

*Mario José Delgado Assad*

MODELOS COSMOLÓGICOS ANISOTRÓPICOS BIANCHI  
VIII/IX COM MATÉRIA E CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

1980

## AGRADECIMENTOS

- A Ivano D. Soares pela sugestão do tema, pela orientação segura no decorrer deste trabalho e, principalmente, pela ajuda em difíceis momentos.

- A Rodrigo e Gustavo por seu carinho e presença nas muitas vezes que lhes faltai durante a realização desta tese.

- Aos amigos do CBPF. Particularmente a Nivaldo A. Lemos pela "cordialidade e lheneze no trato" que sempre o distinguiram, e a Marcelo José Rebouças e José Ademir S. de Lima por inúmeras discussões importantes e pelo incentivo em momentos de desânimo.

- À Helena de Souza Ferreira pelo trabalho de datilografia.

- Ao Departamento de Física da Universidade Federal do Paraíba pela acolhida durante a fase final desse trabalho.

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq pela concessão de bolsa de estudos.

## RESUMO

Construímos uma classe de modelos cosmológicos anisotrópicos, com seções de homogeneidade espacial tipo Bianchi VIII/IX, que são soluções exatas das equações de Einstein com tensor momentum-energia de fluido perfeito e campo eletromagnético. O espaço-tempo dos modelos tem, por construção, as estruturas  $R \times H^3$  e  $R \times S^3$ , associadas aos modelos Bianchi tipo VIII e IX respectivamente. Os modelos apresentam expansão e distorção (shear), e a presença da anisotropia não afeta a estrutura de singularidades característica dos tipos de Bianchi: no caso Bianchi VIII os modelos expandem-se continuamente a partir de uma singularidade inicial; no caso IX, os modelos apresentam um período de expansão seguido de um período de contração entre duas singularidades. O campo eletromagnético afeta o período dos modelos Bianchi IX.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
LISTA DE FIGURAS .....	vii
LISTA DE TABELAS .....	viii
INTRODUÇÃO .....	1
<u>CAPÍTULO 1</u> - ALGUNS CONCEITOS EM GEOMETRIA DIFERENCIAL .....	6
1.1 - INTRODUÇÃO .....	6
1.2 - VARIEDADE DIFERENCIÁVEL .....	7
1.3 - ESPAÇOS TANGENTES E SEUS ESPAÇOS DUAIS .....	9
1.4 - TENSORES E FORMAS DIFERENCIAIS .....	13
1.5 - DERIVADA DE LIE .....	19
1.6 - DERIVADA COVARIANTE E EQUAÇÕES DE ESTRUTURA DE CARTAN...	23
1.7 - CÁLCULO COM FORMAS EM VARIEDADES RIEMANNIANAS .....	28
1.8 - ISOMETRIAS .....	30
1.9 - CAMPOS VETORIAIS INVARIANTES E 1-FORMAS INVARIANTES.....	35
<u>CAPÍTULO 2</u> - CONSTRUÇÃO DE ELEMENTOS DE LINHA PARA O ESPAÇO-TEMPO COM ESTRUTURAS $R \times S^3$ E $R \times H^3$ .....	39
2.1 - INTRODUÇÃO .....	39
2.2 - A ÁLGBRA DE QUATÉRNIOS: DESCRIÇÃO DE $S^3$ E $H^3$ IMERSOS EM $E^4$ .....	41
2.3 - $S^3$ E $H^3$ COMO GRUPOS DE LIE .....	45
2.4 - A MÉTRICA DE UMA VARIEDADE $M^4$ COM ESTRUTURA $R \times S^3$ .....	48
2.5 - A MÉTRICA DE UMA VARIEDADE $M^4$ COM ESTRUTURA $R \times H^3$ .....	56
<u>CAPÍTULO 3</u> - A CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI .....	61
3.1 - INTRODUÇÃO .....	61
3.2 - A CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI-BEHR .....	61

3.3 - CLASSIFICAÇÃO DAS SEÇÕES DE HOMOGENEIDADE DAS VARIEDADES $H^4 = R \times S^3$ E $M^4 = R \times H^3$ .....	66
3.4 - UMA NOTA SOBRE OS TIPOS DE BIANCHI MAXIMALMENTE SIMÉTRICOS .....	67
4 - COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA .....	72
4.1 - ALGUNS CONCEITOS EM COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA .....	72
4.2 - ESPAÇO DE REPOUSO LOCAL E QUANTIDADES CINEMÁTICAS .....	75
4.3 - REFERENCIAL DE LORENTZ LOCAL: A TÉCNICA DE TETRADAS ORTONORMAIS .....	83
TULO 5 - MODELOS COSMOLÓGICOS ANISOTRÓPICOS BIANCHI VIII/IX COM MATÉRIA E CAMPO ELETROMAGNÉTICO .....	89
5.1 - INTRODUÇÃO .....	89
5.2 - O ELEMENTO DE LINHA .....	90
5.3 - O TENSOR MOMENTUM-ENERGIA .....	99
5.4 - AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E SUAS SOLUÇÕES .....	103
5.5 - O COMPORTAMENTO DA DENSIDADE E DA PRESSÃO E OS PARÂMETROS CINEMÁTICOS .....	112
ANEXICO A - O ELIPSÓIDE $L^3$ COMO DEFORMAÇÃO DE $S^3$ .....	117
ANEXICO B - OS MODELOS DE FRIEDMANN FECHADOS .....	121
REFERÊNCIAS .....	126

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>	<u>Pág.</u>
1.2.1 - Transformação de coordenadas em M .....	7
1.2.2 - Coordenadas admissíveis em $U_k$ .....	8
1.3.1 - Definição de uma curva em M .....	9
1.8.1 - $[k_i, k_j]$ como medida da não comutatividade do grupo de transformações .....	32
5.4.1 - Gráficos das soluções para modelos Bianchi IX .....	109
5.4.2 - Gráfico da solução para modelos Bianchi VIII .....	111

LISTA DE TABELAS

<u>Tab.</u>	<u>Pág.</u>
2.2.1 - Tabela de multiplicação de quatérnios .....	41
2.2.2 - Tabela de multiplicação dos quatérnios de CSdel .....	43
3.2.1 - Possíveis escolhas independentes para os sinais das constantes de estrutura dos diferentes tipos de Bianchi .....	66
5.2.1 - Geometrias contidas no elemento de linha unificado .....	92

## INTRODUÇÃO

A Cosmologia estuda as propriedades em larga escala do universo. A tarefa é complexa e algumas hipóteses simplificadas devem ser estabelecidas.

A ciência moderna nasceu com o Princípio de Copérnico, isto é, com a adoção do ponto de vista de que não ocupamos uma posição privilegiada no universo, e essa é a hipótese mais simples que podemos fazer em Cosmologia. Conseqüentemente, as leis físicas locais devem ser as mesmas em qualquer outra posição no universo e a evolução global do universo deve ser determinada pelas leis físicas conhecidas. Como em larga escala a gravitação é a interação dominante, a Teoria da Relatividade Geral, como teoria da gravitação, é a teoria adequada ao estudo do universo.

Interpretado de outra forma, o Princípio de Copérnico estabelece que temos uma visão típica do universo e qualquer outro observador, em outro ponto, deve ter a mesma visão. Assumimos então que, exceto por inhomogeneidades locais, o universo é homogêneo, isto é, suas propriedades físicas são independentes da posição em que o observamos.

O conceito matemático de homogeneidade, isto é, a equivalência de pontos num dado espaço, é aplicável a espaços de qualquer dimensão. Dentre todos os possíveis modelos cosmológicos conhecidos, uma grande parte é constituída dos modelos espacialmente homogêneos. Nesses modelos, o conjunto de pontos equivalentes constitui um subespaço 3-dimensional do espaço-tempo



que é tipo espaço em todos os pontos, isto é, o vetor tangente a qualquer ponto da seção de homogeneidade é tipo espaço em todo ponto.

Em modelos espacialmente homogêneos é possível uma única separação do espaço-tempo em espaço e tempo cosmológicos absolutos. O universo apresenta uma evolução global e, para um dado valor do tempo cosmológico, as quantidades físicas são as mesmas em todos os pontos da seção espacial, evoluindo no tempo à medida que passamos de uma seção espacial a outra.

A hipótese de homogeneidade espacial é conhecida como Princípio Cosmológico Restrito, ao qual se pode incorporar a hipótese de isotropia em torno de nossa posição, isto é, as observáveis físicas são independentes de direção em torno do ponto que ocupamos. Portanto, se assumimos que o universo é isotrópico em torno de nossa posição, além da hipótese de homogeneidade, o universo deve ser isotrópico em todo ponto. Uma discussão completa das hipóteses apresentadas é encontrada em Bondi<sup>(1)</sup>.

A decisão quanto a que estruturas adotar para o espaço-tempo deve ser tomada com base em evidências experimentais. MacCallum apresenta uma síntese dessas evidências e discute que informações sobre a geometria do espaço-tempo poderiam ser obtidas a partir delas<sup>(2)</sup>. Relacionamos duas, que nos parecem mais conclusivas:

a) O desvio para o vermelho do espectro de objetos distantes, indica que estes se afastam de nós a uma velocidade proporcional à distância.

b) A descoberta da radiação de fundo, correspondente à temperatura de um corpo negro de aproximadamente  $3^{\circ}\text{K}$ , indica que o universo expandiu-se a partir de uma fase muito densa e

quente.

Essas duas evidências apontam no sentido de que nosso universo não é estático, nem homogêneo no espaço-tempo (a homogeneidade no espaço-tempo é equivalente a dizer que o universo sempre foi e será o que observamos). Além disso, o alto grau de isotropia na radiação de fundo inicialmente observada aponta no sentido de universos isotrópicos.

As evidências para a hipótese de homogeneidade espacial, baseadas em contagens de galáxias, são menos conclusivas. Os dados existentes são compatíveis com a idéia de universos homogêneos e isotrópicos em escala "suficientemente grande", mas não se pode especificar quantitativamente o significado dessas palavras (2,3).

Por sua simplicidade e pelo fato de que não há evidências observacionais que definitivamente assegurem o contrário, o modelo de Friedman é suposto ser o modelo adequado à descrição da fase atual do universo observado. Esse modelo é espacialmente homogêneo e isotrópico, mas existem, entretanto, algumas evidências que, se conclusivas, forçam-nos a estudar modelos em que abandonamos as hipóteses de homogeneidade espacial e/ou isotropia. Dentre as evidências para o abandono da hipótese de isotropia, citamos duas que não podem ser explicadas por modelos de Friedman:

a) A anisotropia de dipolo observada na radiação de fundo. Tenta-se explicar esse efeito como originário de nosso movimento no superaglomerado local e do movimento deste relativamente a um sistema de referência hipotético em que a radiação de fundo é perfeitamente isotrópica, com velocidade estimada da ordem de 600 Km/s (4). Existem entretanto algumas dificuldades -

des com esse resultado. Há evidências de que qualquer movimento do grupo local não pode exceder a velocidade de 300Km/s. Além disso, um movimento com velocidades maiores que essa deve envolver volumes maiores que a supergaláxia local<sup>(3)</sup>. Qualquer evidência conclusiva quanto à anisotropia da radiação de fundo força-nos a abandonar os modelos de Friedman.

b) Observações do conteúdo de hélio em algumas estrelas sugerem que a visão convencional (tipo Friedman) de estágios iniciais do universo deve ser modificada, de maneira a alterar as escalas de tempo para a expansão do universo durante a fase de formação de hélio. Uma alternativa clássica é apelar para modelos cosmológicos anisotrópicos. Em tais modelos a anisotropia pode levar à alteração necessária da escala de tempo para a expansão inicial do universo<sup>(5)</sup>.

Nesse contexto, vamos discutir, no presente trabalho, uma classe de soluções cosmológicas das equações de Einstein que são homogêneas e anisotrópicas. As linhas gerais de desenvolvimento do trabalho são descritas a seguir.

Introduzimos, no Capítulo 1, alguns conceitos em Geometria Diferencial visando à obtenção das equações de estrutura de Cartan e o cálculo com formas em variedades riemanianas. Esses resultados são utilizados no Capítulo 5 para descrevermos as equações de Einstein num referencial de Lorentz local. Tratamos também os conceitos de grupos de isometrias, a serem utilizados no Capítulo 2, onde construímos modelos para o espaço-tempo com estrutura  $R \times S^3$  e  $R \times H^3$ . Com essas construções, os conceitos de universos fechados e abertos estão em conexão com a topologia das seções de homogeneidade.

## CAPÍTULO 1

### ALGUNS CONCEITOS EM GEOMETRIA DIFERENCIAL

#### 1.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo contém alguns resultados em Geometria Diferencial, apresentados, em geral, sem demonstração e a partir dos conceitos do cálculo de funções de  $n$  variáveis e da álgebra linear.

Procuramos definir todas as entidades geométricas de forma invariante, isto é, as componentes de um dado objeto geométrico, como descritas na base do espaço vetorial a que pertence esse objeto, transformam-se com as matrizes inversas das matrizes de transformação da base, de forma que todos os objetos geométricos permanecem inalterados sob transformações de coordenadas. O uso de coordenadas é operacional e o formalismo apresentado permite a escolha de bases mais adequadas a um problema específico.

Nossos objetivos principais são a discussão do cálculo exterior diferencial, a obtenção das equações de estrutura de Cartan e o tratamento de grupos de isometrias.

As referências (6) a (10) constituíram fontes principais desse capítulo e são indicadas para detalhamento dos conceitos abordados.

1.2 - VARIEDADE DIFERENCIÁVEL

Um conjunto de pontos  $M$  constitui uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  se os seguintes axiomas são satisfeitos:

I) Existe uma coleção enumerável de subconjuntos  $U_k \subset M$  que cobre  $M$

$$M = \bigcup_k U_k$$

II) Existe uma coleção  $\phi$ , de aplicações biunívocas  $\phi_k$ , do correspondente  $U_k$ , em um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\phi_k \in \phi$ ,  $U_k \subset M$  e  $D^n \subset \mathbb{R}^n$

$$\phi_k: U_k \rightarrow D^n$$

III) Se  $U_k \cap U_m \neq \emptyset$  é um conjunto não vazio, as aplicações  $\phi_k$  e  $\phi_m$  levam  $U_k \cap U_m$  em diferentes abertos de  $\mathbb{R}^n$ . As aplicações  $g_k^m = \phi_k \circ \phi_m^{-1}$  e  $g_m^k = \phi_m \circ \phi_k^{-1}$  são aplicações de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ , contínuas e diferenciáveis.

A cada par  $(\phi_k, U_k)$  denominamos de uma carta em  $M$  e a coleção de tais cartas, que cobre  $M$ , forma um atlas em  $M$ . A figura 1.2.1 ilustra os axiomas acima.

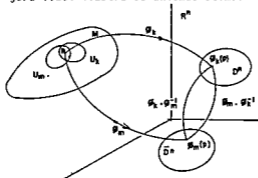


Fig. 1.2.1 - Cada aplicação  $\phi_k$  leva  $p \in U_k$  em uma  $n$ -upla de  $\mathbb{R}^n$ . Na intersecção de du as vizinhanças de coordenadas as aplicações  $\phi_k \circ \phi_m^{-1}$  relacionam as diferentes coordenadas de  $p \in U_k \cap U_m$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Pelo axioma II cada carta define um sistema de coordenadas nas vizinhanças de cada ponto  $p \in M$ , no sentido de que a cada ponto  $p \in U_k$ , é associado um ponto  $\phi_k(p) = (x^1, \dots, x^n)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Cada  $U_k$  é então denominado vizinhança de coordenadas de  $p$ . Como as funções coordenadas são definidas por aplicações de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^1$

$$u^j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$$

$$u^j(x^1, \dots, x^n) = x^j$$

temos

$$x^j: U_k \rightarrow \mathbb{R}^1$$

$$x^j(p) = u^{jk} \cdot \phi_k(p) \quad p \in U_k \quad (1.2.1)$$

Dessa forma, as  $n$  aplicações compostas descritas na eq. (1), definem as funções coordenadas locais, ou coordenadas admissíveis em  $U_k \in M$ , que denotaremos por  $\{x^j\}$ . A fig. 1.2.2 ilustra as aplicações acima.

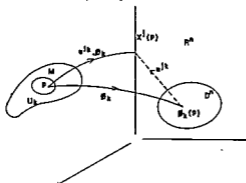


Fig. 1.2.2 - Cada coordenada é uma aplicação de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^1$ , e para cada  $p \in M$  as aplicações  $u^{jk} \cdot \phi_k(p)$  definem a  $j$ -ésima coordenada de  $p$ .

O axioma III permite definir transformações de coordenadas em  $M$ . Sejam  $(\phi_k, U_k)$  e  $(\phi_m, U_m)$  duas cartas do atlas de  $M$ , com coordenadas admissíveis denotadas por  $\{x^j\}$  e  $\{\bar{x}^j\}$  respectivamente. Da eq. (1) e pelo axioma III:

$$\begin{aligned} x^i(p) &= (u^{ik} \cdot \phi_k)(p) = \left[ u^{ik} \cdot (g_m^k \cdot \phi_m) \right](p) = (f^{im} \cdot \phi_m)(p) = f^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \\ \bar{x}^i(p) &= (u^{im} \cdot \phi_m)(p) = \left[ u^{im} \cdot (g_m^k \cdot \phi_k) \right](p) = (\bar{f}^{ik} \cdot \phi_k)(p) = \bar{f}^i(x^1, \dots, x^n) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

onde  $f^{im} = u^{ik} \cdot g_m^k$  e  $\bar{f}^{ik} = u^{im} \cdot g_m^k$ .

### 1.3 - ESPAÇOS TANGENTES E SEUS ESPAÇOS DUAIS

Uma curva em uma variedade  $M$  é uma aplicação diferenciável de um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^1$  na variedade  $M$ :

$$\alpha: I \rightarrow M \quad I \subset \mathbb{R}^1$$

$$\alpha: \lambda \in I \rightarrow \alpha(\lambda) \in M$$

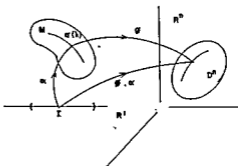
ou, num sistema de coordenadas admissível em  $M$

$$\phi[\alpha(\lambda)] = \{x^1(\lambda), \dots, x^n(\lambda)\}, \quad (1.3.1)$$

como ilustra a figura 1.3.1<sup>(\*)</sup>.

Fig. 1.3.1 - Uma curva  $\alpha(\lambda)$  em  $M$  é um mapeamento diferenciável de um aberto de  $\mathbb{R}^1$  em  $M$ .

Introduzimos em  $M$  o conceito de vetor tangente a uma curva de  $M$ . Seja  $F$  o con-



<sup>(\*)</sup> A aplicação é diferenciável se a composta  $u^j(\phi \circ \alpha): \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^1$ .

junto das funções reais, diferenciáveis em  $M$ . A derivada direcional, ao longo de uma curva em  $M$ , de uma função  $f \in F$ , no ponto  $p_0 = \alpha(\lambda_0)$ , é uma aplicação linear sobre os reais

$$D_{p_0} : F \rightarrow \mathbb{R}^1$$

$$D_{p_0} [f] = \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} = \left. \frac{dx^i}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{p_0} = X^i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{p_0} \quad (1.3.2)$$

O operador sobre funções reais  $D_p = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  sugere a seguinte definição: "um vetor tangente a um ponto de uma variedade  $M$  é um operador da forma  $L = L^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , sobre as funções reais diferenciáveis em  $M$ , onde os  $L^i$  são quaisquer constantes reais" (6).

Portanto, uma aplicação qualquer  $L : F \rightarrow \mathbb{R}^1$  é um vetor tangente a um ponto de  $M$ , se e somente se:

$$I) L[af+bg] = a[f] + bL[g] \quad (1.3.3)$$

$$II) L[fq] = (L[f])g(p_0) + f(p_0)(L[g]) \quad (1.3.4)$$

Para que o conjunto de vetores tangentes em um ponto  $p_0 \in M$  tenha estrutura de espaço vetorial sobre os reais, definimos a combinação linear de dois vetores tangentes por

$$(aL_1 + bL_2)[f] = aL_1[f] + bL_2[f] \quad (1.3.5)$$

Tal espaço vetorial é denominado espaço tangente, sendo denotado por  $T_{p_0}$ . A união de todos os espaços tangentes em  $M$ , isto é, a coleção de todos os vetores tangentes em cada pon-



to  $p \in M$ , forma o fibrado tangente, denotado por  $T_M$ . Um campo vetorial  $\bar{c}$  é uma aplicação  $V:M \rightarrow T_M$ , isto é, uma coleção de vetores tangentes, um em cada ponto de  $M$ .

Em particular, das eqs. (3) e (4), segue-se que, se  $c$  é qualquer função constante:

$$L[c] = 0 \quad (1.3.6)$$

Pode-se mostrar que, num sistema de coordenadas admissível  $\{x^i\}$ , os vetores  $\{\partial/\partial x^i\}$  geram os elementos de  $T_p$  e constituem uma base, denominada base de coordenadas, para o espaço tangente  $(\underline{6})(*)$ . Dessa forma, todo  $L \in T_p$  pode ser expresso na forma

$$L = L^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad L^i = L[x^i] \quad (1.3.7)$$

e o espaço tangente tem a mesma dimensão que a variedade  $M$ .

Sob transformação das coordenadas locais,  $\{x^i\} \rightarrow \{\bar{x}^i\}$ , a base de coordenadas associada transforma-se com o inverso da matriz jacobiana da transformação de coordenadas, o que justifica o nome de vetores contravariantes dado aos elementos de  $T_p$   $(\underline{7})$ .

