A}} \| + \frac{\| \tilde{\mathbb{C}} \|}{2\mu} \right) / \inf \left\{ \left\| I - \frac{\lambda \tilde{\mathbb{C}}}{2\mu} \right\| \mid 0 < \lambda < 1 \right\} \quad (\text{IV.4.43})$$

Devo-se observar que neste caso, além de sempre ser relativamente estável, se $\tilde{\xi} \leq 1$ o processo é absolutamente estável

vel (assintoticamente, se $\xi < 1$). Neste caso obtemos:

$$\| e^n \| \leq \frac{\tilde{M}}{1-\xi} \quad , \quad \xi < 1 \quad (\text{IV.4.44})$$

$$\| e^n \| \leq \frac{T}{\epsilon} \tilde{M} \quad , \quad \tilde{\xi} = 1 \quad (\text{IV.4.45})$$

$$\| e^n \| \leq \frac{T}{\epsilon} \tilde{\xi}^{T/\epsilon} \tilde{M} \quad , \quad \tilde{\xi} > 1 \quad (\text{IV.4.46})$$

E novamente devemos usar a dependência de \tilde{M} e $\tilde{\xi}$ em ϵ , para concluir que este erro é limitado.

5. Estimativas a priori e estabilidade.

A estabilidade do algoritmo pode ser obtida das estimativas dos capítulos II e III, uma vez que (II.3.23) e (III.5.71) mostram que:

$$| I^{n+1/2} - I(t_{n+1/2}) | \leq \frac{1}{\sqrt{2R}} \| v_{\text{ext}} \| + \frac{1}{\sqrt{2R}} \| v_{\text{ext}_\epsilon} \| \quad (\text{IV.5.47})$$

$$| V_{\mathbb{E}}^{n+1/2} - V_{\mathbb{E}}(t_{n+1/2}) | \leq \frac{1}{\sqrt{2R}} \| v_{\text{ext}} \| + \frac{1}{\sqrt{2R}} \| v_{\text{ext}_\epsilon} \| \quad (\text{IV.5.48})$$

Além disso a construção do algoritmo garante:

$$| \tilde{I}^{n+1/2} - I^{n+1/2} | \leq \delta \quad (\text{IV.5.49})$$

$$| V_{\mathbb{E}}^{n+1/2} - V_{\mathbb{E}}^{n+1/2} | \leq \delta \quad (\text{IV.5.50})$$

E portanto os erros em $I(t_{n+1/2})$ e $V_{\mathbb{E}}(t_{n+1/2})$ são limitados por

$\delta + \frac{1}{\sqrt{RL}} \|v_{\text{ext}}\| + \frac{1}{\sqrt{RL}} \|v_{\text{ext}_\varepsilon}\|$ e o algoritmo é estável.

V. ACELERAÇÃO DA CONVERGÊNCIA.

Se admitirmos um erro máximo δ_0 no corretor, quantas iterações serão necessárias para determinar X^{n+1} ?

Como desejamos:

$$\| X^{n+1} - \tilde{X}^{n+1} \| \leq \delta_0, \quad (V.1)$$

então devemos procurar k tal que

$$\| X_{(k)}^{n+1} - \tilde{X}^{n+1} \| \leq \delta_0. \quad (V.2)$$

Usando a estimativa (III.2.30):

$$\| X_{(k)}^{n+1} - \tilde{X}^{n+1} \| \sim [M_1(\epsilon)]^k \| X_{(0)}^{n+1} - \tilde{X}^{n+1} \| \leq \delta_0 \quad (V.3)$$

Assim:

$$k \sim \frac{1}{\ln M_1(\epsilon)} \cdot \ln \frac{\delta_0}{\| X_{(0)}^{n+1} - \tilde{X}^{n+1} \|} \quad (V.4)$$

Lembrando que $\| X_{(0)}^{n+1} - \tilde{X}^{n+1} \| = O(\epsilon^2)$

$$k \sim \frac{1}{\ln M_1(\epsilon)} \cdot \ln \frac{\delta_0}{\alpha \epsilon^2} \quad (V.5)$$

Por outro lado, para cobrir o intervalo $(0, T)$ são necessários $\frac{T}{\epsilon}$ passos no tempo. Assim, faremos aproximadamente

a) $\frac{T}{\epsilon}$ usos do preditor

b) $\frac{T}{\epsilon} \frac{1}{\ln M_1(\epsilon)} \cdot \ln \frac{\delta_0}{\alpha \epsilon^2}$ usos do corretor.

Isto mostra que, fixado ϵ , o algoritmo mais rápido será o que tiver o menor valor de $M_i(\epsilon)$. Vemos também que a velocidade do algoritmo está estreitamente ligada à rapidez de convergência das iterações do corretor.

A questão a responder é então: será possível acelerar a convergência?. Em que casos?. Por qual método?.

1. Primeira modificação: Uso de $I_{(j+1)}^{n+1}$

Uma das primeiras possibilidades é o uso do valor de $I_{(j+1)}^{n+1}$, já calculado, para o cálculo de $V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1}$. Teríamos então:

$$I_{(j+1)}^{n+1} = \rho_1(I_{(j)}^{n+1}, V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1}) \quad (\text{V.1.6})$$

$$V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} = \rho_2(\alpha I_{(j+1)}^{n+1} + (1-\alpha)I_{(j)}^{n+1}, V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1}), 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (\text{V.1.7})$$

Neste caso, temos:

$$|I_{(j+1)}^{n+1} - I^{n+1}| \leq S_1 |I_{(j)}^{n+1} - I^{n+1}| + S_2 |V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} - V_{\mathbb{E}}^{n+1}| \quad (\text{V.1.8})$$

$$\begin{aligned} |V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} - V_{\mathbb{E}}^{n+1}| &\leq \alpha T_1 |I_{(j+1)}^{n+1} - I^{n+1}| + (1-\alpha) T_1 |I_{(j)}^{n+1} - I^{n+1}| \\ &\quad + T_2 |V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} - V_{\mathbb{E}}^{n+1}| \end{aligned} \quad (\text{V.1.9})$$

para S_i, T_i convenientes. Logo:

$$\begin{aligned} |V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} - V_{\mathbb{E}}^{n+1}| &\leq [\alpha T_1 S_1 + (1-\alpha) T_1] |I_{(j)}^{n+1} - I^{n+1}| \\ &\quad + (\alpha S_2 T_1 + T_2) |V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} - V_{\mathbb{E}}^{n+1}| \end{aligned} \quad (\text{V.1.10})$$

Assim:

$$M_2(\epsilon) = \text{Sup}\{S_1 + (1-\alpha)T_1 + \alpha T_1 S_1, S_2 + T_2 + \alpha S_2 T_1\} \quad (\text{V.1.11})$$

deve ser comparado com

$$M_1(\epsilon) = \text{Sup}\{S_1 + T_1, S_2 + T_2\} \quad (\text{V.1.12})$$

Observa-se então que:

$$S_1 + T_1 \leq S_2 + T_2 \implies M_1(\epsilon) \leq M_2(\epsilon) \quad (\text{V.1.13})$$

Em caso contrário:

$$M_1(\epsilon) = S_1 + T_1 > S_2 + T_2 \quad (\text{V.1.14})$$

e para que a modificação seja vantajosa:

$$S_1 + (1-\alpha)T_1 + \alpha T_1 S_1 < S_1 + T_1 \quad (\text{V.1.15a})$$

$$S_2 + T_2 + \alpha S_2 T_2 < S_2 + T_2 \quad (\text{V.1.15b})$$

Estas inequações transformam-se em:

$$S_1 < 1 \quad (\text{V.1.16a})$$

$$\alpha S_2 T_1 < (S_1 + T_1) - (S_2 + T_2) \quad (\text{V.1.16b})$$

Considerando (V.1.14), vemos que sempre existe $\alpha > 0$ nas

condições(V.1.16). Portanto esta alteração é vantajosa se: $S_1 < 1$ e $S_1 + T_1 > S_2 + T_2$. O α deve ser escolhido de acordo com(VI.1.16b).

Para o algoritmo apresentado em III.1, estas condições se escrevem:

$$\frac{R\epsilon}{2L} < 1 \quad (\text{V.1.17a})$$

$$\frac{R+1}{2L} \epsilon > \frac{\epsilon}{2E} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \quad (\text{V.1.17b})$$

$$\alpha \frac{R}{4LE} \epsilon^2 < \left[\frac{R+1}{2L} - \frac{1}{2E} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \right] \epsilon \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (\text{V.1.17c})$$

Para o algoritmo alternativo, temos:

$$\left| \frac{2E}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 \right| < |D| \quad (\text{V.1.18a})$$

$$\frac{4L}{\epsilon} > \frac{4E}{\epsilon} + \frac{1}{\mu} \quad (\text{V.1.18b})$$

$$\alpha \left[\left| \frac{2E}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 \right| \right] \left[\left| \frac{2E}{\epsilon} \left(\frac{2L}{\epsilon} - R \right) - 1 \right| + \left(\frac{2L}{\epsilon} + R \right) \frac{1}{\mu} \right] \leq \left(\frac{4L}{\epsilon} - \frac{4E}{\epsilon} + \frac{1}{\mu} \right) |D| \quad (\text{V.1.18c})$$