Seja  $V$  um espaço vetorial arbitrário sobre os reais. Uma forma linear  $\omega$  sobre  $V$  é um mapeamento  $\omega:V \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que para todo  $L_1, L_2 \in V$  e  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\omega(aL_1 + bL_2) = a\omega(L_1) + b\omega(L_2) \in \mathbb{R} \quad (1.3.8)$$

Denotamos o conjunto de todas as formas lineares sobre  $V$  por  $V^*$ , e definimos a adição e multiplicação por escala -

(\*) Também denominada base natural, base local ou base canônica.

lares em  $V^*$  por:

$$(a\omega_1 + b\omega_2)(L) = a\omega_1(L) + b\omega_2(L) \quad (1.3.9)$$

onde  $\omega_1, \omega_2 \in V^*$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Com essa definição  $V^*$  é um espaço vetorial sobre os reais, denominado espaço dual de  $V$ . Similarmente, podemos considerar  $L \in V$  como forma linear sobre  $\omega \in V^*$ , isto é,  $L \in (V^*)^* = V$ , o espaço dual de  $V^*$ .

Se  $\{e_i\}$  é base para  $V$  e  $L = L^j e_j \in V$ , o mapeamento  $L \rightarrow L^j$  é uma forma linear sobre  $V$ , e define o elemento  $e^j \in V^*$  tal que

$$e^j(L) = L^j \longrightarrow L = e^j(L)e_j \quad (1.3.10)$$

Particularmente, se  $L = e_i$

$$e^j(e_i) = \delta^j_i \quad (1.3.11)$$

e os  $\{e^j\}$  assim definidos formam uma base para  $V^*$ , denominada base dual, unicamente determinada pela eq. (11).

Portanto todo  $\omega \in V^*$  pode ser escrito na forma  $\omega = \omega_j e^j$  e valem as relações

$$\omega(e_i) = \omega_i \longrightarrow \omega = \omega(e_i)e^i \quad (1.3.12)$$

Considerando  $V$  como espaço das formas lineares sobre  $V^*$ , o mapeamento  $\omega \rightarrow \omega_i$  define o elemento  $e_i$  de  $V$  tal que

$$e_i(\omega) = \omega_i \longrightarrow \omega = e_i(\omega)e^i \quad (1.3.13)$$

Particularmente, se  $f \in F$  e  $L \in T_p$ , a aplicação  $L: F \rightarrow \mathbb{R}^1$  é uma forma linear sobre  $T_p$  que define o elemento

df  $\in T_p^*$ , denominado diferencial em  $p \in M$ , pois

$$df(L) = L[f] \quad (1.3.14)$$

As coordenadas  $x^i$  são funções de valores reais em  $M$ , e portanto verifica-se que os elementos  $dx^i$  formam uma base para  $T_p^*$ , pois das eqs. (11) e (14)

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} [x^i] = \delta^i_j$$

e qualquer  $\omega \in T_p^*$  pode ser escrito na forma  $\omega = \omega_j dx^j$ .

Sob transformação das coordenadas locais,  $\{x^i\} \rightarrow \{\bar{x}^i\}$ , a base  $\{dx^i\}$  transforma-se com a matriz jacobiana da transformação de coordenadas, o que sugere o nome de vetores covariantes aos elementos de  $T_p^*$ .

A contração usual de vetores covariantes e contravarij antes é diretamente obtida em

$$\omega(L) = \omega_j e^j(L) = \omega_j L^j \quad (1.3.15)$$

#### 1.4 - TENSORES E FORMAS DIFERENCIAIS

Um elemento  $\omega \in T_p^*$  define uma função real  $\omega(L)$  sobre  $L \in T_p$ , que é bilinear no sentido de ser linear em  $L$  para  $\omega$  fixo e linear em  $\omega$  para  $L$  fixo, como mostram as eqs. (3.8) e (3.9). Consideremos o espaço tangente em um ponto  $p \in M$  e o produto cartesiano de ordem  $r$   $\prod_{m=1}^r T_{p(m)} = T_{p(1)} \times \dots \times T_{p(r)}$ , isto é, o conjunto ordenado de  $r$  vetores  $L^{(j)} \in T_{p(j)}$ ,  $(L^{(1)}, \dots, L^{(r)})$ . O mapeamento  $f: \prod_{m=1}^r T_{p(m)} \rightarrow \mathbb{R}$  é multilinear ( $r$ -linear) se  $f(L^{(1)}, \dots, L^{(r)})$

$\dots, L_{(1)}, \dots, L_{(r)}$  é linear em qualquer um de seus argumentos en quanto os  $(r-1)$  restantes são fixos, isto é:

$$f(L_{(1)}, \dots, aL_{(i)} + bL'_{(i)}, \dots, L_{(r)}) = \\ = af(L_{(1)}, \dots, L_{(i)}, \dots, L_{(r)}) + bf(L_{(1)}, \dots, L'_{(i)}, \dots, L_{(r)}) \quad (1.4.1)$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $L_{(i)}, L'_{(i)} \in T_p$ .

Um tensor covariante de ordem  $r$  é definido como uma forma  $r$ -linear sobre  $\prod_{m=1}^r T_{p(m)}$ . Um tensor contravariante de ordem  $s$  é definido como uma forma  $s$ -linear sobre  $\prod_{m=1}^s T_{p(m)}^*$  e o tensor misto,  $s$ -contravariante,  $r$ -covariante, é uma função multilinear sobre  $\prod_{m=1}^r T_{p(m)} \prod_{m=1}^s T_{p(m)}^*$ , denominado tensor tipo  $(s,r)$  sobre  $T_p$ .

O conjunto de todos os tensores tipo  $(s,r)$ , denotado por  $I_{r, s}^s(T_p)$ , tem naturalmente a estrutura de espaço vetorial se definimos

$$(aT + bS)(L_{(1)}, \dots, L_{(r)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(s)}) = \\ = aT(L_{(1)}, \dots, L_{(r)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(s)}) + \\ + bS(L_{(1)}, \dots, L_{(r)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(s)}) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1.4.2)$$

e portanto a soma de dois tensores tipo  $(s,r)$  e seu produto por um escalar, é um tensor tipo  $(s,r)$ .

Se  $T \in I_{r_1, s_1}^{s_1}$  e  $S \in I_{r_2, s_2}^{s_2}$ , seu produto tensorial, de notado por  $T \otimes S$ , é um tensor tipo  $(s_1+s_2, r_1+r_2)$  definido por

$$T \otimes S(L_{(1)}, \dots, L_{(r_2)}, L_{(r_1+1)}, \dots, L_{(r_1+r_2)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(s_1)}, \omega^{(s_1+1)}, \dots, \omega^{(s_1+s_2)}) =$$

$$= T(L_{(1)}, \dots, L_{(r_1)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(s_1)}) S(L_{(r_1+1)}, \dots, L_{(r_1+r_2)}, \omega^{(s_1+1)}, \dots, \omega^{(s_1+s_2)}) \quad (1.4.3)$$

O produto tensorial é associativo, não comutativo, e define o mapeamento  $I_{r_1}^{s_1} \times I_{r_2}^{s_2} \rightarrow I_{r_1+r_2}^{s_1+s_2}$ .

Particularmente, tomando  $\{e_{j(k)}\}$  e  $\{e^{i(m)}\}$  como bases para  $T_{P(k)}$  e  $T_{P(m)}^*$  respectivamente, e usando as eqs. (3.10), (3.13), (1) e (3), podemos escrever:

$$\begin{aligned} T(L_{(1)}, \dots, L_{(r)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(s)}) &= \\ &= L^{j(1)} \dots L^{j(r)} \omega_{i(1)}^{j(1)} \dots \omega_{i(s)}^{j(s)} T(e_{j(1)}, \dots, e_{j(r)}, e^{i(1)}, \dots, e^{i(s)}) = \\ &= e^{j(1)}(L_{(1)}) \dots e^{j(r)}(L_{(r)}) e_{i(1)}^{j(1)}(\omega^{(1)}) \dots e_{i(s)}^{j(s)}(\omega^{(s)}) T(e_{j(1)}, \dots, e_{j(r)}, e^{i(1)}, \\ &\quad \dots, e^{i(s)}) = \\ &= T^{i(1) \dots i(s)}_{j(1) \dots j(r)} e^{j(1)} \otimes \dots \otimes e^{j(r)} \otimes e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(s)}. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

As quantidades

$$T^{i(1) \dots i(s)}_{j(1) \dots j(r)} = T(e_{j(1)}, \dots, e_{j(r)}, e^{i(1)}, \dots, e^{i(s)}) \quad (1.4.5)$$

definem as componentes do tensor relativamente à base  $\{e_j\}$  e sua base dual  $\{e^i\}$ . Os  $n^{r+s}$  elementos

$$e^{j(s)} \otimes \dots \otimes e^{j(r)} \otimes e_{i(s)} \otimes \dots \otimes e_{i(r)}$$

são base para  $I_r^s(T_P)$ .

A contração de um tensor tipo  $(s,r)$  nos primeiros  $\bar{n}$  índices covariante e contravariante é definida como o tensor  $C_1^1(T)$ , tipo  $(s-1,r-1)$ , cujas componentes relativamente às bases  $\{e_j^{(k)}\}$  e  $\{e^{i(m)}\}$  são  $T^{i(1)i(2)\dots i(s)}_{j(1)j(2)\dots j(r)}$ , isto é:

$$C_1^1 = T^{i(1)i(2)\dots i(s)}_{j(1)j(2)\dots j(r)} e^{j(2)} \otimes \dots \otimes e^{j(r)} \otimes e_{i(2)} \otimes \dots \otimes e_{i(s)} \quad (1.4.6)$$

Um campo tensorial tipo  $(s,r)$ , definido em  $A \subset M$ , é uma coleção de tensores, um em cada ponto  $p \in A$ . A união de todos os  $I_r^s(T_p)$  obtidos fazendo-se  $p$  variar em  $M$ , mantendo-se  $s$  e  $r$  fixos, forma o fibrado tensorial de tensores  $(s,r)$  sobre  $M$ , denotado por  $I_r^s(M)$ . Um campo tensorial é portanto uma aplicação  $T:A \rightarrow I_r^s(M)$ .

Uma classe de campos tensoriais particularmente importantes são os campos tensoriais totalmente antissimétricos, tipo  $(0,r)$ . Um tensor tipo  $(0,r)$  é antissimétrico ou alternado se:

$$T(L_{(1)}, \dots, L_{(i)}, \dots, L_{(j)}, \dots, L_{(r)}) = -T(L_{(1)}, \dots, L_{(j)}, \dots, L_{(i)}, \dots, L_{(r)}) \quad (1.4.7)$$

onde  $1 \leq j, i \leq r$ .

Um tensor covariante antissimétrico é denominado forma exterior. Um campo tensorial tipo  $(0,r)$  é antissimétrico se satisfaz à eq. (7) em cada ponto  $p \in M$  e é denominado forma exterior de ordem  $r$ , ou simplesmente,  $r$ -forma.

Se  $T_1$  e  $T_2$  são antissimétricos, a combinação linear

(a T<sub>1</sub> + b T<sub>2</sub>) também é um tensor antissimétrico e o conjunto das formas exteriores é um sub-espço de I<sub>r</sub><sup>0</sup>(T<sub>p</sub>) que denotaremos por  $\Lambda^r(T_p)$ .

Define-se um "operador de alternção" A, sobre I<sub>r</sub><sup>0</sup>(T<sub>p</sub>), tal que:

$$A: I_r^0(T_p) \rightarrow \Lambda^r(T_p) \tag{1.4.8}$$

$$AT(L_1, \dots, L_r) = \frac{1}{r!} \sum_{(j_1, \dots, j_r)} \text{sgn}(j_1, \dots, j_r) T(L_{j_1}, \dots, L_{j_r})$$

onde a soma se faz sobre todas as possíveis permutações (j<sub>1</sub>, ..., j<sub>r</sub>) e sgn(j<sub>1</sub>, ..., j<sub>r</sub>) = ±1 conforme (j<sub>1</sub>, ..., j<sub>r</sub>) seja permutação par ou ímpar dos r argumentos de T. O operador A associa a cada T ∈ I<sub>r</sub><sup>0</sup>(T<sub>p</sub>) sua parte antissimétrica e pode-se mostrar que <sup>(8)</sup>:

$$a) A \text{ é um projetor: } A^2 = A \tag{1.4.9}$$

$$b) T \text{ é antissimétrico se } T = AT \tag{1.4.10}$$

Se T ∈  $\Lambda^r(T_p)$  e S ∈  $\Lambda^s(T_p)$ , seu produto exterior é definido como

$$T \wedge S = A(T \otimes S) \tag{1.4.11}$$

que é um produto associativo e distributivo <sup>(8)</sup>.

Usando as eqs. (11), (8) e (3) verifica-se que

$$T \wedge S = (-1)^{rs} S \wedge T \tag{1.4.12}$$

Particularmente, se T, S ∈  $\Lambda^1(T_p)$

$$T \wedge S = -S \wedge T \implies T \wedge T = 0 \tag{1.4.13}$$

Usando as eqs. (10), (4) e (11), temos

$$T = T_{j(1)\dots j(r)} e^{j(1)} \wedge \dots \wedge e^{j(r)} \quad (1.4.14)$$

onde  $j(1) < j(2) < \dots < j(r) < \dim M$ , e os  $\binom{n}{r}$  elementos  $e^{j(1)} \wedge \dots \wedge e^{j(s)}$  são base para  $\Lambda^r(T_p)$ .

O cálculo diferencial de r-formas é baseado no conceito de derivada exterior, que é definida como um mapeamento

$$d: \Lambda^r(T_p) \rightarrow \Lambda^{r+1}(T_p)$$

expresso na base de coordenadas pela (r+1)-forma

$$\begin{aligned} dT &= \frac{\partial T_{j(1)\dots j(r)}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j(1)} \wedge \dots \wedge dx^{j(r)} = \\ &= d(T_{j(1)\dots j(s)}) \wedge dx^{j(1)} \wedge \dots \wedge dx^{j(r)} \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Seguem-se as seguintes propriedades da derivada exterior:

(a) Se  $a, b \in \mathbb{R}$

$$d(aT + bS) = adT + bdS \quad (1.4.16)$$

e portanto a derivada exterior é uma operação linear.

(b) Se  $f$  é uma 0-forma, isto é, uma função diferenciável em  $M$ , a 1-forma  $df$  é definida por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (1.4.17)$$

e da eq. (15), segue-se que, se  $T$  é uma r-forma

$$d(fT) = df \wedge T + fdT \quad (1.4.18)$$

(c) Da eq. (15) e da comutatividade da derivada usual



$$d^2T = d(dT) = 0 \quad (1.4.19)$$

(d) Se  $T \in \Lambda^r(T_p)$  e  $S \in \Lambda^s(T_p)$

$$d(T \wedge S) = dT \wedge S + (-1)^r T \wedge dS \quad (1.4.20)$$

### 1.5 - DERIVADA DE LIE

Consideremos o aberto  $U \subset M$ , com coordenadas admissíveis  $\{x^i\}$ , e uma transformação que leva  $p \in U$  em  $q \in U$ . Na vizinhança de  $p$  a transformação é descrita como função das coordenadas locais

$$x_q^i = f^i(x_p) \quad (1.5.1)$$

e essa expressão descreve uma transformação de ponto, no sentido de que, no mesmo sistema de coordenadas, as coordenadas do ponto terminal são descritas como funções das coordenadas do ponto inicial.

Seja uma curva  $\Gamma$  em  $M$ , determinada pelo seu campo vetorial tangente  $X = X^i \partial_i$ . Uma transformação infinitesimal de  $p$  a  $q$  tem a forma

$$x_q^i = f^i(x_p) = x_p^i + \epsilon X^i(x_p) = (1 + \epsilon X) [x_p^i] \quad (1.5.2)$$

onde  $\epsilon$  é suposto suficientemente pequeno ( $\epsilon^2 \ll \epsilon$ ) para que as transformações via eq. (1) se realizem na mesma vizinhança de coordenadas  $U$ .

A eq. (1) também pode ser vista como uma transformação de coordenadas e nesse caso, a matriz jacobiana  $(\partial x_q^i / \partial x_p^j)$  e sua inversa, prestam-se como mecanismo para descrever o transpor

te inalterado de um objeto geométrico  $\Omega(p)$ , com qualquer estrutura de Índices, de um ponto a outro.

Seja  $\bar{\Omega}(q) = \Omega(p)$  o objeto geométrico transportado inalteradamente de  $p$  a  $q$ , e  $\Omega(q)$  o mesmo objeto em  $q$ . Definimos a diferença de Lie, com relação à transformação de ponto, por  $\Delta = \Omega(q) - \bar{\Omega}(q)$ . Se a transformação é infinitesimal, a derivada de Lie do objeto geométrico  $\Omega(x)$ , com relação ao campo vetorial  $X$ , é definida por

$$\mathcal{L}_X \Omega \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega(q) - \bar{\Omega}(q)}{\epsilon} \quad (1.5.3)$$

que é, por construção, uma medida da deformação sofrida por um objeto geométrico quando transportado de um ponto a outro ao longo da curva determinada por um dado campo vetorial (11).

Se  $\Omega$  é uma função em  $M$ ,  $\bar{\Omega}(q) = f(q)$  e em primeira ordem em  $\epsilon$ ,  $f(q) = f(p) + \epsilon X^i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{x_p}$ . Usando (3), a derivada de Lie de uma função reproduz a eq. (3.2), pois  $\mathcal{L}_X f = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X[f]$ .

Seja um campo vetorial contravariante  $Y = Y^i(x) \partial_i$ . Nesse caso

$$Y^i(x_q) = Y^j(x_p) \frac{\partial x_q^i}{\partial x_p^j} = Y^i(x_p) + \epsilon Y^j(x_p) X^i(x_p) / j$$

$$Y^i(x_q) = Y^i(x_p) + \epsilon X^j Y^i(x_p) / j$$

onde consideramos termos até primeira ordem em  $\epsilon$  na segunda expressão e  $X^i / j = \partial X^i / \partial x^j$ . Usando (3) temos

$$\left[ \mathcal{L}_X Y \right]^i = X^j Y^i / j - Y^j X^i / j .$$

. Alternativamente, se  $X$  e  $Y$  são dois campos vetori-

ais contravariantes e  $XY [f]$  é sua composição sobre um campo escalar de classe  $C^2$  em  $M$ , a derivada de Lie de um campo vetorial  $Y$  em relação ao campo vetorial  $X$  pode ser definida por:

$$\mathcal{L}_X Y \equiv [X, Y] \equiv XY - YX \quad (1.5.5)$$

O comutador  $[X, Y]$  é um campo vetorial em  $M$ , pois satisfaz às eqs. (3.3) e (3.4), é bilinear, e tem as seguintes propriedades:

$$(a) \quad [X, Y] = - [Y, X] \quad (1.5.6)$$

$$(b) \quad [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \quad (1.5.7)$$

Numa base genérica  $\{e_j\}$ , o comutador de dois vetores de base pode ser expresso na forma

$$\mathcal{L}_{e_j} e_h = [e_j, e_h] = C^m_{jh} e_m \quad (1.5.8)$$

onde as funções  $C^m_{jh}$  são denominadas coeficientes de estrutura da base  $\{e_j\}$ . As eqs. (6) e (7) impõem as únicas condições que essas funções devem satisfazer:

$$C^m_{jh} = - C^m_{hj} \quad (1.5.9)$$

$$e_m [C^r_{jh}] + e_h [C^r_{mj}] + e_j [C^r_{hm}] - [C^s_{mj} C^r_{hs} + C^s_{hm} C^r_{js} + C^s_{jh} C^r_{ms}] = 0 \quad (1.5.10)$$

Usando (8), podemos expandir (5) numa base genérica

$$\mathcal{L}_X Y = \left[ X^h e_h \left[ Y^j \right] - Y^h e_h \left[ X^j \right] + X^k Y^h C_{kh}^j \right] e_j$$

Numa base de coordenadas  $C_{jh}^m = 0$  e a última equação reproduz a eq. (4).

Para que a derivada de Lie tenha a propriedade de preservar o tipo tensorial, define-se a derivada de Lie de 1-formas como o elemento  $(\mathcal{L}_X \omega) \in I_1^0$ , tal que:

$$\left( \mathcal{L}_X \omega \right) (Y) = \mathcal{L}_X \left[ \omega(Y) \right] - \omega \left( \mathcal{L}_X Y \right) \quad (1.5.11)$$

Particularmente, numa base de coordenadas a eq. (11) toma a forma

$$\left( \mathcal{L}_X \omega \right)_j = X^m \omega_{j/m} + \omega_m X^m /_j \quad (1.5.12)$$

O mesmo objetivo sugere a definição da derivada de Lie de um campo tensorial  $T$ , tipo  $(r,s)$ , como o elemento  $(\mathcal{L}_X T) \in I_s^r(M)$ , tal que

$$\begin{aligned} \left( \mathcal{L}_X T \right) \left( Y_{(1)}, \dots, Y_{(s)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(r)} \right) &= \\ &= \mathcal{L}_X \left[ T \left( Y_{(1)}, \dots, Y_{(s)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(r)} \right) \right] - \\ &- T \left( \mathcal{L}_X Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(1)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(r)} \right) - \\ &- \dots - T \left( Y_{(1)}, \dots, Y_{(s)}, \omega^{(1)}, \dots, \mathcal{L}_X \omega^{(s)} \right) \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

onde  $Y_{(1)}, \dots, Y_{(s)} \in I_0^1(M)$  e  $\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(r)} \in I_1^0(M)$ .

Na base de coordenadas, usando  $\mathcal{L}_X \partial_m = -X^h /_m \partial_h$  e  $\mathcal{L}_X dx^m =$

$= X^m /_h dx^h$ , temos, por exemplo, para um tensor tipo (1,2):

$$\left( \begin{matrix} L \\ X \end{matrix} \right)_{ji}^h = X^k T^h_{ji/k} - T^k_{ji} X^h /_k + T^h_{ki} X^k /_j + T^h_{jk} X^k /_i \quad (1.5.14)$$

A derivada exterior de r-formas pode ser relacionada à sua derivada de Lie. Consideremos o caso particular de uma 1-forma. Usando a eq. (11) e particularizando para a base de coordenadas, temos:

$$\begin{aligned} \left( \begin{matrix} L \\ X \end{matrix} \omega \right)(Y) - Y[\omega(X)] &= X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega \left( \begin{matrix} L \\ X \end{matrix} Y \right) = \\ &= \left( \omega_j /_h - \omega_{h/j} \right) X^h Y^j = 2 d\omega(X, Y) \end{aligned}$$

e portanto

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2} \left\{ X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega \left( \begin{matrix} L \\ X \end{matrix} Y \right) \right\} \quad (1.5.15)$$

A 2-forma  $de^j$  é de particular interesse. Nesse caso

$$de^j = de^j(e_k, e_l) e^k \wedge e^l = -\frac{1}{2} C^j_{kl} e^k \wedge e^l \quad (1.5.16)$$

## 1.6 - DERIVADA COVARIANTE E EQUAÇÕES DE ESTRUTURA DE CARTAN

Uma conexão  $\nabla$  em um ponto  $p \in M$  associa a cada campo vetorial  $X$ , um operador diferencial que leva um campo vetorial arbitrário  $Y$  em outro campo vetorial  $\nabla_X Y$ , denominado derivada covariante de  $Y$  na direção de  $X$  no ponto  $p$ , tal que:

$$(a) \quad \nabla_{fX+gZ} Y = f \nabla_X Y + g \nabla_Z Y \quad (1.6.1)$$

Ainda das eqs. (1) e (2) segue-se que:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= X [Y^j] e_j + Y^j (\nabla_X e_j) = \\ &= [X e^j(Y) + \omega^j_h(X) e^h(Y)] e_j = \\ &= [X e^j(Y) + \omega^j_h \otimes e^h(X, Y)] e_j \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Particularmente se  $X = \partial_x$ , a  $j$ -ésima componente de  $\nabla_{\partial_x} Y$  é:

$$(\nabla_{\partial_x} Y)^j = Y^j_{/x} + \Gamma^j_{hx} Y^h = Y^j_{/x}$$

que é a definição usual de derivada covariante<sup>(\*)</sup>

Supomos no que se segue, que a variedade  $\tilde{e}$  munida de uma conexão e definimos o vetor

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (1.6.7)$$

Das eqs. (1) e (2) seguem-se as propriedades

$$T(X, Y) = -T(Y, X) \quad (1.6.8)$$

$$T(fX, Y) = fT(X, Y)$$

O mapeamento  $(X, Y, \omega) \rightarrow \omega(T(X, Y))$  é função multilinear sobre  $T_p \times T_p \times T_p^*$  em cada ponto e define, portanto, um tensor tipo (1,2) denominado tensor de torção.

Na base genérica  $(e_j)$  e sua base dual, usando as eqs.

---

(\*) No que se segue a dupla barra indica a derivada covariante na direção de um vetor da base de coordenadas.

(6), (5.15) e (4.11), as componentes do vetor  $T(X,Y)$  são

$$\begin{aligned} T^j(X,Y) &= 2 de^j(X,Y) + 2A \left[ \omega^j_h \otimes e^h(X,Y) \right] = \\ &= 2 \left[ de^j + \omega^j_h \wedge e^h \right] (X,Y) \end{aligned}$$

Temos então a primeira equação de estrutura de Cartan

$$\frac{1}{2} T^j = de^j + \omega^j_h \wedge e^h \quad (1.6.9)$$

Explicitamente, as componentes do tensor de torção são

$$T^j_{hm} = e^j \left( T(e_h, e_m) \right) = \Gamma^j_{mh} - \Gamma^j_{hm} - C^j_{hm} \quad (1.6.10)$$

Restringimos nosso estudo a variedades sem torção. Nesse caso a primeira equação de estrutura de Cartan, eq. (9), toma a forma

$$de^j = - \omega^j_h \wedge e^h \quad (1.6.11)$$

Usando as eqs. (4) e (5.16), podemos escrever a eq. (11) nas formas

$$de^j = \Gamma^j_{hm} e^h \wedge e^m \quad (1.6.12)$$

$$de^j = - \frac{1}{2} C^j_{hm} e^h \wedge e^m \quad (1.6.13)$$

A eq. (7) estabelece a relação entre derivadas covariantes e derivadas de Lie, na forma:

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (1.6.14)$$

A eq. (10) permite escrever

$$C^j_{hm} = \Gamma^i_{mh} - \Gamma^j_{hm} \quad (1.6.15)$$

e portanto, numa base de coordenadas, as conexões são simétricas em seus índices inferiores.

Define-se o operador sobre campos vetoriais

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \quad (1.6.16)$$

e usando as eqs. (1) e (2), juntamente com  $\nabla_{[X,Y]} = f[X,Y] - Y[f]X$ , encontramos as propriedades

$$R(X,Y) = -R(Y,X) \quad (1.6.17)$$

$$R(fX,Y)[gZ] = fg R(X,Y)[Z]$$

onde  $X, Y, Z$  são campos vetoriais e  $f, g$  escalares.

O mapeamento  $(X, Y, Z, \omega) \rightarrow \omega(R(X, Y)[Z])$  é uma forma multilinear sobre  $T_p \times T_p \times T_p \times T_p^*$  em cada ponto e define um tensor tipo (1,3), denominado tensor de curvatura.

Usando as eqs. (6), (3), (5.15) e (4.11) pode-se mostrar que

$$\frac{1}{2} R(X, Y)[Z] = \left[ d\omega_h^m + \omega_j^m \wedge \omega_h^j \right] (X, Y) e^h(Z) e_m = \Omega_h^m(X, Y) e^h(Z) e_m \quad (1.6.18)$$

que implica na segunda equação de estrutura de Cartan

$$\Omega_h^m = d\omega_h^m + \omega_j^m \wedge \omega_h^j \quad (1.6.19)$$

onde  $\Omega_h^m$  é denominada 2-forma de curvatura (9).

A eq. (18) permite estabelecer a relação entre as componentes da 2-forma de curvatura e as componentes do tensor de curvatura. Numa base arbitrária



$$\frac{1}{2} e^d (R(e_r, e_s) [e_p]) = \Omega^d_p(e_r, e_s) = \frac{1}{2} R^d_{prs}$$

e portanto

$$\Omega^d_p = \Omega^d_p(e_r, e_s) e^r \wedge e^s = \frac{1}{2} R^d_{prs} e^r \wedge e^s \quad (1.6.20)$$

As simetrias do tensor de curvatura são obtidas do formalismo geral apresentado. Para detalhes recomendamos Love - Lock, Rund e Yano (9.12).

### 1.7 - CÁLCULO COM FORMAS EM VARIEDADES RIEMANIANAS

Uma variedade riemaniana  $\tilde{e}$  é uma variedade diferenciável, sem torção, na qual está definida uma forma bilinear e simétrica  $g(X, Y) = g(Y, X)$ , sobre todo par de campos vetoriais em  $M$ , denominada métrica riemaniana, que é um campo tensorial tipo  $(0, 2)$ , pois

$$g(X, Y) = g_{ij} e^i \otimes e^j(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j \quad (1.7.1)$$

onde  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ .

A eq. (1) define um elemento de distância no sentido de que, dada uma carta e dois pontos  $p$  e  $p+dp$ , infinitesimalmente próximos, conectados pelo vetor  $X = dx^i a_i$ , o elemento de distância é definido por

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.7.2)$$

As componentes do tensor métrico são respostas tais que  $g = \det(g_{ij}) \neq 0$  e portanto existe a matriz inversa  $g^{ik}$  tal que  $g_{ij} g^{ik} = \delta_j^k$ .

Um vetor  $X$  é dito ser o equivalente contravariante do

vetor covariante  $\omega$  se  $g(X,Y) = \omega(Y)$ , para todo  $Y$ . Portanto

$$g_{ij} X^i Y^j = \omega_j Y^j \implies g_{ij} X^j = \omega_j \equiv X_j \quad (1.7.3)$$

e a relação inversa é obtida aplicando-se  $g^{kj}$

$$X^k = g^{kj} X_j \quad (1.7.4)$$

Dessa forma os índices contravariantes e covariantes são intercambiados pelas matrizes  $g_{ij}$  e  $g^{ij}$ , e as relações (3) e (4) estabelecem uma correspondência biunívoca entre  $T_p$  e  $T_p^*$  em cada ponto.

Uma conexão afim riemaniana é definida pelas eqs.(6.1), (6.2) e (6.14), com a seguinte condição adicional

$$X[g(Y,Z)] = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (1.7.5)$$

Numa base genérica, a eq. (5) toma a forma

$$\begin{aligned} e_h [g(e_i, e_j)] &= e_h [g_{ij}] = g(\nabla_{e_h} e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_{e_h} e_j) = \\ &= g_{jr} \Gamma^r_{ih} + g_{ir} \Gamma^r_{jh} = \\ &= g_{ir} \omega^r_j(e_h) + g_{jr} \omega^r_i(e_h) \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

onde usamos a eq. (6.4). Na base de coordenadas a eq. (6) expressa o fato de que é nula a derivada covariante do tensor métrico, permitindo resolver a conexão em termos dos símbolos de Christoffel de primeiro tipo.

Estaremos interessados na situação especial em que, por uma escolha adequada de campos vetoriais na eq. (1), as componentes do tensor métrico são constantes.

Nesse caso, definindo  $g_{is} \Gamma^s_{jh} \equiv \Gamma_{ijh}$ , a eq. (6) permite escrever

$$\begin{aligned} \Gamma_{jih} &= -\Gamma_{ijh} \\ \omega_{ji} &= -\omega_{ij} \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

e essas são simetrias particulares, existentes desde que se escolha uma base de campos vetoriais que tornem constantes as componentes do tensor métrico. Denominamos  $\omega_{ij}$  de 1-forma de rotação e os  $\Gamma_{jih}$  são denominados de coeficientes de rotação de Ricci. A eq. (6.15) permite determiná-los unicamente em função dos coeficientes de estrutura  $C_{jhm}$

$$\Gamma_{jhm} = -\frac{1}{2} [C_{jhm} - C_{mjh} + C_{hmj}] \quad (1.7.8)$$

A eq. (7) permite escrever

$$\omega^h_j = \Gamma^h_{j\ell} e^\ell = -\Gamma^h_{j\ell} e^\ell = -\omega^h_j \quad (1.7.9)$$

e tomando as 2-forma de curvatura da eq. (6.19), verifica-se que são antissimétricas

$$\Omega_{hj} = -\Omega_{jh} \quad (1.7.10)$$

## 1.8 - ISOMETRIAS

O conceito de derivada de Lie é utilizado na determinação das simetrias existentes na variedade. Entendemos por simetria de um objeto geométrico sua invariância sob um dado conjunto de transformações<sup>(2)</sup>. Assim, se  $\Omega$  é um objeto geométrico definido em  $M$ , com qualquer estrutura de índices,

$$L \frac{\Omega}{X} = 0 \quad (1.8.1)$$

permite, por construção, como vimos na eq. (5.3), determinar as direções em que podemos caminhar, partindo de um dado ponto, sem alterarmos esse objeto. Mais precisamente, para um dado objeto  $\Omega$ , a eq. (1) determina os campos vetoriais  $X(x)$ , geradores das transformações infinitesimais, sob as quais o objeto não é modificado. O conjunto de pontos que podem ser alcançados por transformações geradas pelas soluções da eq. (1) permite-nos construir hipersuperfícies em  $M$ , nas quais o objeto geométrico é invariante.

Uma isometria é uma transformação que mantém invariante a métrica riemanniana

$$L \frac{g}{k} = 0 \quad (1.8.2)$$

onde os campos vetoriais  $k$  são denominados vetores de Killing ou geradores infinitesimais do grupo de isometrias.

Numa base arbitrária, usando as eqs. (5.13) e (5.8) a eq. (2) torna-se:

$$k_i [g_{ij}] + g_{pj} e_i [k^p] + g_{ip} e_j [k^p] - (C_{ijl} + C_{jli}) k^l = 0$$

Na base de coordenadas, temos

$$k_{ij} + k_{ji} = 0 \quad (1.8.3)$$

que é denominada equação de Killing. Numa base qualquer

$$e_i [k_j] + e_j [k_i] + (\Gamma_{ijl} + \Gamma_{jli}) k^l = 0 \quad (1.8.4)$$

onde  $e_i [k_j] = e_i^\alpha k_{j/\alpha}$ .

Note-se que se  $k_1$  e  $k_2$  são duas soluções das equa -

ções de Killing, sua combinação linear  $(ak_1 + bk_2)$  também é solução, se  $a$  e  $b$  são constantes. Portanto, o conjunto das soluções das equações de Killing formam um espaço vetorial linear.

Se obtemos  $p$  soluções linearmente independentes das equações de Killing, um gerador de isometrias tem forma geral

$$k = a^i k_i = a^i k_i^\alpha e_\alpha \quad \alpha = 1, \dots, n \quad (1.8.5)$$

$$i = 1, \dots, p$$

isto é, combinação linear a  $p$  parâmetros reais  $a^i$ , dos vetores de base do espaço vetorial das equações de Killing. As  $p$ -uplas  $\{a_1, \dots, a_p\}$  são vetores de  $R^p$ , denominado espaço paramétrico do grupo de transformações.

Consideremos duas transformações infinitesimais sucessivas de um ponto  $p$ , com coordenadas  $\{x^i\}$ , de geradores  $k_1 = a_1^i k_i$  e  $k_2 = a_2^j k_j$ , aplicadas em diferente ordem, conforme sugere a Fig. 1.8.1.

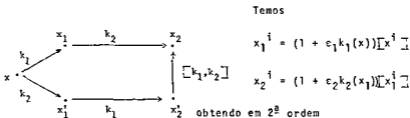


Fig. 1.8.1

$$x_2^i = x^i + \epsilon_1 k_1^i(x) + \epsilon_2 k_2^i(x) + \epsilon_1 \epsilon_2 k_1^j(x) k_2^i / j(x)$$

Invertendo a ordem das transformações, temos:

$$x_1^i = (1 + \epsilon_2 k_2(x)) [x^i]$$

$$x_2^i = (1 + \epsilon_1 k_1(x_1^i)) [x_1^i]$$

obtendo em 2ª ordem:

$$x_2^i = x^i + \epsilon_1 k_1^i(x) + \epsilon_2 k_2^i(x) + \epsilon_1 \epsilon_2 k_2^j(x) k_{1/j}^i(x)$$

A diferença  $x_2^i - x_2^{i'}$  é dada por, usando a eq. (5.4)

$$x_2^i - x_2^{i'} = \epsilon_1 \epsilon_2 (k_1^j k_{2/j}^i - k_2^j k_{1/j}^i) = \epsilon_1 \epsilon_2 [k_1, k_2]^j [x^i]$$

e portanto o comutador de dois geradores de transformações infinitesimais mede a não comutatividade do grupo de transformações e é o gerador que leva  $x_2^i$  diretamente em  $x_2^j$ .

Se  $k_1$  e  $k_2$  são dois vetores de Killing, seu comutador também é um vetor de Killing, como mostraremos a seguir.

Da definição de operador de curvatura, eq. (6.16) e de suas propriedades, na base de coordenadas, temos

$$k_m R^m_{pij} = k_p ||ij - k_p ||j|i \quad (1.8.6)$$

da equação de Killing (3)

$$(k_{i||j} + k_{j||i}) ||p + (k_{i||p} + k_{p||i}) ||j - (k_{j||p} + k_{p||j}) ||i = 0$$

e usando a eq. (6)

$$2 k_{i||j||p} + k_m (R^m_{ipj} + R^m_{jip} + R^m_{pij}) = 0$$

Portanto, se  $k$  é o vetor de Killing, usando a identidade cíclica do tensor de curvatura na equação anterior, temos:

$$k_{i||j||p} = k_m R^m_{pji} \quad (1.8.7)$$

Consideremos  $k_3 = [k_1, k_2]$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são vetores de Killing:

$$k_{3i} = k_1^j k_{2i||j} - k_{2i||j} k_2^j = -k_1^j k_{2j||i} + k_2^j k_{1j||i}$$

Usando a eq. (7)

$$k_{3i||p} = -k_2^j k_{1m} R^m_{pji} + k_1^j k_{2m} R^m_{pji} + (k_{1j||i} k_{2||p}^j - k_{2i||j} k_{1||p}^j)$$

Simetrizando obtemos

$$k_{3i||p} + k_{3p||i} = 0$$

e portanto  $[k_1, k_2]$  é vetor de Killing.

Assim o conjunto das soluções das equações de Killing não são forma um espaço vetorial, como constitui uma álgebra sob operação de comutação. A condição de álgebra é expressa por

$$[k_i, k_j] = C^m_{ij} k_m \quad (1.8.8)$$

se  $\{k_i\}$ ,  $i = 1, \dots, p$  é base para o espaço vetorial das equações de Killing. As quantidades  $C^m_{ij}$  são constantes denominadas constantes de estrutura da álgebra.

Entretanto o conhecimento das constantes de estrutura não determina unicamente o grupo de transformações que atua sobre a variedade, pois não há correspondência biunívoca entre grupos e álgebras. Pode-se mostrar que entre todos os grupos com a mesma álgebra, somente um é simplesmente conexo, o grupo de cobertura universal dessa álgebra (13).

As únicas condições impostas sobre as constantes de estrutura são obtidas das eqs. (5.9) e (5.10):

$$C^m_{ij} = -C^m_{ji} \quad (1.8.9)$$

$$C^m_{[ij} C^p_{k]m} = 0 \quad (1.8.10)$$

Numa variedade riemanniana de dimensão  $n$ , a eq. (7) é uma equação diferencial para  $k_i(x)$ , com  $n$  condições iniciais  $k_i(x_0)$  e  $n(n-1)/2$  condições  $k_i(x_0)_{||j} = -k_j(x_0)_{||i}$ . Segue-se que uma variedade  $n$ -dimensional admite um número máximo de  $n(n+1)/2$  vetores de Killing linearmente independentes.

Uma variedade  $M$ , de dimensão  $n$ , é dita invariante sob um grupo de isometrias de dimensão  $p$  se há  $p$  vetores de Killing linearmente independentes que satisfazem a álgebra descrita na eq. (8).

O grupo de isometrias é dito simplesmente transitivo sobre  $M$  se  $p=n$ , e multiplamente transitivo se  $p > n$ . Se  $p < n$  o grupo é simplesmente transitivo sobre hipersuperfícies  $H \subset M$ .  $H$  é denominado subespaço homogêneo ou invariante.

A órbita de um grupo de isometrias é o conjunto de pontos equivalentes sob transformação de grupo. Se a órbita é a própria variedade o grupo é simplesmente transitivo sobre  $M$ .

### 1.9 - CAMPOS VETORIAIS INVARIANTES E 1-FORMAS INVARIANTES

A descrição de uma variedade  $M$ , com um dado grupo de isometrias transitivo sobre  $M$ , pode ser feita construindo-se uma base de campos vetoriais invariantes sob o grupo de isometrias. Tal base é constituída de campos vetoriais que admitem derivada de Lie nula em relação a qualquer um dos vetores de Killing.

Assim se o grupo atua transitivamente sobre  $M$  e  $\{k_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n = \dim M$ , é base para o espaço vetorial das soluções das equações de Killing, uma base  $\{X_j\}$  de campos vetoriais



ais invariantes em  $M$  é definido por:

$$\mathcal{L}_{k_i} X_j = k_{ij}, X_j = 0 \quad i, j = 1, \dots, n \quad (1.9.1)$$

A vantagem desse procedimento reside no fato de que pela eq. (5.13)

$$\left\{ \mathcal{L}_{\frac{L}{k}} g \right\} (X_i, X_j) = \frac{L}{k} g(X_i, X_j) - g\left(\mathcal{L}_{\frac{L}{k}} X_i, X_j\right) - g\left(X_i, \mathcal{L}_{\frac{L}{k}} X_j\right)$$

e se tomamos  $X_i, X_j$  como campos vetoriais invariantes

$$\mathcal{L}_{\frac{L}{k}} g = 0 \implies \mathcal{L}_{\frac{L}{k}} \left[ g(X_i, X_j) \right] = k \left[ g_{ij} \right] = 0 \quad (1.9.2)$$

e as componentes  $g_{ij}$  do tensor métrico são constantes sobre a órbita do grupo de isometrias, e portanto sobre  $M$ .

Dados dois campos vetoriais invariantes, seu comutador também é um campo vetorial invariante, pois, pela identidade de Jacobi, eq. (5.7):

$$\begin{aligned} \left[ k_i, \left[ X_j, X_m \right] \right] + \left[ X_m, \left[ k_i, X_j \right] \right] + \left[ X_j, \left[ X_m, k_i \right] \right] &= 0 \\ \implies \left[ k_i, \left[ X_j, X_m \right] \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

Portanto, podemos expandi-lo, na base de campos vetoriais invariantes, na forma

$$\left[ X_j, X_m \right] = D^p_{jm} X_p \quad (1.9.4)$$

onde os  $D^p_{jm}$  são constantes sobre a órbita do grupo, pois das eqs. (3), (4) e (1)

$$\left[ k_i, \left[ X_j, X_m \right] \right] = \left[ k_i, D^p_{jm} X_p \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= k_i \left[ D^p_{jm} \right] X_p + D^p_{jm} \left[ k_i, X_p \right] = 0 \\
 &\implies k_i \left[ D^p_{jm} \right] = 0 \\
 &\implies D^p_{jm} = \text{constante} \qquad (1.9.5)
 \end{aligned}$$

Para determinar os coeficientes de estrutura  $D^p_{jm}$  construímos os campos invariantes em  $M$ , partindo de  $n$  vetores linearmente independentes  $X_{i0}$  em um ponto fixo  $p_0$ , a transpor - tando-os, via derivada de Lie em relação aos geradores de isome - trias, aos outros pontos de  $M$ . Como o grupo  $\bar{e}$  suposto simples - mente transitivo, podemos escolher

$$X_{i0} = k_i(p_0) \quad X_i(x) = a_i^j(x) k_j(x)$$

onde  $a_i^j(x)$  é matriz quadrada não singular, sujeita à condição  $a_i^j(p_0) = \delta_i^j$ .