2. Segunda modificação: Uso de $V_{E(j+1)}^{n+1}$

Uma segunda possibilidade é a inversão da ordem dos cálculos e o uso do valor de $V_{E(j+1)}^{n+1}$ para o cálculo de $I_{(j+1)}^{n+1}$:

$$V_{E(j+1)}^{n+1} = \rho_2(I_{(j)}^{n+1}, V_{E(j)}^{n+1}) \quad (\text{V.2.19})$$

$$I_{(j+1)}^{n+1} = \rho_1 (I_{(j)}^{n+1}, \alpha V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1}) + (1-\alpha) V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (\text{V.2.20})$$

Resulta então:

$$|V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} - V_{\mathbb{E}}^{n+1}| \leq T_1 |I_{(j)}^{n+1} - I^{n+1}| + T_2 |V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} - V_{\mathbb{E}}^{n+1}| \quad (\text{V.2.21})$$

$$\begin{aligned} |I_{(j+1)}^{n+1} - I^{n+1}| &\leq S_1 |I_{(j)}^{n+1} - I^{n+1}| + \alpha S_2 |V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} - V_{\mathbb{E}}^{n+1}| + \\ &+ (1-\alpha) S_2 |V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} - V_{\mathbb{E}}^{n+1}| \end{aligned} \quad (\text{V.2.22})$$

Assim:

$$\begin{aligned} |I_{(j+1)}^{n+1} - I^{n+1}| &\leq (S_1 + \alpha T_1 S_2) |I_{(j)}^{n+1} - I^{n+1}| + \\ &+ (\alpha T_2 S_2 + (1-\alpha) S_2) |V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} - V_{\mathbb{E}}^{n+1}| \end{aligned} \quad (\text{V.2.23})$$

E:

$$M_3(\epsilon) = \text{Sup}\{S_1 + T_1 + \alpha T_1 S_2, S_2 + T_2 + \alpha S_2(T_2 - 1)\} \quad (\text{V.2.24})$$

Neste caso:

$$S_2 + T_2 \leq S_1 + T_1 \Rightarrow M_3(\epsilon) \geq M_1(\epsilon) \quad (\text{V.2.25})$$

Para que haja vantagem nesta modificação então:

$$S_1 + T_1 < S_2 + T_2 \quad (\text{V.2.26a})$$

$$S_1 + T_1 + \alpha T_1 S_2 < S_2 + T_2 \quad (\text{V.2.26b})$$

$$S_2 + T_2 + \alpha S_2 (T_2 - 1) < S_2 + T_2 \quad (\text{V.2.26c})$$

É fácil ver que (V.2.27c) equivale a:

$$T_2 < 1 \quad (\text{V.2.26d})$$

Para o algoritmo III.1 estas condições se escrevem:

$$\frac{R+1}{2L} \varepsilon < \frac{\varepsilon}{2E} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \quad (\text{V.2.27a})$$

$$\frac{\varepsilon}{2\mu E} < 1 \quad (\text{V.2.27b})$$

$$\alpha \frac{\varepsilon^2}{4LE} < \frac{\varepsilon}{2E} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) - \frac{R+1}{2L} \varepsilon \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{V.2.27c})$$

Para o algoritmo alternativo:

$$\frac{4L}{\varepsilon} < \frac{4E}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu} \quad (\text{V.2.28a})$$

$$\left| \frac{2E}{\varepsilon} \left(\frac{2L}{\varepsilon} - R \right) - 1 \right| < |D| \quad (\text{V.2.28b})$$

$$\begin{aligned} \alpha \left[\left| \frac{2E}{\varepsilon} \left(\frac{2L}{\varepsilon} - R \right) - 1 \right| \right] & \left[\left| \frac{2E}{\varepsilon} \left(\frac{2L}{\varepsilon} - R \right) - 1 \right| + \left(\frac{2L}{\varepsilon} + R \right) \frac{1}{\mu} \right] \\ & \leq \left(\frac{4E}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu} - \frac{4L}{\varepsilon} \right) |D| \quad (\text{V.2.28c}) \end{aligned}$$