Com essa escolha, da eq. (1), temos

$$\begin{aligned}
 \left[ k_i, X_j \right] &= \left[ k_i, a^m_j k_m \right] = \\
 &= \left\{ k_i \left[ a^m_j \right] + a^l_j C^m_{il} \right\} k_m = 0 \\
 \implies k_i \left[ a^m_j \right] (p_0) &= -C^m_{ij} \qquad (1.9.6)
 \end{aligned}$$

Da eq. (4)

$$\begin{aligned}
 \left[ X_j, X_m \right] &= D^r_{jm} \hat{k}_r = \left[ a^n_j k_n, a^s_m k_s \right] = \\
 &= \left\{ a^n_j k_n \left[ a^r_m \right] - a^s_m k_s \left[ a^r_j \right] + a^n_j a^s_m C^r_{ns} \right\} k_r
 \end{aligned}$$

Portanto, usando (6), no ponto  $p_0$ :

$$\begin{aligned}
 D^r_{jm} &= -\delta^n_j C^r_{nm} + \delta^s_m C^r_{sj} + \delta^n_j \delta^s_m C^r_{ns} = \\
 &= -C^r_{jm} + C^r_{mj} + C^r_{jm} = -C^r_{jm} \quad (1.9.7)
 \end{aligned}$$

Como, pela eq. (5), os  $D^r_{jm}$  são independentes de posição, temos

$$[X_j, X_m] = -C^r_{jm} X_r \quad (1.9.8)$$

e os campos invariantes sob um dado grupo de isometrias simplesmente transitivos geram uma álgebra equivalente a álgebra do grupo de isometrias. O grupo associado a essa álgebra é denominado grupo recíproco do grupo de transformações isométricas.

A partir dos campos vetoriais invariantes, podemos construir as bases de 1-formas duais associadas, satisfazendo a eq. (3.11) e a eq. (5.16):

$$d\omega^j = -\frac{1}{2} D^j_{kl} \omega^k \wedge \omega^l = \frac{1}{2} C^j_{kl} \omega^k \wedge \omega^l \quad (1.9.9)$$

onde os  $C^j_{kl}$  são as constantes de estrutura da álgebra do grupo de isometrias.

Assim, dado um conjunto de constantes satisfazendo às eqs. (8.9) e (8.10), para encontrarmos uma geometria que tem esse grupo como grupo de movimentos simplesmente transitivo, devemos encontrar 1-formas linearmente independentes que satisfaçam a eq. (9), sendo elemento de linha então descrito por

$$ds^2 = g_{ij} \omega^i \omega^j \quad (1.9.10)$$

onde  $g_{ij}$  é constante sobre a órbita do grupo (10).

Alternativamente, com a base dual a base dos vetores de Killing, podemos construir uma métrica que tem por vetores de Killing, os vetores da base invariante a eles associada.

## CAPÍTULO 2

### CONSTRUÇÃO DE ELEMENTOS DE LINHA PARA O ESPAÇO-TEMPO COM ESTRUTURAS $R \times S^3$ E $R \times H^3$

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

O espaço-tempo da Teoria da Relatividade Geral tem estrutura de variedade riemanniana 4-dimensional e as equações de campo, nessa teoria, são um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares. Como a solução das equações de campo apresenta inúmeras dificuldades devido à não linearidade, temos que impor que o modelo para o espaço-tempo exiba alguma simetria.

Como vimos no capítulo anterior, entendemos por modelo simétrico ou homogêneo aquele em que a variedade, ou subvariedade, é órbita de um grupo de isometrias simplesmente transitivo. A abordagem desse problema foi discutida no capítulo anterior e podemos sintetizá-la da seguinte forma:

(a) dado um elemento de linha, as soluções das equações de Killing permitem determinar os geradores do grupo de transformações; a álgebra associada contém informações sobre o grupo de isometrias que atua em  $M$  e podemos determinar sobre que seções o grupo é simplesmente transitivo.

(b) Em sentido inverso, se é possível encontrar uma variedade que, sob alguma operação, tenha estrutura de grupo

de Lie de transformações, simplesmente transitivo, sobre si própria, podemos construir os campos invariantes sobre o grupo-variedade; as componentes do tensor métrico, descritas na base de campos invariantes, serão constantes, e o elemento de linha é construído com as 1-formas duais aos campos invariantes; os geradores do grupo de transformações serão, por construção, os campos invariantes do grupo recíproco de transformações.

Particularmente, em Cosmologia é adotado, como hipótese de trabalho, o princípio de que o universo é espacialmente homogêneo, isto é, os observáveis físicos são independentes de posição nas seções espaciais dos modelos<sup>(\*)</sup>.

Esta equivalência física dos pontos das seções espaciais é expressa, matematicamente, assumindo-se que o espaço-tempo é uma variedade riemanniana 4-dimensional cuja estrutura é definida pelo produto topológico  $R \times M^3$ , onde, para um dado valor do parâmetro  $t \in R$ ,  $M^3(t)$  é superfície tridimensional que é órbita de um grupo de isometrias de dimensão 3, isto é, simplesmente transitivo sobre  $M^3$ .

O objetivo deste capítulo é a construção de modelos para o espaço-tempo com estrutura de  $R \times S^3$  e  $R \times H^3$ , isto é, produto topológico de uma reta e uma 3-esfera, e reta e 3-hiperboloide, respectivamente. Com essas construções os conceitos de universos fechados e abertos estão em conexão direta com a topologia de suas seções de homogeneidade espacial.

Para isso, seguimos a técnica apresentada por Schücking e Ozsvath, para a estrutura  $R \times S^3$ , e repetida por Ozsvath,

<sup>(\*)</sup> Este é parte do Princípio Cosmológico Restrito, que também admite a isotropia das seções espaciais. Para uma discussão mais completa, ver Bondi<sup>(1)</sup>.

para a estrutura  $R \times H^3$  (14,15),

## 2.2 - A ÁLGEBRA DE QUATÉRNIOS: DESCRIÇÃO DE $S^3$ E $H^3$ IMERSOS EM $E^4$

Consideremos coordenadas cartesianas  $\{a^\mu\}$ ,  $\mu = 0,1,2,3$ , de um espaço euclidiano  $E^4$  e denotemos por  $\{\vec{e}_\mu\}$  o conjunto de vetores unitários na direção de cada eixo coordenado.

Convertemos o espaço vetorial numa álgebra, definindo a tabela de multiplicação:

2º fator 1º fator	$\vec{e}_0$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_0$	$\vec{e}_0$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	$\vec{e}_1$	$-\vec{e}_0$	$\vec{e}_3$	$-\vec{e}_2$
$\vec{e}_2$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_3$	$-\vec{e}_0$	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_3$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$	$-\vec{e}_0$

TABELA 2.2.1 - Tabela de multiplicação de quatérnios.

ou

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_0 \vec{e}_\mu &= \vec{e}_\mu \vec{e}_0 = \vec{e}_\mu & \mu &= 0,1,2,3 \\
 \vec{e}_i \vec{e}_i &= -\vec{e}_0 & i &= 1,2,3 \\
 \vec{e}_i \vec{e}_k &= \epsilon_{ikl} \vec{e}_l & i &\neq k
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

onde  $\epsilon_{ikl}$  é totalmente antissimétrico com  $\epsilon_{123} = 1$ .

Essa álgebra é a álgebra de quatérnios e os vetores

$\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu$  são denominados quatérnios, que constituem um espaço vetorial de dimensão quatro, com a adição e multiplicação por escalar definidas como usualmente:

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b}) &= (a^\mu + b^\mu) \vec{e}_\mu \\ \lambda \vec{a} &= (\lambda a^\mu) \vec{e}_\mu\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

Além disso, um cálculo direto mostra que os quatérnios respeitam as propriedades associativa e distributiva com relação à operação de álgebra:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \vec{b}) \vec{c} &= \vec{a} (\vec{b} \vec{c}) \\ (\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} &= \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{c} \\ \vec{c} (\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{c} \vec{a} + \vec{c} \vec{b}\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

e a tabela de multiplicação mostra que formam uma álgebra não comutativa.

Define-se o quatérnio conjugado ao quatérnio  $\vec{a} = a^0 \vec{e}_0 + a^i \vec{e}_i$  por

$$\vec{a}^* = a^0 \vec{e}_0 - a^i \vec{e}_i\tag{2.2.4}$$

e a norma do quatérnio  $\vec{a}$  por

$$N(\vec{a}) = \vec{a} \vec{a}^*\tag{2.2.5}$$

Dessas definições, mostra-se, por cálculo direto, que valem as relações:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \vec{b})^* &= \vec{b}^* \vec{a}^* \\ (\vec{a} \vec{b}) (\vec{a} \vec{b})^* &= (\vec{a} \vec{a}^*) (\vec{b} \vec{b}^*)\end{aligned}\tag{2.2.6}$$

onde a última equação estabelece que a norma de um produto de quatérnios é o produto das normas dos fatores.

Da definição de norma de um quaternário temos

$$N(\vec{a}) = \vec{a}\vec{a}^* = a^\mu a^\mu \vec{e}_0 = a^\mu a^\mu \quad (2.2.7)$$

onde a última identificação é válida pois os múltiplos do quaternário  $\vec{e}_0$  são isomorfos ao campo dos números reais.

A eq. (7) é a equação da esfera  $S^3$  imersa em  $E^4$

$$N(\vec{a}) = (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 > 0 \quad (2.2.8)$$

e se complexificarmos duas coordenadas,  $\vec{a}^2 + ia^2, \vec{a}^3 + ia^3$ , obtemos a equação do hiperboloide  $H^3$  imerso em  $E^4$

$$N(\vec{a}) = (\vec{a}^0)^2 + (\vec{a}^1)^2 - (\vec{a}^2)^2 - (\vec{a}^3)^2 > 0 \quad (2.2.9)$$

Alternativamente, a descrição de  $H^3$  pode ser feita definindo-se uma nova álgebra para os vetores da base  $\vec{g}_0 = \vec{e}_0, \vec{g}_1 = \vec{e}_1, \vec{g}_2 = i\vec{e}_2, \vec{g}_3 = i\vec{e}_3$ , descrita na tabela 2.2.2 que difi-

2º fator \ 1º fator	$\vec{g}_0$	$\vec{g}_1$	$\vec{g}_2$	$\vec{g}_3$
$\vec{g}_0$	$\vec{g}_0$	$\vec{g}_1$	$\vec{g}_2$	$\vec{g}_3$
$\vec{g}_1$	$\vec{g}_1$	$-\vec{g}_0$	$\vec{g}_3$	$-\vec{g}_2$
$\vec{g}_2$	$\vec{g}_2$	$-\vec{g}_3$	$\vec{g}_0$	$-\vec{g}_1$
$\vec{g}_3$	$\vec{g}_3$	$\vec{g}_2$	$\vec{g}_1$	$\vec{g}_0$

TABELA 2.2.2 - Tabela de multiplicação dos quaternários de Gödel.

ne a álgebra dos quaternários de Gödel, para, similarmente, obtermos a eq. (9) <sup>(16)</sup>.

O mapeamento de uma estrutura algébrica em outra es -



estrutura similar  $\bar{e}$  isomórfico se  $\bar{e}$  é biunívoco e preserva todas as combinações de operações associadas com a estrutura inicial. Se o mapeamento se dá sobre um conjunto de matrizes, estas constituem uma representação da álgebra.

Assim, uma representação da álgebra de quatérnios, descrita na Tabela 2.2.1, é dada pelas matrizes:

$$\begin{aligned} \Gamma(\vec{e}_0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \Gamma(\vec{e}_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma(\vec{e}_2) &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \Gamma(\vec{e}_3) &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

E para os quatérnios de Gödel

$$\begin{aligned} \Gamma(\vec{g}_0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \Gamma(\vec{g}_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma(\vec{g}_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \Gamma(\vec{g}_3) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Sob essa representação, todo quatérnio  $\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu$  é levado na matriz

$$\Gamma(\vec{a}) = A = \begin{pmatrix} a^0 + ia^3 & a^1 + ia^2 \\ -a^1 + ia^2 & a^0 - ia^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (2.2.12)$$

com a condição  $\det A = \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = N(\vec{a})$ .

E todo quatérnio  $\vec{a} = a^\mu \vec{g}_\mu$  é levado em

$$\Gamma(\vec{a}) = \bar{\kappa} = \begin{pmatrix} a^0 - a^3 & a^1 - a^2 \\ -a^1 - a^2 & a^0 + a^3 \end{pmatrix}, \quad (2.2.13)$$

com a condição  $\det \bar{\kappa} = (a^0)^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 = N(\vec{a})$ .

Dessa forma a operação produto de quatérnios é levada na operação produto de matrizes.

### 2.3 - $S^3$ E $H^3$ COMO GRUPOS DE LIE

Se expressarmos os pontos de  $S^3$  e  $H^3$  normalizando as eqs. (8) e (9), isto é,

$$\vec{a}\vec{a}^* = 1, \quad (2.3.1)$$

podemos mostrar que  $S^3$  e  $H^3$  têm estrutura de grupo de Lie de transformações, simplesmente transitivos sobre si próprios, onde a operação de grupo é descrita pelo produto de quatérnios.

Sejam  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$  dois quatérnios que satisfazem  $\vec{p}\vec{p}^* = 1$  e  $\vec{q}\vec{q}^* = 1$ . Uma transformação arbitrária de  $S^3$  e  $H^3$  é expressa por

$$\vec{a}' = \vec{p} \vec{a} \vec{q} \quad (2.3.2)$$

Usando a eq. (2.6)

$$\vec{a}'\vec{a}'^* = (\vec{p}\vec{p}^*)(\vec{a}\vec{a}^*)(\vec{q}\vec{q}^*) = 1$$

e portanto a transformação descrita na eq. (2) leva um ponto  $\vec{a}$  de  $S^3$  ou  $H^3$  em um outro ponto  $\vec{a}'$  de  $S^3$  ou  $H^3$ .

Além disso a distância entre dois pontos vizinhos  $\vec{a}$  e  $\vec{a}+d\vec{a}$  é preservada por essa transformação pois de  $d\vec{a}' = \vec{p}(d\vec{a})\vec{q}$ , segue-se que  $d\vec{a}'d\vec{a}'^* = d\vec{a}d\vec{a}^* = da^H da^H$ .

Consideremos, separadamente as transformações obtidas por translações à esquerda e à direita

$$\vec{a}' = \vec{p}\vec{a}\vec{e}_0 \quad \vec{a}'' = \vec{e}_0\vec{a}\vec{q} \quad (2.3.3)$$

Ambos têm estrutura de grupo pois

a) Se  $\vec{a}\vec{a}^* = 1$ , então

$$\vec{a}'\vec{a}'^* = 1 \quad \text{e} \quad \vec{a}''\vec{a}''^* = 1$$

b) A transformação identidade  $\vec{e}$  é unicamente descrita por  $\vec{p}_0 = \vec{q}_0 = \vec{e}_0$ .

c) A transformação inversa é definida por:

$$\vec{a}' = \vec{p}\vec{a} \Rightarrow \vec{p}^*\vec{a}' = \vec{p}^{-1}\vec{a}' = \vec{a} \Rightarrow \vec{p}^{-1} = \vec{p}^*$$

$$\vec{a}'' = \vec{a}\vec{q} \Rightarrow \vec{a}''\vec{q}^* = \vec{a}\vec{q}^{-1} = \vec{a} \Rightarrow \vec{q}^{-1} = \vec{q}^*$$

Portanto existe uma única transformação à esquerda,  $\vec{p} = \vec{a}'\vec{a}^*$ , e uma única transformação à direita,  $\vec{q} = \vec{a}''\vec{a}^*$ , que leva um  $\vec{a}$  de norma não nula em um  $\vec{a}'$  de mesma norma.

Assim podemos identificar  $S^3$  e  $H^3$  como grupos de transformações de  $S^3$  e  $H^3$ , com sua atuação em si próprios definida por translações à esquerda ou à direita. Além disso o grupo é simplesmente transitivo, pois é única a transformação que liga dois pontos quaisquer.

As coordenadas cartesianas de  $E^4$  prestam-se como coordenadas sobre o grupo, sujeitas ao vínculo  $a^\mu a^\mu = 1$ . Construímos nesse sistema de coordenadas os campos vetoriais invariantes à esquerda e à direita, sobre  $S^3$  e  $H^3$ .

Da teoria de grupos contínuos sabe-se que tais cam -

pos vetoriais são obtidos por translações arbitrárias do espaço tangente do grupo na identidade (10). Portanto consideremos no ponto  $\vec{e}_0$  sobre  $S^3$ , ou  $H^3$ , os três<sub>i</sub> vetores

$$\vec{\alpha}_i = \vec{e}_0 + \epsilon \vec{e}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3.4)$$

onde supomos  $\epsilon$  infinitesimal, isto  $\bar{\epsilon}$ ,  $\epsilon^2 \ll \epsilon$ , de tal forma que  $\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_i = 1 + O(\epsilon^2)$ . Assim os vetores descritos na eq. (4) são vizinhos à identidade e os vetores  $\epsilon \vec{e}_i$  são tangentes a  $S^3$  em  $\vec{e}_0$ .

Vamos propagá-los por transformações à esquerda e a direita, gerando os vetores

$$\begin{aligned} \vec{\beta}_i &= \vec{a} \vec{\alpha}_i = \vec{a} \vec{e}_0 + \epsilon \vec{a} \vec{e}_i = \vec{a} + \epsilon \vec{\omega}_i \\ \vec{\gamma}_i &= \vec{\alpha}_i \vec{a} = \vec{e}_0 \vec{a} + \epsilon \vec{e}_i \vec{a} = \vec{a} + \epsilon \vec{\rho}_i \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Os vetores  $\vec{\omega}_i = \vec{a} \vec{e}_i$  e  $\vec{\rho}_i = \vec{e}_i \vec{a}$  definem os campos vetoriais invariantes à esquerda e à direita, respectivamente, tangentes a  $S^3$ , ou  $H^3$ , em  $\vec{a}$  e correspondentes aos  $\vec{e}_i$  no ponto  $\vec{e}_0$ .

Assim

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_i &= \vec{a} \vec{e}_i = (a^\mu \vec{e}_\mu) \vec{e}_i = a^0 \vec{e}_i + a^j \vec{e}_j \vec{e}_i + \sum_{j \neq i} a^j \vec{e}_j \vec{e}_i \\ \vec{\rho}_i &= \vec{e}_i \vec{a} = \vec{e}_i (a^\mu \vec{e}_\mu) = a^0 \vec{e}_i + a^j \vec{e}_i \vec{e}_j + \sum_{j \neq i} a^j \vec{e}_i \vec{e}_j \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Descrevemos esses campos vetoriais invariantes na base  $\vec{e}_\mu$  por meio de suas componentes,  $\omega_i^\mu$  e  $\rho_i^\mu$ , na forma

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_i &= \omega_i^\mu \vec{e}_\mu \\ \vec{\rho}_i &= \rho_i^\mu \vec{e}_\mu \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

## 2.4 - A MÉTRICA DE UMA VARIEDADE $M^4$ COM ESTRUTURA $R \times S^3$

Para a construção da métrica da variedade  $M^4 = R \times S^3$  precisamos encontrar a álgebra dos campos invariantes  $\tilde{a}$  direita e  $\tilde{a}$  esquerda em  $S^3$ . Levando em conta a tabela de multiplicação de quatérnios (2.2.1) e as equações (3.6) e (3.7), encontramos:

a) Componentes dos campos vetoriais invariantes  $\tilde{a}$  esquerda sobre  $S^3$

$$\omega_1^\mu = (-a^1, a^0, a^3, -a^2)$$

$$\omega_2^\mu = (-a^2, -a^3, a^0, a^1)$$

$$\omega_3^\mu = (-a^3, a^2, -a^1, a^0)$$

b) Componentes dos campos vetoriais invariantes  $\tilde{a}$  direita sobre  $S^3$

$$\rho_1^\mu = (-a^1, a^0, -a^3, a^2)$$

$$\rho_2^\mu = (-a^2, a^3, a^0, -a^1)$$

$$\rho_3^\mu = (-a^3, -a^2, a^1, a^0)$$

Portanto, os campos vetoriais invariantes  $\tilde{a}$  esquerda em  $S^3$ ,  $E_i = \omega_i^\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu}$ , tem a forma

$$E_1 = -a^1 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^3 \frac{\partial}{\partial a^2} - a^2 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

$$E_2 = -a^2 \frac{\partial}{\partial a^0} - a^3 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^1 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

$$E_3 = -a^3 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^2 \frac{\partial}{\partial a^1} - a^1 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

E os campos vectoriais invariantes  $\bar{a}$  direita em  $S^3$   
 $D_i = \rho_i^{\mu} \frac{\partial}{\partial a^{\mu}}$ , são descritos por

$$D_1 = -a^1 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^1} - a^3 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^2 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

$$D_2 = -a^2 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^3 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^2} - a^1 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

$$D_3 = -a^3 \frac{\partial}{\partial a^0} - a^2 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^1 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

As álgebras associadas aos campos vectoriais invariantes  $\bar{a}$  esquerda e  $\bar{a}$  direita são, respectivamente:

$$[E_1, E_2] = 2E_3$$

$$[E_3, E_1] = 2E_2 \quad \text{ou} \quad [E_i, E_j] = 2\epsilon_{ijk} E_k$$

$$[E_2, E_3] = 2E_1$$

e

$$[D_1, D_2] = -2D_3$$

$$[D_3, D_1] = -2D_2 \quad \text{ou} \quad [D_i, D_j] = -2\epsilon_{ijk} D_k$$

$$[D_2, D_3] = -2D_1$$

Vamos portanto, por inspeção direta, que translações  $\bar{a}$  esquerda e  $\bar{a}$  direita tem estrutura de grupos recíprocos de transformação.