3. Relaxação.

Podemos combinar um dos processos acima com uma relaxação da forma

$$X_{(j+1)}^{n+1} = \alpha \tilde{X}_{(j+1)}^{n+1} + (1-\alpha)X_{(j)}^{n+1} \quad (V.3.29)$$

onde \tilde{X}^{n+1} é determinado por um dos métodos apresentados. Então:

$$\begin{aligned} \|X_{(j+1)}^{n+1} - X^{n+1}\| &\leq |\alpha| \|X_{(j+1)}^{n+1} - X^{n+1}\| + \\ &+ |1-\alpha| \|X_{(j)}^{n+1} - X^{n+1}\| \end{aligned} \quad (V.3.30)$$

resultando:

$$\|X_{(j+1)}^{n+1} - X^{n+1}\| \leq \left[|\alpha| M_i(\epsilon) + |1-\alpha| \right] \|X_{(j)}^{n+1} - X^{n+1}\| \quad (V.3.31)$$

Para que este processo seja mais eficaz:

$$|\alpha| (M_i(\epsilon)) + |1-\alpha| < M_i(\epsilon) \quad (V.3.32)$$

Logo:

$$0 \leq \alpha < 1 \Rightarrow (1-\alpha)(1-M_i(\epsilon)) < 0 \quad (V.3.33)$$

$$\alpha < 0 \Rightarrow 1 - \alpha < (1+\alpha)M_i(\epsilon) \quad (V.3.34)$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow (\alpha-1)(M_i(\epsilon)+1) < 0 \quad (V.3.35)$$

Esta última equação não tem solução pois:

$$(\alpha-1)(M_i(\epsilon) + 1) < 0 \Rightarrow \alpha < 1 \quad (V.3.36)$$

Já (V.3.34) só admite solução para $M_i(\epsilon) > 1$, pois:

$$0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow (1-\alpha) \geq 0 \quad (V.3.37)$$

Vemos daí também que $\alpha = 1$ não é solução para nenhum $m \in$ todo. A equação (V.3.35) só admite solução se $M_i(\epsilon) < 1$, pois

$$M_i(\epsilon) \leq 1 \Rightarrow M_i(\epsilon) < M_i(\epsilon) + \alpha M_i(\epsilon) \Rightarrow \alpha > 0 \quad (\text{V.3.38})$$

Assim, só há solução para $M_i(\epsilon) > 1$, caso em que devemos tomar α tal que:

$$\frac{1 - M_i(\epsilon)}{1 + M_i(\epsilon)} < \alpha < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < \alpha < 1. \quad (\text{V.3.39})$$

Entretanto, é possível mostrar que:

$$M_i(\epsilon) > 1 \Rightarrow |\alpha| M_i(\epsilon) + |1 - \alpha| > 1 \quad (\text{V.3.40})$$

Assim, esta análise é incapaz de garantir o sucesso da relaxação aplicada a um método genérico.

4. Relaxação no algoritmo III.1

No caso particular do algoritmo III.1, o processo de relaxação resulta em:

$$I_{(j+1)}^{n+1} = \left[\frac{\alpha R}{2L} \epsilon + 1 - \alpha \right] I_{(j)}^{n+1} + \frac{\epsilon}{2L} V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} + \dots \quad (\text{V.4.41})$$

$$V_{\mathbb{E}(j+1)}^{n+1} = \frac{\epsilon}{2L} I_{(j)}^{n+1} + (1 - \alpha) V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1} + \frac{\alpha \epsilon}{2L} j \left(\frac{V_{\mathbb{E}}^n + V_{\mathbb{E}(j)}^{n+1}}{2} \right) + \dots \quad (\text{V.4.42})$$

Assim, o processo final resulta com parâmetro de convergência:

$$M_4(\varepsilon) = \sup \left\{ \frac{\varepsilon}{2L} + \left| \alpha \frac{R\varepsilon}{2L} \varepsilon^{1-\alpha} \right|, \frac{\varepsilon}{2L} + |1-\alpha| + \frac{|\alpha|\varepsilon}{2\mu L} \right\} \quad (\text{V.4.43})$$

que deve ser comparado com:

$$M_1(\varepsilon) = \sup \left\{ \frac{\varepsilon}{2L} + \frac{R\varepsilon}{2L}, \frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2\mu L} \right\} \quad (\text{V.4.44})$$

É claro que uma escolha conveniente de α é dada por

$$\left| \alpha \frac{R\varepsilon}{2L} + 1 - \alpha \right| < \frac{R\varepsilon}{2L} \quad (\text{V.4.45})$$

$$|1-\alpha| + \frac{|\alpha|\varepsilon}{2\mu L} < \frac{\varepsilon}{2\mu L} \quad (\text{V.4.46})$$