Introduziremos, por conveniência, novos campos vectoriais invariantes  $\bar{a}$  esquerda e  $\bar{a}$  direita, definidos por:

$$X_1 = \frac{1}{2} E_3 \quad X_2 = -\frac{1}{2} E_2 \quad X_3 = \frac{1}{2} E_1$$

$$Y_1 = \frac{1}{2} D_3 \quad Y_2 = -\frac{1}{2} D_2 \quad Y_3 = \frac{1}{2} D_1$$

para obtermos

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= \epsilon_{ijk} X_k \\ [Y_i, Y_j] &= -\epsilon_{ijk} Y_k \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Sabe-se que  $S^3$  tem estrutura de grupo de Lie de transformações e que  $S^3$  é simplesmente conexo, isto é, toda curva fechada em  $S^3$  pode ser deformada continuamente a um ponto. Portanto  $S^3$  é o grupo de cobertura universal da álgebra (1).

Usando a representação da álgebra de quaternions descrita nas eqs. (2.10) e (2.12), todo quaternio de norma unitária é representado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 + ia^3 & a^1 + ia^2 \\ -a^1 + ia^2 & a^0 - ia^3 \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

sujeita ao vínculo  $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ . Portanto  $S^3$  é isomorfo ao grupo de matrizes complexas unimodulares de dimensão 2,  $SU_2$ , com a operação de grupo em  $S^3$  levada no produto de matrizes.

Usando o fato de que as rotações do espaço tridimensional, em torno de um ponto fixo, podem ser descritas por meio de matrizes complexas de dimensão 2, com a introdução dos ângulos de Euler  $0 \leq x^1 \leq \pi$  e  $0 \leq x^2, x^3 \leq 2\pi$ , as matrizes de rotação são descritas por (17)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{x^1}{2} \exp(i \frac{x^2+x^3}{2}) & i \sin \frac{x^1}{2} \exp(i \frac{x^2-x^3}{2}) \\ i \sin \frac{x^1}{2} \exp(-i \frac{x^2-x^3}{2}) & \cos \frac{x^1}{2} \exp(-i \frac{x^2+x^3}{2}) \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

As transformações de coordenadas cartesianas para coordenadas sobre  $S^3$  são obtidas por comparação direta das matrizes descritas nas eqs. (2) e (3), tendo a forma:

$$\begin{aligned} a^0 &= \cos \frac{x^1}{2} \cos \frac{x^2+x^3}{2} & a^1 &= -\sin \frac{x^1}{2} \sin \frac{x^2-x^3}{2} \\ a^2 &= \sin \frac{x^1}{2} \cos \frac{x^2-x^3}{2} & a^3 &= \cos \frac{x^1}{2} \sin \frac{x^2+x^3}{2} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Num grupo de matrizes, as 1-formas  $\omega = A^{-1}dA$ , onde  $A$  é um elemento geral do grupo, são 1-formas invariantes à esquerda, pois se  $X$  é um elemento fixo do grupo, a translação à esquerda por  $X$  é

$$\bar{A} = XA,$$

de tal forma que:

$$\bar{\omega} = (XA)^{-1} d(XA) = A^{-1}X^{-1}(XdA) = A^{-1}dA = \omega$$

Flanders mostra que todos os elementos da matriz  $\omega = A^{-1}dA$  são 1-formas invariantes à esquerda (18). Similarmente os elementos da matriz  $\gamma = (dA)A^{-1}$  são 1-formas invariantes à direita.

Assim o cálculo de

$$\begin{aligned} \omega &= A^{-1}dA = \omega^i \Gamma(\vec{e}_i) \\ \gamma &= (dA)A^{-1} = \gamma^i \Gamma(\vec{e}_i) \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

com  $i = 1, 2, 3$ , fornece-nos as 1-formas invariantes à esquerda e à direita sobre  $S^3$ , descritas em coordenadas sobre a esfera, se  $A$  é a matriz (2.4.3) e  $\Gamma(\vec{e}_i)$  é a base para a representação



da álgebra do grupo de matrizes.

Explicitamente

$$\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\cos x^1 dx^2 + dx^3) & \frac{1}{2} \exp(-ix^3) [idx^1 - i \operatorname{sen} x^1 dx^2] \\ \frac{1}{2} \exp(ix^3) [idx^1 + \operatorname{sen} x^1 dx^2] & -\frac{1}{2} (\cos x^1 dx^2 + dx^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega^3 & \omega^1 + i\omega^2 \\ -\omega^1 + i\omega^2 & -i\omega^3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [dx^2 + \cos x^1 dx^3] & \frac{1}{2} \exp(ix^2) [idx^1 + \operatorname{sen} x^1 dx^2] \\ \frac{1}{2} \exp(-ix^2) [idx^1 - \operatorname{sen} x^1 dx^3] & -\frac{1}{2} [dx^2 + \cos x^1 dx^3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\gamma^3 & \gamma^1 + i\gamma^2 \\ -\gamma^1 + i\gamma^2 & -i\gamma^3 \end{pmatrix}$$

Portanto, três possíveis 1-formas invariantes à esquerda, linearmente independentes, são

$$\omega^1 = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x^3 dx^1 - \operatorname{sen} x^1 \cos x^3 dx^2)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (\cos x^3 dx^1 + \operatorname{sen} x^1 \operatorname{sen} x^3 dx^2)$$

$$\omega^3 = \frac{1}{2} (\cos x^1 dx^2 + dx^3)$$

e as possíveis 1-formas invariantes à direita são

$$\gamma^1 = \frac{1}{2} (-\text{sen}x^2 dx^1 + \text{sen}x^1 \cos x^2 dx^3)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{2} (\cos x^2 dx^1 + \text{sen}x^1 \text{sen}x^2 dx^3)$$

$$\gamma^3 = \frac{1}{2} (dx^2 + \cos x^1 dx^3)$$

Definindo

$$\tilde{\omega}^1 = 2\omega^2 = \cos x^3 dx^1 + \text{sen}x^1 \text{sen}x^3 dx^2$$

$$\tilde{\omega}^2 = -2\omega^1 = -\text{sen}x^3 dx^1 + \text{sen}x^1 \cos x^3 dx^2 \quad (2.4.6)$$

$$\tilde{\omega}^3 = 2\omega^3 = \cos x^1 dx^2 + dx^3$$

e

$$\tilde{\gamma}^1 = 2\gamma^2 = \cos x^2 dx^1 + \text{sen}x^1 \text{sen}x^2 dx^3$$

$$\tilde{\gamma}^2 = -2\gamma^1 = \text{sen}x^2 dx^1 - \text{sen}x^1 \cos x^2 dx^3 \quad (2.4.7)$$

$$\tilde{\gamma}^3 = 2\gamma^3 = dx^2 + \cos x^1 dx^3$$

as novas 1-formas invariantes  $\tilde{\omega}$  esquerda e  $\tilde{\omega}$  direita satisfazem:

$$d\tilde{\omega}^1 = -\tilde{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}^3$$

$$d\tilde{\omega}^2 = -\tilde{\omega}^3 \wedge \tilde{\omega}^1 \quad (2.4.8)$$

$$d\tilde{\omega}^3 = -\tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2$$

$$d\tilde{\gamma}^1 = \tilde{\gamma}^2 \wedge \tilde{\gamma}^3$$

$$d\tilde{\gamma}^2 = \tilde{\gamma}^3 \wedge \tilde{\gamma}^1 \quad (2.4.9)$$

$$d\tilde{\gamma}^3 = \tilde{\gamma}^1 \wedge \tilde{\gamma}^2$$

Nesse sistema de coordenadas, os campos vetoriais in-

variantes à esquerda, construídos por  $\tilde{\omega}^i(X_j) = \delta_j^i$ , têm a forma

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\sin x^3}{\sin x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} - \cot g x^1 \sin x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ X_2 &= -\sin x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\cos x^3}{\sin x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} - \cot g x^1 \cos x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (2.4.10) \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial x^3} \end{aligned}$$

e os campos vetoriais invariantes à direita, definidos por  $\tilde{Y}^i(Y_j) = \delta_j^i$ , têm a forma

$$\begin{aligned} Y_1 &= \cos x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - \cot g x^1 \sin x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\sin x^2}{\sin x^1} \frac{\partial}{\partial x^3} \\ Y_2 &= \sin x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - \cot g x^1 \cos x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\cos x^2}{\sin x^1} \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (2.4.11) \\ Y_3 &= \frac{\partial}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Os campos descritos nas eqs. (10) e (11), por construção, satisfazem  $\sum_{X_i} Y_j = -\sum_{Y_j} X_i = 0$ , e têm sua álgebra descrita na eq. (1).

Utilizaremos as 1-formas da eq. (6) para construir o elemento de linha da variedade  $R \times S^3$ . Este elemento de linha terá os vetores descritos em (11) como vetores de Killing.

Introduzimos o campo vetorial  $X_0 = \frac{\partial}{\partial t}$  e sua 1-forma dual  $\tilde{\omega}^0 = dt$ . A álgebra associada à base  $\{X_\mu\}$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  é

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= \epsilon_{ijk} X_k \\ [X_0, X_i] &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

e as 1-formas associadas satisfazem

$$d\tilde{\omega}^0 = 0 \quad d\tilde{\omega}^1 = -\tilde{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}^3 \quad d\tilde{\omega}^2 = -\tilde{\omega}^3 \wedge \tilde{\omega}^1 \quad d\tilde{\omega}^3 = -\tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2.$$

Então  $M^4 = R \times S^3$  é grupo de cobertura universal da álgebra, pois  $R \times S^3$  é simplesmente conexo, e definimos seu elemento de linha por

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\tilde{\omega}^0)^2 - A^2(t)(\tilde{\omega}^3)^2 - B^2(t) \left[ (\tilde{\omega}^1)^2 + (\tilde{\omega}^2)^2 \right] = \\ &= dt^2 - A^2(t)(\cos x^1 dx^2 + dx^3)^2 - B^2(t) \left[ (dx^1)^2 + \sin^2 x^1 (dx^2)^2 \right] \end{aligned}$$

de tal forma que as seções  $t$ -constante são órbitas de  $S^3$ .

Essa construção é equivalente a escolhermos as componentes do tensor métrico, descritas na base dos campos vetoriais invariantes à esquerda, eq. (10), como

$$\begin{aligned} g_{00} &= g(X_0, X_0) = 1 \\ g_{11} &= g(X_1, X_1) = -B^2(t) \\ g_{22} &= g(X_2, X_2) = -B^2(t) \\ g_{33} &= g(X_3, X_3) = -A^2(t) \end{aligned}$$

sendo nulas as outras componentes do tensor métrico.

Essa escolha pode ser interpretada como uma deformação na álgebra dos campos vetoriais invariantes à esquerda, eq. (10), de tal forma que a variedade  $S^3$  é deformada num elipsóide à medida que o parâmetro  $t$  evolui, como se pode ver no Apêndice A.

## 2.5 - A MÉTRICA DE UMA VARIEDADE $M^4$ COM ESTRUTURA $R \times H^3$

Levando em conta a tabela de multiplicação de quatêr-  
nios de Gödel, Tabela 2.2.2, e as equações (3.6) e (3.7), obte-  
mos:

a) Componentes dos campos vetoriais invariantes  $\tilde{a}$  es-  
querda sobre  $H^3$

$$\tilde{\omega}_1^\nu = (-a^1, a^0, a^3, -a^2)$$

$$\tilde{\omega}_2^\mu = (a^2, a^3, a^0, a^1)$$

$$\tilde{\omega}_3^\nu = (a^3, -a^2, -a^1, a^0)$$

b) componentes dos campos vetoriais invariantes  $\tilde{a}$  di-  
reita sobre  $H^3$

$$\tilde{\rho}_1^\mu = (-a^1, a^0, -a^3, a^2)$$

$$\tilde{\rho}_2^\mu = (a^2, -a^3, a^0, -a^1)$$

$$\tilde{\rho}_3^\mu = (a^3, a^2, a^1, a^0)$$

Na base  $\{\partial/\partial a^H\}$ , os campos invariantes  $\tilde{a}$  esquerda são  
descritos por

$$\tilde{E}_1 = -a^1 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^3 \frac{\partial}{\partial a^2} - a^2 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

$$\tilde{E}_2 = a^2 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^3 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^1 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

$$\tilde{E}_3 = a^3 \frac{\partial}{\partial a^0} - a^2 \frac{\partial}{\partial a^1} - a^1 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

e os campos invariantes  $\tilde{a}$  direita têm a forma

$$\bar{D}_1 = -a^1 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^1} - a^3 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^2 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

$$\bar{D}_2 = a^2 \frac{\partial}{\partial a^0} - a^3 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^2} - a^1 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

$$\bar{D}_3 = a^3 \frac{\partial}{\partial a^0} + a^2 \frac{\partial}{\partial a^1} + a^1 \frac{\partial}{\partial a^2} + a^0 \frac{\partial}{\partial a^3}$$

As álgebras correspondentes são

$$[\bar{E}_1, \bar{E}_2] = 2\bar{E}_3$$

$$[\bar{E}_3, \bar{E}_1] = 2\bar{E}_2$$

$$[\bar{E}_2, \bar{E}_3] = -2\bar{E}_1$$

$$[\bar{D}_1, \bar{D}_2] = -2\bar{D}_3$$

$$[\bar{D}_3, \bar{D}_1] = -2\bar{D}_2$$

$$[\bar{D}_2, \bar{D}_3] = 2\bar{D}_1$$

e introduzimos novos campos invariantes  $\bar{a}$  esquerda e  $\bar{a}$  direita, definidos por:

$$\bar{X}_1 = -\frac{1}{2} \bar{E}_3 \quad \bar{X}_2 = -\frac{1}{2} \bar{E}_2 \quad \bar{X}_3 = -\frac{1}{2} \bar{E}_1$$

$$\bar{Y}_1 = -\frac{1}{2} \bar{D}_3 \quad \bar{Y}_2 = -\frac{1}{2} \bar{D}_2 \quad \bar{Y}_3 = -\frac{1}{2} \bar{D}_1$$

para obtermos

$$[\bar{X}_1, \bar{X}_2] = -\bar{X}_3 \quad [\bar{X}_2, \bar{X}_3] = \bar{X}_1 \quad [\bar{X}_3, \bar{X}_1] = \bar{X}_2$$

$$[\bar{Y}_1, \bar{Y}_2] = \bar{Y}_3 \quad [\bar{Y}_2, \bar{Y}_3] = -\bar{Y}_1 \quad [\bar{Y}_3, \bar{Y}_1] = -\bar{Y}_2$$

(2.5.1)

$H^3$  tem estrutura de grupo de Lie de transformações e é simplesmente conexo, sendo portanto o grupo de cobertura universal da álgebra (1).

Introduzimos as coordenadas sobre  $H^3$ ,  $0 \leq x^1, x^3 \leq 2\pi$ ,  $0 \leq x^2 < \infty$ , pela seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} a^0 &= \cosh \frac{x^2}{2} \cos \frac{x^1 + x^3}{2} \\ a^1 &= \cosh \frac{x^2}{2} \sin \frac{x^1 + x^3}{2} \\ a^2 &= -\sinh \frac{x^2}{2} \cos \frac{x^1 - x^3}{2} \\ a^3 &= \sinh \frac{x^2}{2} \sin \frac{x^1 - x^3}{2} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Todo quatérnio de Gödel é representado pela matriz (2.13)

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} a^0 - a^3 & a^1 - a^2 \\ -a^1 - a^2 & a^0 + a^3 \end{pmatrix}$$

com a condição  $(a^0)^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 = 1$ .

Usando as transformações de coordenadas (2) construímos as 1-formas invariantes do grupo de matrizes, obtendo

$$\bar{\omega} = \bar{K}^{-1} d\bar{K} = \bar{\omega}^0 \Gamma(g_1) = \begin{pmatrix} -\bar{\omega}^3 & \bar{\omega}^1 - \bar{\omega}^2 \\ -\bar{\omega}^1 - \bar{\omega}^2 & \bar{\omega}^3 \end{pmatrix} \quad \bar{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \begin{array}{l} -\operatorname{sen} x^1 dx^2 + \operatorname{senh} x^2 \operatorname{cos} x^1 dx^3 \\ (dx^1 + \operatorname{cosh} x^2 dx^3) + (\operatorname{cos} x^1 dx^2 + \operatorname{sen} x^1 \operatorname{senh} x^2 dx^3) \\ -(dx^1 + \operatorname{cosh} x^2 dx^3) + (\operatorname{cos} x^1 dx^2 + \operatorname{sen} x^1 \operatorname{senh} x^2 dx^3) \\ \operatorname{sen} x^1 dx^2 - \operatorname{senh} x^2 \operatorname{cos} x^1 dx^3 \end{array} \right)$$

Portanto as 1-formas invariantes  $\bar{\omega}$  esquerda são

$$\bar{\omega}^1 = \frac{1}{2} (dx^1 + \operatorname{cosh} x^2 dx^3)$$

$$\bar{\omega}^2 = -\frac{1}{2} (\operatorname{cos} x^1 dx^2 + \operatorname{sen} x^1 \operatorname{senh} x^2 dx^3)$$

$$\bar{\omega}^3 = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x^1 dx^2 - \operatorname{senh} x^2 \operatorname{cos} x^1 dx^3)$$

Redefinindo

$$\tilde{\omega}^1 = -2\bar{\omega}^2 = \operatorname{cos} x^1 dx^2 + \operatorname{sen} x^1 \operatorname{senh} x^2 dx^3$$

$$\tilde{\omega}^2 = -2\bar{\omega}^3 = -\operatorname{sen} x^1 dx^2 + \operatorname{cos} x^1 \operatorname{senh} x^2 dx^3 \quad (2.5.3)$$

$$\tilde{\omega}^3 = 2\bar{\omega}^1 = dx^1 + \operatorname{cosh} x^2 dx^3$$

as novas 1-formas satisfazem

$$d\tilde{\omega}^1 = -\tilde{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}^3 \quad d\tilde{\omega}^2 = -\tilde{\omega}^3 \wedge \tilde{\omega}^1 \quad d\tilde{\omega}^3 = \tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2 \quad (2.5.4)$$

Os campos vetoriais invariantes  $\bar{X}$  esquerda, obtidos de  $\omega^i(X_j) = \delta^i_j$  são descritos por:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\operatorname{sen} x^1 \operatorname{cot} \operatorname{gh} x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + \operatorname{cos} x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + \operatorname{sen} x^1 \operatorname{cos} \operatorname{sech} x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ X_2 &= -\operatorname{cos} x^1 \operatorname{cot} \operatorname{gh} x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - \operatorname{sen} x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + \operatorname{cos} x^1 \operatorname{cos} \operatorname{sech} x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial x^1} \end{aligned} \quad (2.5.5)$$



e os correspondentes campos invariantes à direita, soluções das equações  $\sum_{X_i} Y_j = 0$ , são descritos, nesse sistema de coordenadas por:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \operatorname{cosech}x^2 \operatorname{sen}x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \operatorname{cos}x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} - \operatorname{cotgh}x^2 \operatorname{sen}x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ Y_2 &= -\operatorname{cosech}x^2 \operatorname{cos}x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \operatorname{sen}x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} + \operatorname{cotgh}x^2 \operatorname{cos}x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (2.5.6) \\ Y_3 &= \frac{\partial}{\partial x^3} \end{aligned}$$

As álgebras correspondentes aos campos acima são descritas na eq. (1).

Introduzimos o campo vetorial  $X_0 = \partial/\partial t$  e sua 1-forma dual  $\omega^0 = dt$ . A álgebra associada à base  $\{X_\mu\}$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , torna-se:

$$[X_0, X_i] = 0 \quad [X_1, X_2] = -X_3 \quad [X_3, X_1] = X_2 \quad [X_2, X_3] = X_1$$

onde as 1-formas associadas satisfazem

$$d\omega^0 = 0 \quad d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^3 \quad d\omega^2 = -\omega^3 \wedge \omega^1 \quad d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^2$$

A variedade  $M^4 = R \times H^3$  é grupo de cobertura universal dessa álgebra e definimos seu elemento de linha por

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\omega^0)^2 - A^2(t)(\omega^3)^2 - B^2(t) \left[ (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 \right] = \\ &= dt^2 - A^2(t)(dx^1 + \operatorname{cosh}x^2 dx^3)^2 - B^2(t) \left[ (dx^2)^2 + \operatorname{senh}^2 x^2 (dx^3)^2 \right] \end{aligned}$$

de tal forma que as seções  $t = \text{constante}$  são órbitas de  $H^3$ .

Os campos invariantes à direita, descritos na eq. (2.5.6), são, por construção, os geradores de isometrias em  $M^4 = R \times H^3$ .

## CAPÍTULO 3

### A CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo discutiremos a classificação de todas as variedades 3-dimensionais que admitem um grupo de isometrias simplesmente transitivo. Essa classificação, devida a L. Bianchi, é obtida por meio de um método proposto por C.G. Behr que consiste na obtenção de todos os possíveis conjuntos de constantes de estrutura não equivalentes <sup>(19,20)</sup>. Por conjuntos de constantes de estrutura não equivalentes entendemos conjuntos que não podem ser levados uns nos outros por transformações lineares, a coeficientes constantes, da base para o espaço vetorial das soluções das equações de Killing.

Os elementos de linha construídos no capítulo anterior são situados nessa classificação.

#### 3.2 - A CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI-BEHR

Um grupo de transformações é simplesmente transitivo sobre uma variedade de dimensão  $n$ , se é possível encontrar  $n$  vetores de Killing,  $\{k_i, i = 1, \dots, n\}$ , linearmente independentes, satisfazendo

$$\left[ K_i, K_j \right]^\alpha = C^m_{ij} K_m^\alpha \quad \begin{matrix} i, j, m = 1, \dots, n \\ \alpha = 1, \dots, n \end{matrix} \quad (3.2.1)$$

onde  $\det \{ K_m^\alpha(x) \} \neq 0$ , como vimos na seção 1.8. As constantes de estrutura  $C^m_{ij}$  satisfazem

$$C^m_{ij} = - C^m_{ji} \quad (3.2.2)$$

e, portanto, para uma variedade 3-dimensional temos  $C^m_{ij}$  com no ve componentes independentes.

Partindo deste fato, construímos a matriz

$$M^{ij} = \epsilon^{imk} C^j_{mk} \quad (3.2.3)$$

que tem o mesmo número de componentes independentes que as constantes de estrutura, e onde  $\epsilon_{imj} = \epsilon^{imj}$  é totalmente antissimétrico com  $\epsilon_{123} = 1$ .

Invertando a eq. (3) obtemos

$$C^j_{rs} = \epsilon_{rsi} M^{ij} \quad (3.2.4)$$

onde usamos  $\epsilon_{rsi} \epsilon^{imk} = \frac{1}{2} (\delta_r^m \delta_s^k - \delta_r^k \delta_s^m)$ .

Além de antissimétricas nos índices inferiores, as constantes de estrutura satisfazem a identidade de Jacobi, eq. (1.8.10), e temos:

$$C^m_{[ij} C^p_{k]m} = \epsilon^{ijk} C^m_{ij} C^p_{km} = 0$$

o que implica

$$M^{km} C^p_{km} = 0 \quad (3.2.5)$$

A matriz  $M^{ij}$  definida na eq. (3) pode ser decomposta em suas partes simétrica e antissimétrica, respectivamente,  $M^{(ij)}$  e  $M^{[ij]}$ :

$$M^{ij} = M^{(ij)} + M^{[ij]} \quad (3.2.6)$$

A parte antissimétrica tem três componentes independentes que podem ser expressas na forma do vetor

$$a_k = \epsilon_{kij} M^{[ij]} \quad (3.2.7)$$

onde as componentes do "vetor dual" são

$$M^{[ij]} = \epsilon^{ijk} a_k \quad (3.2.8)$$

Levando as eqs. (8) e (6) na eq. (4) temos

$$C_{rs}^j = \epsilon_{rsi} M^{(ij)} + \frac{1}{2} (\delta_r^j a_s - \delta_s^j a_r) \quad (3.2.9)$$

e dessa maneira as nove componentes independentes das constantes de estrutura  $C_{rs}^j$  são descritas em termos das seis componentes independentes da matriz simétrica  $M^{(ij)}$  e das três componentes do vetor  $a_k$ .

Entretanto as componentes da matriz  $M^{(ij)}$  e do vetor  $a_k$  não são independentes entre si. Tendo em conta a eq. (8), a identidade de Jacobi, eq. (5), nos dá

$$M^{jP} a_j = 0$$

onde usamos o fato de que  $C_{km}^P M^{(km)} = 0$ , pois  $C_{km}^P = -C_{mk}^P$ .

Usando a decomposição descrita na eq. (6), apenas a parte simétrica contribui nesse produto, e portanto

$$M^{(Pj)} a_j = 0 \quad (3.2.10)$$

Consideremos a transformação da matriz  $M^{ij}$ , sob uma transformação da base do espaço vetorial das soluções das equa

ções de Killing,

$$\tilde{\kappa}_i = A_i^j \kappa_j \quad (3.2.11)$$

onde  $A_i^j$  é matriz real, não singular, de coeficientes constantes. As constantes de estrutura transformam-se com

$$[\tilde{\kappa}_i, \tilde{\kappa}_j] = \tilde{c}_{ij}^m \tilde{\kappa}_m$$

onde  $\tilde{c}_{ij}^m$  é determinado por

$$A_i^r A_j^s c_{rs}^p = \tilde{c}_{ij}^m A_m^p \quad (3.2.12)$$

Multiplicando por  $\epsilon^{qij}$

$$A_i^r A_j^s \epsilon^{qij} c_{rs}^p = \hat{H}^{qm} A_m^p$$

e a seguir por  $A_n^v$

$$\begin{aligned} A_i^r A_j^s A_n^v \epsilon^{qij} c_{rs}^p &= \\ &= (\det A) \epsilon^{rsv} c_{rs}^p = (\det A) M^{vp} = \\ &= \hat{H}^{qm} A_m^p A_n^v \end{aligned}$$

Portanto

$$\hat{H}^{qm} = (\det A) (A^{-1})_p^m (A^{-1})_n^v M^{vp} \quad (3.2.13)$$

Assim, uma transformação da base para o espaço vetorial das soluções da equação de Killing, como descrita na eq.(11), permite escrever a eq. (10) na forma

$$\tilde{\kappa}(p_j) \tilde{\kappa}_j = 0$$

onde  $\tilde{a}_j = A_j^r a_r$ .

Particularmente, a matriz  $A_j^r$  pode ser escolhida de modo a termos

$$\begin{aligned} M^{(ij)} &= \text{diag}(n_1, n_2, n_3) \\ a_j &= (a, 0, 0) \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

e a eq. (10) reduz-se a

$$n_1 a = 0 \quad (3.2.15)$$

Usando as eqs. (14) e (15) acima, na eq. (9), as possíveis relações de comutação para os vetores de Killing têm a forma

$$\begin{aligned} [K_1, K_2] &= -\frac{a}{2} K_2 + n_3 K_3 \\ [K_2, K_3] &= n_1 K_1 \\ [K_3, K_1] &= n_2 K_2 + \frac{a}{2} K_3 \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Assim, numa base para o espaço vetorial das soluções das equações de Killing, que permita expressar  $M^{ij}$  na forma da eq. (14), a escolha original de Bianchi pode ser apresentada na Tabela 3.2.1.

Os sinais apresentados na Tab. 3.2.1 indicam os sinais das respectivas quantidades, que por meio de transformações do tipo descrito na eq. (11) podem ser feitos iguais a  $\pm 1$  e 0, exceto nos casos em que  $a n_2 n_3 \neq 0$  (Tipos III, VI e VII). Nesses casos a existência, ou não, de um subgrupo abeliano  $G_1$  depende de um dado valor dos parâmetros que representam o grupo (21).

tipo de Bianchi	a	n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	n <sub>3</sub>
I	0	0	0	0
II	0	+	0	0
III	+	0	+	-
IV	+	0	0	+
V	+	0	0	0
VI	+	0	+	-
VII	+	0	+	+
VIII	0	+	+	-
IX	0	+	+	+

TABELA 3.2.1 - Possíveis escolhas independentes para os sinais das constantes de estrutura na eq. (16).

### 3.3 - CLASSIFICAÇÃO DAS SEÇÕES DE HOMOGENEIDADE DAS VARIEDADES

$$M^4 = R \times S^3 \text{ e } M^4 = R \times H^3$$

O elemento de linha da variedade  $M^4 = R \times S^3$

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)(\cos^2 dx^2 + dx^3)^2 - B^2(t) \left[ (dx^1)^2 + \sin^2 x^1 (dx^2)^2 \right] \quad (3.3.1)$$

tem os vetores  $(Y_1, Y_2, Y_3)$ , dados na eq. (2.4.11), como vetores de Killing, cuja álgebra é descrita por

$$[Y_1, Y_2] = -Y_3 \quad [Y_3, Y_1] = -Y_2 \quad [Y_2, Y_3] = -Y_1 \quad (3.3.2)$$

ou equivalentemente

$$[K_1, K_2] = K_3 \quad [K_3, K_1] = K_2 \quad [K_2, K_3] = K_1 \quad (3.3.3)$$

onde  $K_1 = -Y_1$ ,  $K_2 = -Y_2$  e  $K_3 = -Y_3$ .

Na classificação de Bianchi essa é a álgebra dos gera

dores de transformação do grupo de Bianchi tipo IX, como se pode ver da Tabela 3.2.1 com a escolha de  $a = 0$ ,  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$  levada na eq. (2.16).

O elemento de linha da variedade  $M^4 = R \times H^3$

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)(dx^1 + \cosh x^2 dx^3)^2 - B^2(t) \left[ (dx^2)^2 + \sinh^2 x^2 (dx^3)^2 \right] \quad (3.3.4)$$

tem os campos vetoriais dados na eq. (2.5.6) como vetores de Killing, com a correspondente álgebra descrita por:

$$[Y_1, Y_2] = Y_3 \quad [Y_2, Y_3] = -Y_1 \quad [Y_3, Y_1] = -Y_2 \quad (3.3.5)$$

ou equivalentemente

$$[K_1, K_2] = -K_3 \quad [K_2, K_3] = K_1 \quad [K_3, K_2] = K_2 \quad (3.3.6)$$

onde fizemos  $K_1 = Y_1$ ,  $K_2 = Y_2$ ,  $K_3 = -Y_3$ .

Essa é álgebra dos geradores de transformação do grupo Bianchi tipo VIII, como se pode ver da Tab. 3.2.1 com a escolha  $a = 0$ ,  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $n_3 = -1$ , levada na eq. (2.16).

Por esse motivo, no presente trabalho, modelos cosmológicos cujos elementos de linha têm estrutura  $R \times S^3$  e  $R \times H^3$  serão denominados, respectivamente, por modelos Bianchi tipo IX, e Bianchi tipo VIII.

### 3.4 - UMA NOTA SOBRE OS TIPOS DE BIANCHI MAXIMALMENTE SIMÉTRI - COS

Como vimos na seção 1.8, uma variedade  $n$ -dimensional admite um número máximo de  $n(n+1)/2$  vetores de Killing linear -



mente independentes. Uma variedade que admite o número máximo de geradores de isometrias é dita maximalmente simétrica, ou isotrópica, e pode-se mostrar que o tensor de curvatura nessas variedades tem a forma

$$R_{ijmk} = \frac{R_0}{n(n-1)} (g_{im}g_{jk} - g_{ik}g_{jm}) \quad (3.4.1)$$

onde  $R_0 = 0, \pm 1$  é uma constante de curvatura que caracteriza unicamente um espaço maximalmente simétrico. A eq. (1) é condição necessária e suficiente para que a curvatura gaussiana seja independente de direção em todo ponto (21, 22).

Verifica-se diretamente que uma geometria cujo tensor de curvatura tem a forma da eq. (1) é conformalmente plana. Existe, portanto, um sistema de coordenadas tal que, em particular para  $n = 3$

$$dl^2 = \frac{\alpha_1(dx^1)^2 + \alpha_2(dx^2)^2 + \alpha_3(dx^3)^2}{\Omega^2(x)} \quad (3.4.2)$$

onde

$$\alpha_k = \pm 1 \quad \text{e} \quad \Omega = 1 + \frac{R_0}{24} \sum_{k=1}^3 \alpha_k (x^k)^2 .$$

Apenas os tipos de Bianchi I, V e IX são maximalmente simétricos, correspondendo a  $R_0$  igual a 0, -1 e +1, respectivamente, e é sempre possível encontrar uma transformação de coordenadas que expressa o elemento de linha construído com as respectivas bases invariantes na forma da eq. (2). Discutimos essa transformação para o tipo Bianchi IX, que é estudada no presente trabalho.

O elemento de linha para a seção de homogeneidade da

variedade  $R \times S^3$  é descrito usando-se as 1-formas (2.4.6)

$$\begin{aligned} dl^2 &= (\tilde{\omega}^1)^2 + (\tilde{\omega}^2)^2 + (\tilde{\omega}^3)^2 = \\ &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + 2\cos^1 dx^2 dx^3 \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Entretanto, um elemento de linha para  $S^3$  pode ser expresso, em dois sistemas de coordenadas distintos, usando-se as seguintes expressões alternativas para as coordenadas  $a^u$  do espaço  $E^4$ , em que consideramos  $S^3$  imerso (21):

$$\begin{aligned} a^0 &= \cos \frac{x^1}{2} \cos \frac{x^2+x^3}{2} = \text{sen} X \text{ sen} \theta \cos \phi \\ a^1 &= -\text{sen} \frac{x^1}{2} \text{sen} \frac{x^2-x^3}{2} = -\text{cos} X \\ a^2 &= \text{sen} \frac{x^1}{2} \cos \frac{x^2-x^3}{2} = \text{sen} X \cos \theta \\ a^3 &= \cos \frac{x^1}{2} \text{sen} \frac{x^2+x^3}{2} = \text{sen} X \text{ sen} \theta \text{ sen} \phi \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Se utilizamos a segunda igualdade para descrever as coordenadas cartesianas, o elemento de linha obtido para  $S^3$  é:

$$dl^2 = (dx)^2 + \text{sen}^2 X \left[ (d\theta)^2 + \text{sen}^2 \theta (d\phi)^2 \right] \quad (3.4.5)$$

Portanto a segunda igualdade na eq. (4) relaciona dois sistemas de coordenadas sobre  $S^3$  imerso em  $E^4$ , e podemos determinar a transformação de coordenadas que leva diretamente o elemento de linha (3) no elemento de linha (5).

Definindo  $r = \text{sen} X$ , o elemento de linha (5) toma a forma (22)

$$dl^2 = \frac{(dr)^2}{1-r^2} + r^2 \left[ (d\theta)^2 + \text{sen}^2 \theta (d\phi)^2 \right] \quad (3.4.6)$$

Introduzindo uma nova coordenada

$$u = \frac{r}{1 + \frac{1}{24} u^2}$$

e coordenadas cartesianas por

$$x^1 = u \cos\phi \operatorname{sen}\theta$$

$$x^2 = u \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$

$$x^3 = u \cos\theta$$

obtemos

$$dt^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{\left[1 + \frac{1}{24} u^2\right]^2}$$

que é a forma do elemento de linha (2) para espaços maximalmente simétricos, com  $R_0 = +1$ , onde  $u^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ .

A variedade  $S^3$  é, portanto, maximalmente simétrica, admitindo seis vetores de Killing linearmente independentes. Os três vetores de Killing construídos na eq. (2.4.11), correspondentes aos campos vetoriais invariantes à direita sobre  $S^3$ , representam o fato de que a 3-esfera é variedade homogênea, isto é, o tensor métrico é invariante em todos os pontos de  $S^3$ .

Os outros três vetores de Killing que  $S^3$  admite, representam uma simetria adicional, a isotropia, isto é, o fato de que o tensor métrico é invariante sob rotações em torno de qualquer eixo em  $S^3$ , e correspondem, portanto, à existência de um grupo de rotações local em cada ponto. Nesse sentido é que se afirma que todo espaço isotrópico em todo ponto é também homogêneo.

A existência dessa simetria adicional depende crucialmente da forma da métrica da seção de homogeneidade, existindo

apenas quando as componentes do tensor métrico são iguais,  $g_{ij} = \text{diag}(+, +, +)$ . A escolha  $g_{ij} = \text{diag}(A, B, B)$  corresponde à de formação de  $S^3$  no elipsóide  $L^3$ , como se discute no Apêndice A, e a simetria de rotação fica restrita a apenas um eixo. A curva local não é mais constante mas  $L^3$  é homogêneo sob o mesmo grupo de transformações de  $S^3$ . Estes conceitos serão úteis na discussão do que se entende por anisotropia em modelos cosmológicos, apresentada no Capítulo 4.

## CAPÍTULO 4

### COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA

#### 4.1 - ALGUNS CONCEITOS EM COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA

A Cosmologia tem por objeto de estudo a estrutura em larga escala do universo, isto é, sua natureza e evolução no espaço-tempo.

Em escala suficientemente grande, envolvendo distâncias da ordem de  $10^8$  anos luz, o universo apresenta-se como uma distribuição uniforme de galáxias, ou aglomerados de galáxias, de densidade da ordem de  $10^{-31}$  g/cm<sup>3</sup>(\*).

Como as interações nucleares são de curto alcance e a matéria em grandes agregados é eletricamente neutra, a gravitação é, das quatro interações fundamentais, a interação que governa a evolução dos fenômenos em larga escala.

Para a construção de modelos para o universo algumas hipóteses simplificadoras são estabelecidas:

I) As leis físicas locais conhecidas deverão ser as mesmas em qualquer ponto do universo e capazes de determinar a evolução global do universo. Essa é uma forma de expressar o Princípio de Copérnico, segundo o qual não ocupamos uma posição privilegiada no espaço-tempo.

---

(\*)

Estimado para matéria luminosa no universo observado.

II) Se a gravitação governa os fenômenos em larga escala, a Teoria da Relatividade Geral, como teoria de gravitação, deve ser a teoria adequada à descrição do universo.

Nesta teoria o espaço-tempo é suposto uma variedade riemanniana 4-dimensional em que as componentes do tensor métrico,  $g_{\alpha\beta}(x^Y)$ , são funções das coordenadas do espaço-tempo. Localmente, por uma escolha adequada de coordenadas nas vizinhanças de um ponto, o tensor métrico pode sempre ser colocado na forma da métrica de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ .

Uma dada estrutura para o espaço-tempo, acompanhada da escolha dos campos de matéria que são fontes de sua curvatura, constitui um modelo cosmológico, ou modelo para um universo, se geometria e conteúdo material, que se supõe como constituinte desse universo, são solução das equações de campo na Teoria da Relatividade Geral.

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \quad (4.1.1)$$

Nas equações de Einstein  $R_{\alpha\beta}$  é o tensor de Ricci definido por  $R_{\alpha\beta} \equiv R^{\rho}_{\alpha\rho\beta}$ ,  $R \equiv R^{\alpha}_{\alpha}$  é o escalar de curvatura,  $\Lambda$  é uma constante, denominada constante cosmológica e  $T_{\alpha\beta}$  é o tensor momentum energia dos campos de matéria presente no modelo. Outras equações auxiliares poderão estar presentes, pois, por exemplo, se  $T_{\alpha\beta}$  é tensor momentum energia de um campo eletromagnético, as equações de Maxwell devem ser satisfeitas, assim como a estrutura das correntes que são fontes de campo.

III) Supomos a existência de um substrato material que se presta como suporte para os observadores fundamentais, relativamente aos quais se descreve a dinâmica do modelo.

Em geral, o conteúdo material dos modelos é suposto

ser um fluido de partículas de massa não nula, descrito por sua densidade, pressão, pressão anisotrópica, e outros parâmetros termodinâmicos que caracterizam o fluido. Sendo tal fluido a fonte dominante de curvatura, podemos sempre tomar o substrato material coincidente com o conteúdo material<sup>(\*)</sup>.

Introduzimos os observadores fundamentais do modelo como aqueles ligados a, isto é, movendo-se com um elemento de volume do fluido. Tais observadores são denominados observadores comoventes, cujas linhas de universo são determinadas pelo campo de velocidades  $V^\alpha(x)$  de um elemento de volume do fluido. Esses observadores medem, localmente, os parâmetros que descrevem o conteúdo material.

A hipótese mais simples que se pode fazer acerca do movimento da matéria no universo é que ela se move ao longo de uma congruência de linhas de universo tipo-tempo que não se intersectam. Essa hipótese leva o nome de Princípio de Weyl<sup>(24)</sup>.

Construímos o campo de vetores unitários tipo-tempo  $V^\alpha(x)$ , tangente à linha de universo do fluido em cada ponto

$$V^\alpha V_\alpha = 1 \quad (4.1.2)$$

Como por hipótese, as linhas de universo do conteúdo material não se cruzam, podemos sempre encontrar um sistema de coordenadas  $\{x^u_c\}$ , no qual, em qualquer ponto, a 4-velocidade do fluido é expressa por

$$V^\alpha(x^u_c) = \delta^\alpha_0 \quad (4.1.3)$$

(\*) O substrato material é sempre suposto existir, mesmo quando o fluido é constituído de partículas de massa nula. Nesse caso o substrato existe apenas como suporte para os observadores fundamentais mas não contribui para a curvatura.

A existência desse sistema de coordenadas, denominado sistema de coordenadas comovente, é uma hipótese particular usada em cosmologia, e define um sistema de coordenadas privilegiado no sentido de que, nesse sistema, as componentes espaciais da quadrivelocidade de fluido galáctico são nulas, isto é, os diversos elementos de volume do fluido estão em repouso relativamente a um observador ligado à essa rede de coordenadas.

Além disso, a existência de tal sistema de coordenadas privilegiado representa o abandono do tratamento completamente covariante ao problema cosmológico, no sentido de que o sistema de coordenadas é um sistema de coordenadas privilegiado porque está construído sobre o próprio universo. Isso se torna mais evidente no estudo de universos espacialmente homogêneos, onde um "tempo cosmológico" e "seções espaciais" absolutas podem ser definidos.

Nesse sistema de coordenadas

$$V_{\alpha}(x_C^{\mu}) = g_{0\alpha}(x_C^{\mu}) \quad (4.1.4)$$

e a condição de normalização leva-nos a

$$g_{00} = 1 \quad (4.1.5)$$

#### 4.2 - ESPAÇO DE REPOUSO LOCAL E QUANTIDADES CINEMÁTICAS

Seja  $V^{\alpha}(x)$  um campo vetorial definido numa variedade riemanniana. Em cada ponto da variedade o campo  $V^{\alpha}(x)$  determina um subespaço  $H$  do espaço tangente nesse ponto, constituído pelos vetores ortogonais a  $V^{\alpha}$ . Sob certas condições tais subespaço



ços poderão constituir uma hipersuperfície imersa na variedade.

Se  $V^\alpha(x)$  é o campo de velocidade de elementos do fluido galáctico, H será denominado espaço de repouso local do observador comovente com o fluido. Supomos  $V^\alpha(x)$  tipo-tempo, normalizado e introduzimos o tensor

$$h^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta - V^\alpha V_\beta \quad (4.2.1)$$

que tem as seguintes propriedades:

- a)  $h^\alpha_\lambda h^\lambda_\beta = h^\alpha_\beta$  e portanto  $h^\alpha_\beta$  é um projetor
- b)  $h^\alpha_\lambda V^\lambda = 0$  e portanto  $h^\alpha_\beta$  projeta ortogonalmente a  $V^\alpha$ .