A primeira destas inequações apresenta solução:

$$\frac{R\varepsilon}{2L} < 1 \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{R\varepsilon}{2L}} < \alpha < \frac{1 + \frac{R\varepsilon}{2L}}{1 - \frac{R\varepsilon}{2L}} \quad \text{ou}$$

$$1 < \alpha < \frac{1}{1 - \frac{R\varepsilon}{2L}} \quad (\text{V.4.47})$$

$$\frac{R\varepsilon}{2L} > 1 \Rightarrow \frac{-1}{\frac{R\varepsilon}{2L} - 1} < \alpha < 1 \quad \text{ou}$$

$$-\frac{1 + \frac{R\varepsilon}{2L}}{\frac{R\varepsilon}{2L} - 1} < \alpha < \frac{-1}{\frac{R\varepsilon}{2L} - 1} \quad (\text{V.4.48})$$

E a segunda apresenta solução

$$\frac{\varepsilon}{2\mu L} < 1 \Rightarrow \frac{1}{\mu} < \alpha \quad (\text{V.4.49})$$

$$\frac{\epsilon}{2\epsilon\mathbb{E}} > 1 \Rightarrow 0 < \alpha < 1 \quad \text{ou}$$

$$\frac{\frac{\epsilon}{2\mu\mathbb{E}} - 1}{\frac{\epsilon}{2\mu\mathbb{E}} + 1} < \alpha < 0 \quad (\text{V.4.50})$$

Deve ser observado que

$$\frac{\epsilon}{2\mu\mathbb{E}} > 1 \Rightarrow M_1(\epsilon) > 1 \quad (\text{V.4.51})$$

e também:

$$M_4(\epsilon) \geq 1 + \frac{\epsilon}{2L} > 1 \quad (\text{V.4.52})$$

Mas, mesmo que $\frac{\epsilon}{2\mu\mathbb{E}} < 1$, se α é tal que:

$$\frac{\epsilon}{2\mathbb{E}} + \left| \alpha \frac{R}{2L} \epsilon + 1 - \alpha \right| > |1 - \alpha| + \frac{|\alpha|}{2\mu\mathbb{E}} \epsilon + \frac{\epsilon}{2L} \quad (\text{V.4.53})$$

e vale (V.4.45), é vantagem usar a relaxação.

5. Política de escolha do método de aceleração.

Podemos então esquematizar um processo de escolha para o método de aceleração:

(i) Se $\frac{R+1}{L} > \frac{1}{\mathbb{E}} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$

usaremos o processo da Seção 1, com α dado por (V.1.18c).

(ii) Se $\frac{R+1}{L} < \frac{1}{\mathbb{E}} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$, usaremos o processo da Seção 2, com

α dado por (V.2.28c)

Observe que as condições $\frac{R}{2L} \epsilon < 1$ e $\frac{\epsilon}{2\mu T} < 1$ estão automaticamente satisfeitas pelo ϵ escolhido em (i)

(iii) A relaxação só será vantajosa se pudermos encontrar α tal que

$$\left| \alpha \frac{R\epsilon}{2L} + 1 - \alpha \right| < \frac{R\epsilon}{2L}$$

$$\frac{\epsilon}{2T} + \left| \alpha \frac{R\epsilon}{2L} + 1 - \alpha \right| > |1 - \alpha| + \frac{|\alpha|}{2\mu T} \epsilon + \frac{\epsilon}{2L}$$

Para o algoritmo alternativo, o procedimento é inteiramente análogo:

- (i) determinar ϵ
- (ii) Se $\frac{4L}{\epsilon} > \frac{4T}{\epsilon} + \frac{1}{\mu}$, usar o método da Seção 1.
- (iii) Se $\frac{4L}{\epsilon} < \frac{4T}{\epsilon} + \frac{1}{\mu}$, usar o método da Seção 2.

O uso de relaxação não é, em geral, vantajoso neste caso.

VI. EXEMPLOS NUMÉRICOS.

O algoritmo definido na seção(III.1) foi implementado sob a forma de um programa FORTRAN, no sistema 370/MTS do LCC/CNPq. Alguns circuitos foram simulados para verificar o comportamento do modelo em certos exemplos acadêmicos.