Além disso  $h^\alpha_\alpha = 3$  e  $h^\alpha_\beta$  pode ser interpretado como a "métrica" do espaço de repouso local pois

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (V_\alpha dx^\alpha)^2 + h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (4.2.2)$$

e um observador com 4-velocidade  $V^\alpha(x)$  no ponto  $x^\alpha$  associa ao ponto  $x^\alpha + dx^\alpha$  uma separação "espacial"  $dl^2 = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  e uma separação "temporal"  $(dx^0)^2 = (V_\alpha dx^\alpha)^2$ . Sob certas condições, essa separação é única e adquire uma interpretação particular em modelos cosmológicos espacialmente homogêneos, que trataremos adiante.

Pode-se caracterizar o movimento do fluido galáctico por parâmetros cinemáticos associados ao campo de velocidades de elementos do fluido. Para isto, mostra-se que é possível decompor a primeira derivada covariante da 4-velocidade do fluido na forma

$$V_{\alpha\parallel\beta} = a_\alpha V_\beta + \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \theta \quad (4.2.3)$$

onde cada um dos termos dessa decomposição são quantidades que

determinam propriedades da cinemática do fluido e têm a interpretação que se segue<sup>(21,25)</sup>.

a) O parâmetro de expansão

$$\theta = V^{\gamma}{}_{||\gamma} \quad (4.2.4)$$

representa uma expansão pura sem distorção ou rotação. Seu efeito sobre uma esfera de fluido é transformá-la em outra esfera com a mesma orientação, relativamente a um sistema de eixos no espaço de repouso local, porém de volume modificado. Em modelos cuja expansão é anisotrópica deve ser entendido como expansão média sobre a esfera observacional unitária.

b) O vetor aceleração

$$a^{\alpha} = V^{\alpha}{}_{||\sigma} V^{\sigma} \quad (4.2.5)$$

representa o efeito de forças não gravitacionais, anulando-se quando apenas forças inerciais e gravitacionais estão presentes. Nesse caso, as trajetórias dos diversos elementos do fluido são geodésicas.

Investigamos a forma do elemento de linha adequado à descrição de um fluido de partículas não aceleradas, num sistema de coordenadas comoventes. Usando as eqs. (1.3) e (1.5) temos

$$a^{\alpha} = 0 \implies \Gamma^{\alpha}{}_{00} = 0$$

ou equivalentemente

$$g_{0\gamma}|_0 = 0$$

que é idênticamente satisfeita para  $\gamma = 0$  e leva-nos a

$$g_{0i} = g_{0j}(x^j) \quad i, j = 1, 2, 3$$

Portanto

$$ds^2 = (dx^0)^2 + 2g_{0i}(x^j)dx^0dx^i + g_{ij}(x^u)dx^i dx^j \quad (4.2.6)$$

c) O tensor de rotação

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (V_{\alpha||\rho} - V_{\rho||\alpha}) h^{\sigma}_{\alpha} h^{\rho}_{\beta} \quad (4.2.7)$$

representa uma mudança de orientação do fluido sem alterar sua forma ou volume, no sentido de que sua ação sobre uma esfera de fluido é transformá-la em outra esfera de mesmo volume, girada em relação a um sistema de eixos no espaço de repouso local.

Sua intensidade é definida por

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} \quad (4.2.8)$$

Para que o campo de velocidades  $V^{\alpha}(x)$  seja irrotacional devemos ter, usando a eq. (7)

$$\omega_{\alpha\beta} = 0 \implies V_{\alpha||\beta} - V_{\beta||\alpha} = 0$$

Com a hipótese de existência de um sistema de coordenadas comoventes,  $V^{\alpha} = \delta^{\alpha}_0$ ,  $V_{\alpha} = g_{0\alpha}$ , e a equação acima toma a forma

$$g_{0\alpha||\beta} - g_{0\beta||\alpha} = 0$$

que é idênticamente satisfeita se  $\alpha = \beta = 0$  e se reduz a

$$g_{0i||j} - g_{0j||i} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

e portanto  $g_{0i} = \phi_{,i}$ , isto é,  $g_{0i}$  é o gradiente de um escalar.

Assim as trajetórias dos observadores  $V^\alpha = \delta^\alpha_0$  são ortogonais à superfície  $\bar{\phi} = \text{constante}$ .

Podemos encontrar uma transformação de coordenadas que preserva o caráter comoviente do campo de velocidades e anula  $g_{0j}$ . Exigimos para isso que, se  $V^\alpha = \delta^\alpha_0$ , então, sob uma transformação de coordenadas geral

$$\bar{V}^\alpha = \left( \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta} \right) V^\beta = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^0} = \delta^\alpha_0$$

Assim, uma transformação de coordenadas do tipo

$$x^0 \rightarrow \bar{x}^0 = x^0 + f(x^i)$$

$$x^i \rightarrow \bar{x}^i = h^i(x^j)$$

preserva a forma  $V^\alpha = \delta^\alpha_0$ . Particularmente, se tomamos  $h^i(x^j) = x^i$ , temos  $\bar{g}_{0j} = \frac{\partial f}{\partial x^j} g_{00} + g_{0j}$ . Como  $g_{00} = 1$  e  $g_{0j} = \phi_{|j}$ , é suficiente tomar  $f(x^i) = -\phi(x^i)$  para termos  $\bar{g}_{0j} = 0$ .

Portanto um fluido irrotacional será descrito por uma geometria cujo elemento de linha tem a forma

$$ds^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta = (d\bar{x}^0)^2 + g_{ij}(x^0, x^k) d\bar{x}^i d\bar{x}^j \quad (4.2.9)$$

e a seção  $\bar{x}^0 = \text{constante}$  é superfície de simultaneidade para todos os observadores  $\bar{V}^\alpha = \delta^\alpha_0$ . Além disso o espaço de repouso local coincide globalmente com a hipersuperfície  $\bar{x}^0 = \text{constante}$ , pois usando  $V_\alpha = \delta^\alpha_0$  na eq. (1) temos

$$h_{\alpha\beta} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & g_{ij} \end{array} \right)$$

e portanto as linhas de universo do fluido são ortogonais à hipersuperfície  $x^0 = \text{constante}$  em todos os pontos.

O espaço-tempo tem sempre a topologia  $R \times M^3(x^0)$ , onde  $M^3(x)$  é variedade 3-dimensional tipo espaço em todo ponto.

Podemos sempre doar à variedade  $M^3(x^0)$  a estrutura de órbita de um grupo  $G_3$  de transformações simplesmente transitivo, que tomamos sempre como algum tipo da classificação de Bianchi, como, por exemplo, os modelos construídos no Capítulo 2.

Nesse sentido é que afirmamos ser possível uma única separação do espaço-tempo em "tempo cosmológico" e "seções espaciais cósmicas de homogeneidade" absolutos.

Essa separação única do espaço-tempo está em relação direta com o Princípio Cosmológico Restrito: um dado campo escalar  $S(t, x) = S(t, x')$ , característico do conteúdo material que se supõe para o universo (por exemplo, pressão e densidade do fluido) poderia se prestar como mecanismo de sincronização de relógios para todos os observadores no universo.

d) O tensor de distorção ("shear")

$$\sigma_{\alpha\beta} = \left[ \frac{1}{2} (V_{\alpha\parallel\rho} + V_{\rho\parallel\alpha}) - \frac{1}{3} V_{\parallel\gamma}^{\gamma} h_{\alpha\rho} \right] h^{\sigma}_{\alpha} h^{\rho}_{\beta} \quad (4.2.10)$$

representa uma modificação na forma, mantendo invariante o volume do fluido. Por exemplo, a deformação de uma esfera de fluido num elipsóide.

Sua intensidade é definida por

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} \quad (4.2.11)$$

Se o campo de velocidades  $V^{\alpha}(x)$  associado aos elemen-

tos do fluido é irrotacional, para que seja também sem distorção devemos ter

$$\frac{1}{2} (v_{\sigma|\rho} + v_{\rho|\sigma} - 2\Gamma_{\sigma\rho}^{\gamma} v_{\gamma}) - \frac{1}{3} (v^{\gamma} |_{\gamma} + \Gamma_{\tau\gamma}^{\gamma} v^{\tau}) h_{\sigma\rho} = 0$$

Como  $v_{\alpha} = \delta_{\alpha}^0$  e  $v^{\alpha} = \delta_{\alpha}^0$  essa expressão toma a forma

$$- [\sigma\rho, 0] - \frac{1}{3} (g_{\sigma\rho} - v_{\sigma} v_{\rho}) (\ell n \sqrt{-g})|_0 = 0$$

onde usamos  $\Gamma_{\sigma\rho}^{\gamma} = g^{\gamma\epsilon} [\sigma\rho, \epsilon] = \frac{1}{2} g^{\gamma\epsilon} [g_{\sigma\epsilon|\rho} + g_{\epsilon\rho|\sigma} - g_{\sigma\rho|\epsilon}]$  e  $\Gamma_{\tau\gamma}^{\gamma} = (\ell n \sqrt{-g})|_{\tau}$ .

Essa equação é identicamente satisfeita se  $\sigma = 0$ . Se  $\sigma, \rho \neq 0$  temos

$$g_{rs}|_0 = \frac{2}{3} g_{rs} (\ell n \sqrt{-g})|_0 = g_{rs} (\ell n \sqrt{-g})|_0$$

Portanto  $g_{rs}$  pode ter a forma

$$g_{rs} = -R^2(x^0) \gamma_{rs}(x^j) \quad (4.2.12)$$

e o elemento de linha que descreve uma geometria em que  $\sigma_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} = 0$ , tem a forma

$$ds^2 = (dx^0)^2 - R^2(x^0) \gamma_{rs}(x^j) dx^r dx^s \quad (4.2.12)$$

Na realidade a escolha feita na eq. (11) não é a mais geral. Poderíamos ter escolhido  $R^2 = R^2(x^{\mu})$  e a condição  $\sigma_{\alpha\beta} = 0$  ainda seria satisfeita. Entretanto, pode-se mostrar que, mesmo com essa escolha, as equações de Einstein exigem que a eq. (11) seja a forma final de  $g_{rs}$  (24).

Na eq. (12),  $R^2(x^0)$  atua como fator de escala para todas as distâncias medidas na seção  $x^0 = \text{constante}$ . Assim, enquanto os valores das coordenadas dos elementos do fluido são fixas

e independentes da coordenada  $x^0$ , num sistema de coordenadas comoventes, as distâncias entre esses elementos de fluido variam conforme  $R(x^0)$  corresponda a um universo em expansão ou contração.

De posse da estrutura da métrica de um espaço-tempo espacialmente homogêneo que tem distorção nula, eq. (12), e da interpretação do tensor de distorção, que em princípio, representa uma deformação na estrutura da seção de homogeneidade  $x^0 = \text{constante}$  ao longo da evolução do modelo, introduzimos dois possíveis conceitos de isotropia em modelos cosmológicos espacialmente homogêneos.

a) Definição 1: Um universo é dito isotrópico se são nulas todas as componentes do tensor de distorção.

Nesse sentido, se as seções  $x^0 = \text{constante}$  são simplesmente transitivas sob algum grupo de transformações dentre os tipos de Bianchi, então todos os modelos cosmológicos do tipo de Bianchi podem ser isotrópicos. Seu elemento de linha pode ser sempre colocado na forma

$$ds^2 = (dx^0)^2 + R^2(x^0) \left[ (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \right]$$

onde os  $\omega^i(x^j)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) são 1-formas duais aos campos vetoriais invariantes de cada um dos nove diferentes tipos de Bianchi. Vamos denominá-los de universos isotrópicos relativamente à expansão.

b) Definição 2: Um universo é dito isotrópico se são nulas todas as componentes do tensor de distorção e suas seções de homogeneidade são maximalmente simétricas.

Como discutimos no Capítulo 3, apenas os tipos de Bianchi I, V e IX são maximalmente simétricos, isto é, além dos três vetores de Killing do tipo de Bianchi correspondente, admitem três vetores de Killing adicionais associados à existência de um grupo de rotações local, que mantém a métrica invariante sob a escolha de eixos locais arbitrários.

Portanto, de acordo com a definição 2, apenas os modelos cosmológicos Bianchi I, V e IX podem ser considerados isotrópicos.

c) Se o tensor de distorção é não nulo, o universo é anisotrópico, mesmo que a seção de homogeneidade corresponda aos tipos Bianchi I, V e IX, pois é suficiente introduzir uma única direção privilegiada para restringirmos a simetria a rotações em torno do eixo definido por essa direção, como se pode verificar no problema discutido no Apêndice A.

#### 4.3 - REFERENCIAL DE LORENTZ LOCAL: A TÉCNICA DE TETRADAS ORTONORMAIS

Em cosmologia os observadores fundamentais são supostos comoventes com um elemento de fluido, cuja 4-velocidade é o campo  $v^\alpha(x)$ , e que medem localmente as propriedades do fluido. Como, na Teoria da Relatividade Geral, a métrica local é a métrica de Minkowski, podemos utilizar, como método de trabalho, a seguinte construção.

Selecionamos, no espaço-tempo, quatro campos vetoriais linearmente independentes,  $\{X_A \mid A = 0,1,2,3\}$ , e ortonormais, satisfazendo



$$g(X_D, X_A) = \delta_{DA} \quad (4.3.1)$$

$$g(X_A, X_B) = -\delta_{AB} \quad A, B = 1, 2, 3$$

isto é,  $X_D$  é vetor tipo-tempo e  $X_1, X_2, X_3$  tipo espaço.

Com essa escolha

$$g\{X_{(A)}, X_{(B)}\} = \eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (4.3.2)$$

Tal conjunto de campos vetoriais, ortonormal em cada ponto, é denominado uma tetrada e podemos expandi-lo na base de coordenadas

$$X_{(A)} = e_{(A)}^\alpha \partial_\alpha \longleftrightarrow \partial_\alpha = e_\alpha^{(A)} X_{(A)} \quad (4.3.3)$$

onde cada elemento da matriz  $e_{(A)}^\alpha$  representa a componente do vetor  $X_A$  na direção do vetor  $\partial_\alpha$ . Reciprocamente têm papel idêntico os elementos da matriz inversa  $e_\alpha^{(A)}$  (\*).

Tomando  $\{\theta^A\}$  como base de 1-formas duais à base  $\{X_A\}$ , a eq. (1.3.11) permite escrever

$$\theta^A(X_B) = \delta^A_B = e_{(B)}^\alpha e_{(A)}^\alpha \quad (4.3.4)$$

e similarmente

$$dx^\alpha(\partial_\beta) = \delta^\alpha_\beta = e_\beta^{(A)} e_{(A)}^\alpha \quad (4.3.5)$$

O elemento de linha pode ser escrito na forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} e_\alpha^{(A)} e_\beta^{(B)} \theta^A \theta^B = \eta_{AB} \theta^A \theta^B$$

onde

---

(\*) No que se segue índices latinos maiúsculos, ou índices de tetradas, relacionam-se à base  $\{X_A\}$  e índices gregos à base de coordenadas  $\{\partial_\alpha\}$ .

$$\eta_{AB} = g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(A)} e^{\beta}_{(B)} \quad (4.3.6)$$

Invertendo a eq. (6) pelo uso da eq. (5), temos

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{AB} e^{(A)}_{\alpha} e^{(B)}_{\beta} \quad (4.3.7)$$

As eqs. (6) e (7) permitem-nos a interpretação de uma tetrada como uma transformação de coordenadas para um sistema de coordenadas local  $x^A$ , tal que, no ponto considerado, a métrica assume a forma  $\eta_{AB}$ <sup>(\*)</sup>.

Assim uma tetrada define um campo de referenciais de Lorentz locais no sentido de que, nesses referenciais, a métrica é a métrica de Minkowski.

Podemos sempre construir um campo de tetradas ortogonais de forma que o campo de velocidades  $V^{\alpha}(x)$  do fluido defina a tetrada tipo-tempo  $X_0$ , isto é

$$V^{\alpha} = e^{\alpha}_{(0)}$$

ou visto de outra forma

$$V = V^{\alpha} e_{\alpha} = e^{\alpha}_{(0)} e_{\alpha}^{(A)} X_A = X_0$$

Como  $V = V^A X_A$ , temos

$$V^A = \delta^A_0 \quad (4.3.8)$$

Caso a tetrada tipo tempo inicialmente escolhida não coincida com  $V^{\alpha}$ ,  $V^A$  não tem a forma da eq. (8), mas podemos sempre fazer uma transformação de Lorentz local de modo a obtermos  $V^A = \delta^A_0$ .

(\*) Se for possível encontrar  $x^{\alpha} = x^{\alpha}(x^A)$  e  $x^A = x^A(x^{\alpha})$ , as tetradas são ditadas integráveis e o espaço-tempo é plano.

A métrica  $\eta_{AB}$  estabelece correspondência biunívoca entre a base de tetradas e suas 1-formas duais, pois

$$x_A = e^{(A)}_{\alpha} dx^{\alpha} = e^{(A)}_{\alpha} g_{\alpha\beta} dx^{\beta} = e^{(A)}_{\alpha} e^{\beta(B)} g_{\alpha\beta} \theta^B = \eta_{AB} \theta^B \quad (4.3.9)$$

e os índices de tetradas são elevadas e pela matriz  $\eta_{AB}$  e sua inversa  $\eta^{AB} = g^{\alpha\beta} e_{\alpha}^{(A)} e_{\beta}^{(B)}$

$$\begin{aligned} e_{\rho}^{(A)} \eta_{AB} &= g_{\rho\beta} e^{\beta(B)} = e_{\rho(B)} \\ e^{\rho(A)} \eta^{AB} &= g^{\rho\beta} e_{\beta}^{(B)} = e^{\rho(B)} \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Particularmente

$$\begin{aligned} e_{(A)\alpha} &= \eta_{AB} e^{(B)}_{\alpha} = g_{\gamma\beta} e^{\gamma(A)} e^{\beta(B)} e_{\alpha}^{(B)} = \\ &= g_{\alpha\gamma} e^{\gamma(A)} = e_{\alpha(A)} \end{aligned}$$

e portanto a matriz  $e^{\alpha(A)}$  tem dez componentes independentes em cada ponto, isto é, o mesmo número de componentes independentes que o tensor métrico. Dessa forma um campo de tetradas transporta todas as informações sobre a métrica do espaço-tempo.

A idéia de referenciais de Lorentz locais constitui um instrumento poderoso para o estudo da geometria do espaço-tempo. Particularmente, usando as equações de estrutura de Cartan discutidas no Capítulo 1 podemos estabelecer uma técnica para o cálculo das componentes do tensor de curvatura que segue as seguintes etapas:

- a) Dado um elemento de linha  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ , escolhemos 1-formas  $\theta^A = e^{(A)}_{\alpha} dx^{\alpha}$  tais que  $ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B$ .

b) Tomamos a derivada exterior dessas 1-formas

$$d\theta^A = e^{(A)}_{\alpha||\beta} dx^\beta \wedge dx^\alpha = -e^{(A)}_{\alpha||\beta} e^\alpha_{(B)} e^B(C) \theta^B \wedge \theta^C$$

onde a substituição da derivada simples por derivada covariante é possível devido ao fato de que o produto exterior é antissimétrico e as conexões, numa base de coordenadas, são simétricas nos índices inferiores (ver a eq. (1.6.15)). Comparando com a eq. (1.6.2) definimos os coeficientes de rotação de Ricci por

$$\Gamma^A_{BC} = -e^{(A)}_{\alpha||\beta} e^\alpha_{(B)} e^B_{(C)} \quad (4.3.11)$$

o que permite escrever

$$d\theta^A = \Gamma^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C = -\omega^A_B \theta^B \quad (4.3.12)$$

onde fizemos uso das eqs. (1.6.4) e (1.6.11).

A primeira equação de estrutura de Cartan, eq. (1.6.11) permite portanto a leitura direta das 1-formas de rotação  $\omega^A_B$ . Entretanto essa leitura se torna particularmente difícil em métricas com termos não diagonais. Nesses casos fazemos uso da eq. (1.5.16)

$$d\theta^A = -\frac{1}{2} C^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C \quad (4.3.13)$$

de onde determinamos diretamente os coeficientes de estrutura  $C^A_{BC}$  para a seguir determinarmos os coeficientes de rotação de Ricci via eq. (1.7.8)

$$\Gamma_{ABC} = -\frac{1}{2} [C_{ABC} - C_{CAB} + C_{BCA}] \quad (4.3.14)$$

As 1-formas de rotação são determinadas por  $\omega^A_B = \Gamma^A_{BC} \theta^C$ .

c) Tomamos a derivada exterior das 1-formas de rota-

ção e construímos a 2-forma de curvatura da segunda equação de estrutura de Cartan, eq. (1.6.19)

$$\Omega_B^A = d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C \quad (4.3.15)$$

e a eq. (1.6.20) permite a leitura direta das componentes do tensor de curvatura de

$$\Omega_B^A = \frac{1}{2} R_{BCD}^A \theta^C \wedge \theta^D \quad (4.3.16)$$

As eqs. (3), (4), (5), (7) e (11) constituem as ferramentas para a descrição de todas as quantidades e equações físicas no referencial de Lorentz local. Um exemplo detalhado é dado no Capítulo 5, quando projetamos as equações de Maxwell no referencial de Lorentz local. Apresentamos, para uso posterior, a forma das equações da expansão e do tensor de distorção projetadas na base de tetradas

$$\theta = \eta^{AC} v_{A|C} + \eta^{BC} \Gamma_{BC}^A v_A \quad (4.3.17)$$

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} h_A^M h_B^N \left[ v_{M|N} + v_{N|M} + (\Gamma_{MPN} + \Gamma_{NPM}) v^P \right] - \frac{1}{3} \theta h_{AB} \quad (4.3.18)$$

onde  $v_{A|C} = e_C^\alpha v_{A|\alpha}$ .

## CAPÍTULO 5

### MODELOS COSMOLÓGICOS ANISOTRÓPICOS BIANCHI VIII/IX COM MATÉRIA E CAMPO ELETROMAGNÉTICO

#### 5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo exibimos soluções exatas das equações de Einstein para modelos cosmológicos espacialmente homogêneos, fechados e abertos, com expansão anisotrópica.