O primeiro circuito simulado apresentava as seguintes características:

$$R = 10\Omega$$

$$L = 1 \text{ H}$$

$$C = 1 \text{ F}$$

$$V_d = 1.5 \text{ V}$$

$$V_{\text{ext}}(t) = \begin{cases} 10\text{V}, & t \in [0, 1] \\ -10\text{V}, & t \in [1, 2] \\ 10\text{V}, & t \in [2, 3] \\ -10\text{V}, & t \geq 3 \end{cases}$$

Os parâmetros de aproximação foram:

$$\mu = 0.001$$

$$\epsilon = 5 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Neste caso, temos:

$$M_1(\epsilon) \approx 0.025$$

O uso do algoritmo alternativo não é conveniente, pois:

$$\tilde{M}_1(\epsilon) \cong 1.05$$

Sendo

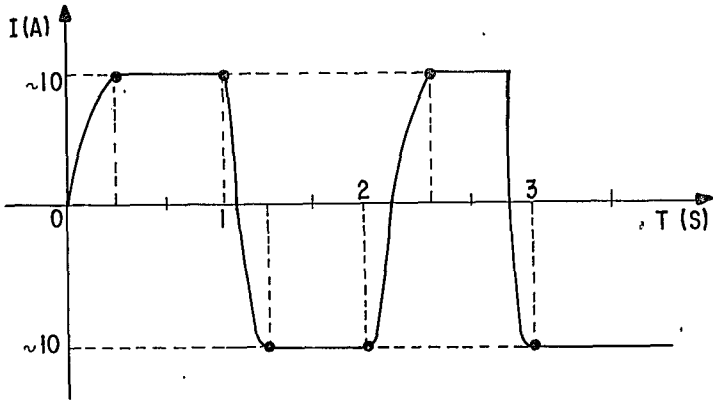
$$\frac{R + 1}{L} < \frac{1}{\mu E} + \frac{1}{E}$$

o processo de aceleração a usar é (IV.2). Entretanto:

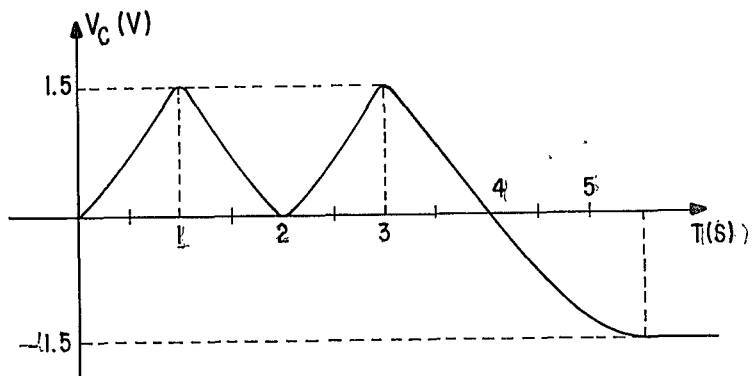
$$M_3(\epsilon) \cong M_1(\epsilon)$$

Assim, não é vantajoso usar (IV.2).

O comportamento das soluções está reproduzido nos gráficos apresentados na figura (VI.1).



a) A corrente no circuito



b) A ddp no capacitor

fig.VI.1 - Resultados para o primeiro circuito

Um segundo circuito simulado foi o de características:

$$R = 3\Omega$$

$$L = 0.5H$$

$$C = 0.5F$$

$$V_d = 1.5V$$

$$V_{\text{ext}}(t) = 100 \text{ sen } 2t \text{ (em Volts).}$$

Para a aproximação usamos:

$$\mu = 0.001$$

$$\epsilon = 5 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Neste caso:

$$M_1(\epsilon) \approx 0.1$$

Sendo:

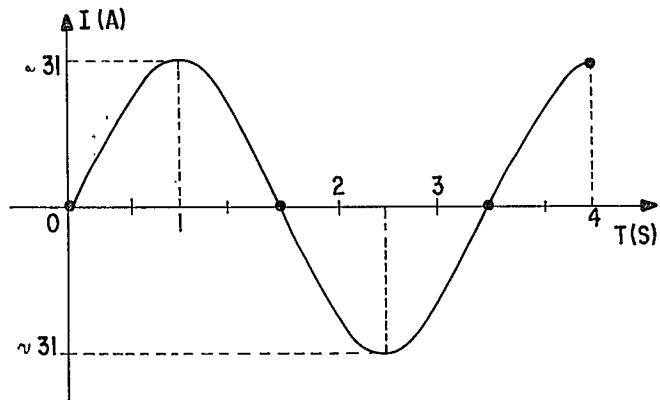
$$\frac{R + 1}{L} < \frac{1}{\mu E} + \frac{1}{E}$$

o algoritmo de aceleração é (IV.2). Mais uma vez, entretanto:

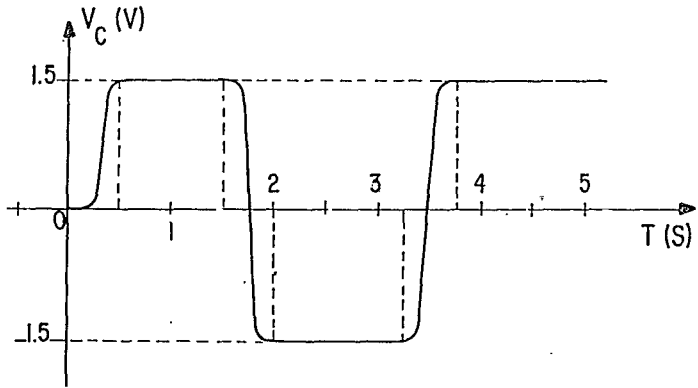
$$M_3(\epsilon) \approx M_1(\epsilon)$$

e não é vantagem usar este processo.

As soluções deste circuito estão reproduzidas na figura (VI.2):



a) A corrente no circuito



b) A ddp no capacitor

fig.VI.2 - Resultados para o segundo circuito.

Finalmente, foi simulado um circuito de características

$$R = 4\Omega$$

$$L = 1H$$

$$C = 0.125F$$

$$V_d = 1.5V$$

$$V_{ext}(t) = 100 \text{ sen } 2t \text{ (em Volts)}$$

Os parâmetros de penalização e discretização foram

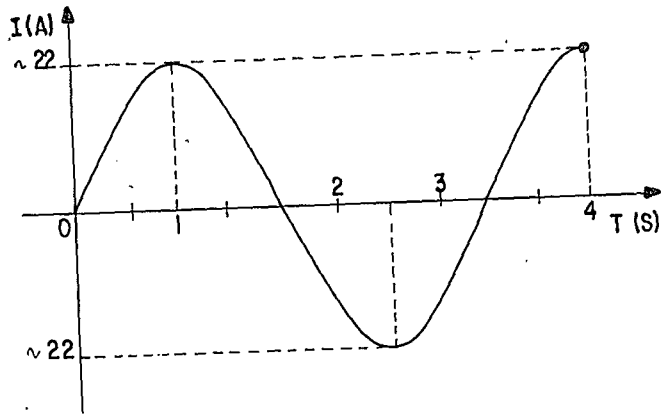
$$\mu = 0.001$$

$$\epsilon = 5 \times 10^{-5} s$$

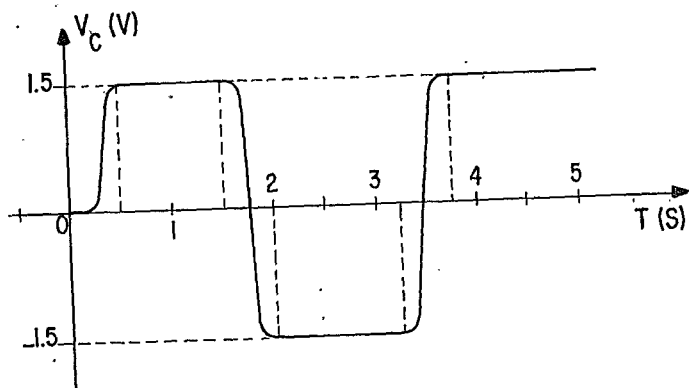
Neste caso:

$$M_1(\epsilon) \approx 0.2$$

Mais uma vez, o uso dos algoritmos de aceleração não produz modificação apreciável na rapidez de convergência. Os resultados podem ser vistos na fig.(VI.3)



a) A corrente no circuito



b) A ddp no capacitor

fig.VI.3 - Resultados para o terceiro circuito

Para permitir ao leitor uma avaliação qualitativa dos resultados apresentados, mostramos na figura(VI.4), medidas efetuadas em um circuito semelhante ao da figura, com o elemento "arco elétrico" simulado por um par de diodos Zenner. A fotografia apresenta a imagem em osciloscópio da voltagem no capacitor (V_C) - a curva superior - e da voltagem no resistor($V_R=RI$) - a curva inferior. A escala vertical é de 5V para V_C e 20V para V_R . A escala horizontal é de 2ms. No caso, a ddp aplicada V_{ext} é uma onda quadrada de frequência 200Hz e amplitude 20V. Os parâmetros do circuito são $R = 9k\Omega$, $L = 1H$, $C = 1.0\mu F$, $V_d = 5.2V$. Pode-se observar a concordância entre a previsão do modelo e os resultados experimentais.

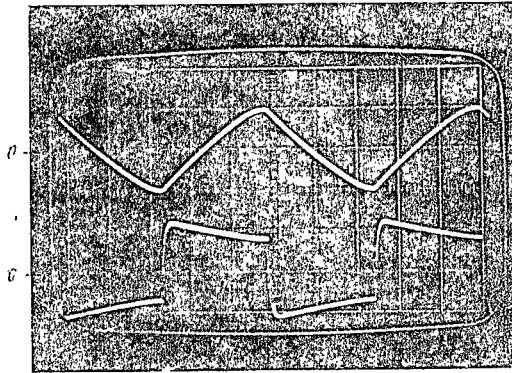


fig.VI.4 - Resultado experimental *

* foto cedida por M.A. Raupp.

. REFERÊNCIAS

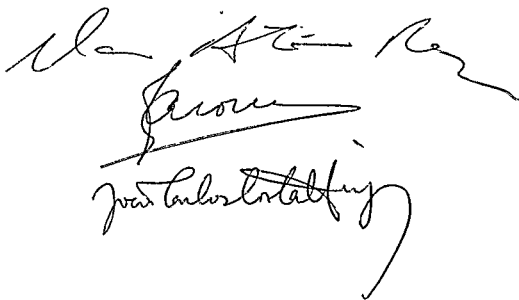
- (1) Butkov, Eugene - Mathematical Physics, Addison-Wesley, USA(1973).
- (2) Boas, Mary L. - Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Wiley & Sons, USA(1966).
- (3) Arfken, George - Mathematical Methods for Physicists , Academic Press, USA(1968).
- (4) Baiocchi, Orlando R. e Raupp, Marco A. - Analysis of a RLC circuit in the dielectric breakdown limit - submetido para publicação no Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática(1980).
- (5) Baiocchi, Orlando R. e Raupp, Marco A. - Analysis of an RLCZ circuit - a ser publicado.
- (6) Raupp, M.A. - Introdução ao cálculo das variações, in Métodos Variacionais em Mecânica dos Sólidos, Vol.I (II Escola de Matemática Aplicada), CBPF, Rio de Janeiro (1980).
- (7) Rockafellar, R. Tyrrel - Convex Analysis, Princeton Ed., USA(1970).
- (8) Eklund, Ivar e Temam, Roger - Convex Analysis and Variational Problems, North-Holland Co., Holanda (1976).
- (9) Yosida, Kôzaku - Functional Analysis, 4.^a Ed., Springer Verlag, Alemanha(1974).
- (10) Taylor, Angus - Introduction to Functional Analysis, John Wiley & Sons, Japão(1958)
- (11) Riesz, Frigyes e Sz.-Nagy, Béla - Functional Analysis,

- Frederick Ungar P.Co., USA(1955).
- (12) Bachman, George e Narici, Lawrence - Functional Analysis, Academic Press, USA(1966).
- (13) Moura, C.A. - Análise Funcional e Aplicações (I Escola de Matemática Aplicada), CBPF, Rio de Janeiro(1978).
- (14) Tjonov, A.N. e Samarsky, A.A. - Ecuaciones de la Física Matemática, MIR-URSS(1972).
- (15) Fox, L. - Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations, Pergamon Press & Addison - Wesley P.Co., Inglaterra(1962).
- (16) Honig, Chaim Samuel - Aplicações da Topologia à Análise, Editora Edgar Blucher, São Paulo (1976).
- (17) Ostrowski, A.M. - Solution of equations and Systems of Equations, Academic Press, USA(1960).
- (18) Faddeev, D.K. e Faddeeva, V.N. - Computational Methods of Linear Algebra, W.H. Freeman & Co., USA(1963).
- (19) Collatz, Lothar - Functional Analysis and Numerical Mathematics, Academic Press, USA(1966).
- (20) Lapidus, Leon e Seinfeld, John - Numerical Solution of ordinary differential equations, Academic Press, USA(1971).
- (21) Godounov, S. & Riabenki, V. - Schémas aux différences, MIR-URSS(1977).
- (22) Glowinski, R.; Lions, J.L. e Trémolières, R. - Analyse Numérique des Inéquations Variationelles, Bordas, França(1976).


Ilmo. Sr. Coordenador de Ensino

A Banca Examinadora, constituída pelos Professores Marco Antonio Raupp e Carlos Antonio de Moura do Laboratório de Computação Científica e João Carlos dos Anjos do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, em reunião no dia 15 de dezembro de 1980, que precedeu a exposição da Tese "Simulação Numérica de Circuitos RLC Disruptivos", por José Eduardo Souza de Cursi, considerou a Tese apta para defesa imediata.

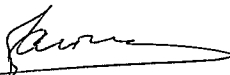
Rio de Janeiro, 15 de dezembro de 1980



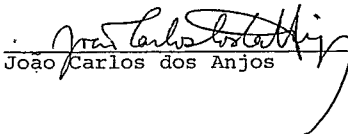
Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Marco Antonio Raupp - Presidente



Carlos Antonio de Moura



João Carlos dos Anjos

Rio de Janeiro, 15 de dezembro de 1980