Designamos por universos abertos e fechados espaços-tempo cujas seções de homogeneidade espacial têm estrutura de  $H^3$  e  $S^3$ , respectivamente. Os elementos de linha adequados à descrição dessas geometrias são descritos nas eqs. (2.5.7) e (2.4.13), correspondendo aos tipos de Bianchi VIII e IX, como foi visto no Capítulo 3. Apresentamos um elemento de linha que unifica os dois casos, obtendo-se cada um deles pela escolha do valor de um dado parâmetro.

O conteúdo material dos modelos é suposto ser um fluido perfeito e campo eletromagnético na direção de anisotropia. Investigamos como a anisotropia e o campo eletromagnético afetam a evolução dos modelos e apresentamos algumas de suas propriedades.

Estas são as primeiras soluções exatas para modelos cosmológicos anisotrópicos espacialmente homogêneos do tipo Bianchi VIII e IX. Alguns dos resultados aqui discutidos foram pu

blicados em Physics Letters(35).

## 5.2 - O ELEMENTO DE LINHA

Consideremos o elemento de linha

$$ds^2 = (dt)^2 - A^2(t) \left[ dx + 4m^2(\theta)d\phi \right]^2 - B^2(t)K^2(\theta) \left[ (d\theta)^2 + \text{sen}^2\theta(d\phi)^2 \right] \quad (5.2.1)$$

onde  $0 \leq x$ ,  $\phi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , e as funções  $m(\theta)$  e  $K(\theta)$  satisfazem:

$$\frac{4m}{K^2 \text{sen}\theta} \frac{dm}{d\theta} = \lambda_1 \quad (5.2.2)$$

$$\frac{d^2K}{d\theta^2} - \frac{1}{K} \left( \frac{dK}{d\theta} \right)^2 + \text{cotg}\theta \frac{dK}{d\theta} - K = \lambda K^3 \quad (5.2.3)$$

Nas equações acima  $\lambda_1$  e  $\lambda$  são constantes, sendo  $\lambda$  proporcional à curvatura da 2-esfera

$$d\sigma^2 = K^2(\theta)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad .$$

As coordenadas  $t$ ,  $x$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  prestam-se como coordenadas comovientes e a estrutura das seções  $t = \text{const}$  depende da escolha do parâmetro  $\lambda$ . Consideremos separadamente a forma do elemento de linha (1) quando tomamos soluções da eq. (3) nos casos  $\lambda = -1$ ,  $\lambda = +1$  e  $\lambda = 0$ .

a)  $\lambda = -1$ ,  $\lambda_1 \neq 0$

Nesse caso uma solução particular da eq. (3) é  $K(\theta)=1$

e a eq. (2) tem  $4m^2 = -2\lambda_1 \cos\theta$  por solução. Portanto o elemento de linha (1) é descrito como

$$ds^2 = (dt)^2 - A^2(t) [dx - 2\lambda_1 \cos\theta d\phi]^2 - B^2(t) [(d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\phi)^2]$$

Definindo  $x^1 = \theta$ ,  $x^2 = \phi$ ,  $x^3 = -\frac{x}{2\lambda_1}$  e  $\hat{A}(t) = -2\lambda_1 A(t)$ , podemos escrever

$$ds^2 = (dt)^2 - \hat{A}^2(t) [dx^3 + \cos x^1 dx^2]^2 - B^2(t) [(dx^1)^2 + \sin^2 x^1 (dx^2)^2]$$

que é o elemento de linha da variedade  $R \times S^3$ . Portanto, no caso  $\lambda = -1$ ,  $\lambda_1 \neq 0$ , o elemento de linha (1) descreve um modelo Bianchi tipo IX.

b)  $\lambda = 1$ ,  $\lambda_1 \neq 0$

Uma solução particular da eq. (3) é  $K(\theta) = \operatorname{tg}\theta$ , e nesse caso a eq. (2) tem por solução  $4m^2 = 2\lambda_1 \left( \frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta \right)$ .

$$4m^2 = 4\lambda_1 \cosh x^2$$

$$\operatorname{tg}^2\theta \sin^2\theta = 4 \sinh^2 x^2$$

Introduzindo ainda  $x^1 = x/2\lambda_1$ ,  $x^3 = 2\phi$  e  $\hat{A} = 2\lambda_1 A$  obtemos

$$ds^2 = (dt)^2 - \hat{A}^2(t) [dx^1 + \cosh x^2 dx^3]^2 - B^2(t) [(dx^2)^2 + \sinh^2 x^2 (dx^3)^2]$$

que é o elemento de linha da variedade  $R \times H^3$ , e no caso  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda = 1$ , o elemento de linha (1) descreve um modelo Bianchi tipo VIII.



c)  $\lambda = 0, \lambda_1 \neq 0$

Uma solução particular da eq. (3)  $\bar{e} K(\theta) = \text{cosec} \theta$  e a eq. (2) tem por solução  $4m^2 = 2\lambda_1 \ell n \text{tg } \theta/2$ .

Definindo  $x^2 = \ell n \text{tg } \theta/2, -0 \leq x^2 < +\infty, x^1 = X/2 \lambda_1, x^3 = \phi$  e  $\tilde{K} = 2\lambda_1 A$ , temos

$$ds^2 = (dt)^2 - \tilde{K}^2(t) [dx^1 + x^2 dx^3]^2 - B^2(t) [(dx^2)^2 + (dx^3)^2] = \\ = (dt)^2 - \tilde{K}^2(t)(\omega^1)^2 - B^2(t) [(\omega^2)^2 + (\omega^3)^2]$$

onde  $\omega^1 = dx^1 + x^2 dx^3, \omega^2 = dx^2, \omega^3 = dx^3$ .

Dessa forma, as seções  $t = \text{const}$ , no caso  $\lambda = 0, \lambda_1 \neq 0$ , constituem um modelo Bianchi tipo II, pois as 1-formas acima satisfazem  $d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3, d\omega^2 = d\omega^3 = 0$ , e a única constante de estrutura não nula  $\bar{e} C^1_{23} = 1$ , como se pode ver da eq.(3.2.16) com a escolha  $a = n_2 = n_3 = 0, n_1 = 1$ . Os modelos  $\lambda = 0, \lambda_1 \neq 0$ , foram discutidos na referência (26).

No caso  $\lambda_1 = \lambda = 0$  obtemos uma geometria Bianchi tipo I, e no caso  $\lambda_1 = 0, \lambda \neq 0$  obtemos modelos tipo Kantowski-Sachs (27).

Podemos resumir todos os casos na seguinte tabela:

Tipos Parâmetros	Bianchi I	Bianchi II	Bianchi VIII	Bianchi IX	Kantowski-Sachs
$\lambda$	0	0	+1	-1	$\neq 0$
$\lambda_1$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0

TABELA 5.2.1 - Geometrias contidas no elemento de linha (1).

Para que possamos estudar a dinâmica dos modelos de -

terminaremos suas curvaturas. Introduzimos um referencial de Lorentz local em que o elemento de linha (1) assume a forma

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2$$

definido pela seguinte escolha de 1-formas<sup>(\*)</sup>

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt \\ \theta^1 &= A(t) [dx + 4m^2(\theta)d\phi] \\ \theta^2 &= B(t)K(\theta)d\theta \\ \theta^3 &= B(t)K(\theta)\text{sen}\theta d\phi \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

A matriz de transformação da base de 1-formas  $dx^\alpha$  para a base local  $\theta^A = e^A_{\alpha} dx^\alpha$ , é portanto

$$e^A_{\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(t) & 0 & 4A(t)m^2(\theta) \\ 0 & 0 & B(t)K(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B(t)K(\theta)\text{sen}\theta \end{vmatrix} \tag{5.2.5}$$

e a correspondente matriz inversa, tem a forma

$$e^{\alpha}_A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A(t)} & 0 & \frac{-4m^2(\theta)}{B(t)K(\theta)\text{sen}\theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{B(t)K(\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{B(t)K(\theta)} \end{vmatrix} \tag{5.2.6}$$

<sup>(\*)</sup>No que se segue, índices latinos maiúsculos denotam índices de tetradas e serão levantados e abaixados com a métrica  $\eta_{AB} = \text{diag}(+, -, -, -)$ . Índices gregos serão levantados e abaixados com a métrica  $g_{\alpha\beta}$ . Para qualquer tipo de índice usamos a convenção de soma de Einstein.

Derivando exteriormente, pelo uso da eq. (1.4.18), e denotando por um ponto a derivada em relação a  $t$  e por uma linha a derivada em relação a  $\theta$ , temos

$$\begin{aligned}d\theta^0 &= 0 \\d\theta^1 &= \frac{\dot{A}}{A} \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{B A m m'}{K^2 B^2 \operatorname{sene} \theta} \theta^2 \wedge \theta^3 \\d\theta^2 &= \frac{\dot{B}}{B} \theta^0 \wedge \theta^2 \\d\theta^3 &= \frac{\dot{B}}{B} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{1}{BK} \left[ \frac{K'}{K} + \cotg \theta \right] \theta^2 \wedge \theta^3\end{aligned}\quad (5.2.7)$$

e a eq. (4.3.13), permite determinar os  $C^A_{BC} = -C^A_{CB}$  não nulos

$$\begin{aligned}C^1_{01} &= -C_{101} = -\frac{\dot{A}}{A} \\C^2_{02} &= -C_{202} = -\frac{\dot{B}}{B} \\C^3_{03} &= -C_{303} = -\frac{\dot{B}}{B} \\C^1_{23} &= -C_{123} = -\frac{2\lambda_1 A}{B^2} \\C^3_{23} &= -C_{323} = -\frac{1}{BK} \left[ \frac{K'}{K} + \cotg \theta \right]\end{aligned}\quad (5.2.8)$$

onde fizemos uso da eq. (2). A eq. (4.3.14) permite a determinação dos coeficientes de rotação de Ricci  $\Gamma_{ABC} = -\Gamma_{BAC}$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_{011} &= \frac{\dot{A}}{A} \\ \Gamma_{022} &= \Gamma_{033} = \frac{\dot{B}}{B} \\ \Gamma_{123} &= -\Gamma_{132} = -\Gamma_{231} = -\frac{\lambda_1 A}{B^2} \\ \Gamma_{233} &= \frac{1}{BK} \left[ \frac{K'}{K} + \cotg \theta \right]\end{aligned}\quad (5.2.9)$$

As 1-formas de rotação  $\omega_B^A = \Gamma_{BC}^A \theta^C = -\omega_B^A$  são

$$\begin{aligned} \omega_1^0 &= \frac{\dot{\bar{A}}}{\bar{A}} \theta^1 & \omega_2^1 &= \frac{\lambda_1^A}{B^2} \theta^3 \\ \omega_2^0 &= \frac{\dot{\bar{B}}}{\bar{B}} \theta^2 & \omega_3^1 &= -\frac{\lambda_1^A}{B^2} \theta^2 \\ \omega_3^0 &= \frac{\dot{\bar{B}}}{\bar{B}} \theta^3 & \omega_3^2 &= -\frac{\lambda_1^A}{B^2} \theta^1 - \frac{1}{BK} \left[ \frac{K'}{K} + \cotg\theta \right] \theta^3 \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

e a segunda equação de estrutura de Cartan, eq. (4.3.15), determina as 2-formas de curvatura  $\Omega_B^A = -\Omega_B^A$  não nulas:

$$\begin{aligned} \Omega_1^0 &= \frac{\bar{K}}{\bar{A}} \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{2\lambda_1^A}{B^2} \left[ \frac{\dot{\bar{A}}}{\bar{A}} - \frac{\dot{\bar{B}}}{\bar{B}} \right] \theta^2 \wedge \theta^3 \\ \Omega_2^0 &= \frac{\bar{B}}{\bar{B}} \theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{\lambda_1^A}{B^2} \left[ \frac{\dot{\bar{A}}}{\bar{A}} - \frac{\dot{\bar{B}}}{\bar{B}} \right] \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega_3^0 &= \frac{\bar{B}}{\bar{B}} \theta^0 \wedge \theta^3 - \frac{\lambda_1^A}{B^2} \left[ \frac{\dot{\bar{A}}}{\bar{A}} - \frac{\dot{\bar{B}}}{\bar{B}} \right] \theta^1 \wedge \theta^2 \\ \Omega_2^1 &= \frac{\lambda_1^A}{B^2} \left[ \frac{\dot{\bar{A}}}{\bar{A}} - \frac{\dot{\bar{B}}}{\bar{B}} \right] \theta^0 \wedge \theta^3 + \left[ \frac{\dot{\bar{A}}\dot{\bar{B}}}{\bar{A}\bar{B}} + \left( \frac{\lambda_1^A}{B^2} \right)^2 \right] \theta^1 \wedge \theta^2 \\ \Omega_3^1 &= -\frac{\lambda_1^A}{B^2} \left[ \frac{\dot{\bar{A}}}{\bar{A}} - \frac{\dot{\bar{B}}}{\bar{B}} \right] \theta^0 \wedge \theta^2 + \left[ \frac{\dot{\bar{A}}\dot{\bar{B}}}{\bar{A}\bar{B}} + \left( \frac{\lambda_1^A}{B^2} \right)^2 \right] \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega_3^2 &= -\frac{2\lambda_1^A}{B^2} \left[ \frac{\dot{\bar{A}}}{\bar{A}} - \frac{\dot{\bar{B}}}{\bar{B}} \right] \theta^0 \wedge \theta^1 - \left[ 3 \left( \frac{\lambda_1^A}{B^2} \right)^2 + \frac{\lambda}{B^3} - \left( \frac{\dot{\bar{B}}}{\bar{B}} \right)^2 \right] \theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

A eq. (4.3.16) permite-nos a leitura direta dos componentes do tensor de curvatura:

$$\begin{aligned}
R^0_{101} &= \ddot{\bar{A}} \\
R^0_{202} &= R^0_{303} = \ddot{\bar{B}} \\
R^0_{123} &= -R^2_{301} = \frac{2\lambda_1 \dot{A}}{B^2} \left( \dot{\bar{A}} - \dot{\bar{B}} \right) \\
R^0_{213} &= R^1_{203} = \frac{\lambda_1 \dot{A}}{B^2} \left( \dot{\bar{A}} - \dot{\bar{B}} \right) \\
R^0_{312} &= R^1_{302} = -\frac{\lambda_1 \dot{A}}{B^2} \left( \dot{\bar{A}} - \dot{\bar{B}} \right) \\
R^1_{313} &= \frac{\dot{\bar{A}}\dot{\bar{B}}}{\bar{A}\bar{B}} + \left( \frac{\lambda_1 \dot{A}}{B^2} \right)^2 \\
R^2_{323} &= \left( \dot{\bar{B}} \right)^2 - \frac{\lambda}{B^2} - 3 \left( \frac{\lambda_1 \dot{A}}{B^2} \right)^2
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Segue-se que as componentes do tensor de Ricci,  $R_{AB} = R^C_{ACB} = \eta^{CD} R_{CADB}$  são

$$\begin{aligned}
R_{00} &= - \left[ \ddot{\bar{A}} + \frac{2\ddot{\bar{B}}}{\bar{B}} \right] \\
R_{11} &= \ddot{\bar{A}} + 2 \left[ \frac{\dot{\bar{A}}\dot{\bar{B}}}{\bar{A}\bar{B}} + \left( \frac{\lambda_1 \dot{A}}{B^2} \right)^2 \right] \\
R_{22} &= R_{33} = \ddot{\bar{B}} + \left( \dot{\bar{B}} \right)^2 + \frac{\dot{\bar{A}}\dot{\bar{B}}}{\bar{A}\bar{B}} - \frac{\lambda}{B^2} - 2 \left( \frac{\lambda_1 \dot{A}}{B^2} \right)^2
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

e o escalar de curvatura  $R = \eta^{AB} R_{AB}$  é dado por

$$R = -2 \left\{ \ddot{\bar{A}} + 2 \left( \frac{\ddot{\bar{B}}}{\bar{B}} + \frac{\dot{\bar{A}}\dot{\bar{B}}}{\bar{A}\bar{B}} \right) + \frac{1}{B^2} \left[ \dot{\bar{B}}^2 - \lambda - \frac{\lambda_1^2 \dot{A}^2}{B^2} \right] \right\} \tag{5.2.14}$$

Consideremos a curvatura da hipersuperfície tridimen-

sional de homogeneidade, num dado instante  $t$  fixo. Para isso, tomamos as funções de escala  $A(t)$  e  $B(t)$  como constantes, a métrica da seção como  $\text{diag}(+,+,+)$ , e obtemos para o escalar de curvatura

$${}^{(3)}R = -\frac{2}{B^2} \left[ \lambda + \frac{\lambda_1^2 A^2}{B^2} \right]$$

Analisamos seus sinais para os diversos tipos de Bianchi contidos no elemento de linha unificado.

a) Bianchi I ( $\lambda = \lambda_1 = 0$ ):  ${}^{(3)}R = 0$  e os modelos são sempre planos, independentemente de serem ou não anisotrópicos relativamente à expansão.

b) Bianchi II ( $\lambda = 0, \lambda_1 \neq 0$ ):  ${}^{(3)}R < 0$ , independentemente da expansão ser ou não anisotrópica.

c) Bianchi VIII ( $\lambda = +1, \lambda_1 \neq 0$ ):  ${}^{(3)}R < 0$  em nossos modelos. Entretanto, Harvey<sup>(28)</sup>, em trabalho recentemente publicado, apresenta estudo sistemático das curvaturas das 3-superfícies de transitividade de todos os modelos de Bianchi, mostrando que esse resultado é particular, ocorrendo apenas quando a métrica da seção tem a forma  $\text{diag}(A,B,B)$ . No caso mais geral  ${}^{(3)}R$  pode ter todos os possíveis sinais.

d) Bianchi IX ( $\lambda = -1, \lambda_1 \neq 0$ ): esse é o caso mais interessante pois

$${}^{(3)}R = \frac{2}{B^2} \left[ 1 - \frac{\lambda_1^2 A^2}{B^2} \right]$$

e portanto

$$(3)_R > 0 \quad \text{se} \quad B^2 > \lambda_1^2 A^2$$

$$(3)_R = 0 \quad \text{se} \quad B^2 = \lambda_1^2 A^2$$

$$(3)_R < 0 \quad \text{se} \quad B^2 < \lambda_1^2 A^2$$

Assim fica claro que a curvatura das seções de homogeneidade nesse caso  $\bar{e}$  afetada pela dinâmica do modelo, isto  $\bar{e}$ , a existência de direções espaciais privilegiadas afeta o caráter da curvatura  $\bar{a}$  medida que o modelo evolui no tempo.

Harvey<sup>(28)</sup> também encontra esse resultado para o caso particular em que a métrica da seção tem dois elementos iguais.

Consideremos também o caso de expansão isotrópica ( $A=B$ ), onde temos

$$(3)_R = \frac{2}{B^2} (1 - \lambda_1^2)$$

e portanto

$$(3)_R > 0 \quad \longrightarrow \quad 0 < \lambda_1 < 1 \quad \text{ou} \quad -1 < \lambda_1 < 0$$

$$(3)_R = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = -1$$

$$(3)_R < 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 > 1 \quad \text{ou} \quad \lambda_1 < -1$$

o que mostra explicitamente que podemos ter, dependendo do sinal do parâmetro  $\lambda_1$ , modelos Bianchi IX, isotrópicos com todos os sinais para a curvatura da seção de homogeneidade. Entretanto, nos modelos estudados nesse trabalho, as equações de Einstein somente permitem solução para modelos isotrópicos com flui $\bar{d}$ o do perfeito como conteúdo material se  $\lambda_1 = 1/2$  e nesse caso  $(3)_R > 0$  sempre.

O fato relevante nessa discussão  $\bar{e}$  que o escalar de

curvatura não é uma quantidade relacionada com as propriedades topológicas do modelo, isto é, o caráter de universo fechado ou aberto não está associado ao sinal de  ${}^{(3)}R$ , como sugerem os modelos cosmológicos tradicionais. A mudança do sinal de  ${}^{(3)}R$  ocorre como consequência da anisotropia na expansão dos modelos mas o volume das seções de homogeneidade é sempre finito ( $V = 8\pi^2 AB^2$ ) em qualquer instante de sua evolução, pois a estrutura topológica  $R \times S^3$  associada às 1-formas invariantes do tipo Bianchi IX é sempre preservada.

Verifica-se ainda que, em nossos modelos, todas as quantidades físicas e geométricas são regulares durante toda sua evolução. Não podemos portanto associar a  ${}^{(3)}R$  uma interpretação física ou geométrica mais consistente.

Acredita-se que através das medidas do parâmetro de deceleração poderíamos definir o tipo de seção de homogeneidade em nosso universo atual<sup>(29)</sup>. Uma questão se coloca para ser analisada com mais atenção: como a anisotropia afeta o valor desse parâmetro? Ou alternativamente, será possível associar o parâmetro de deceleração a  ${}^{(3)}R$ ? Em caso afirmativo, fica claro que num universo anisotrópico tal parâmetro não permite definir qual é a estrutura topológica das seções espaciais.

### 5.3 - O TENSOR MOMENTUM-ENERGIA

Utilizamos em nossos modelos, como campos de matéria, fluido perfeito e campo eletromagnético. O tensor momentum-energia a ser usado nas equações de Einstein tem a forma

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{\text{fluido}} + T_{\alpha\beta}^{\text{e.m.}} \quad (5.3.1)$$



No referencial de Lorentz local definido pelas 1-formas, (2.4), assumimos que um observador comoviente com a matéria tem quadri-velocidade  $V^A = \delta^A_0$ . O tensor momentum-energia do fluido perfeito tem, no referencial de Lorentz local, a forma descrita na teoria da relatividade restrita

$$T_{AB}^{\text{fluido}} = (\rho + p) V_A V_B - p \eta_{AB} \quad (5.3.2)$$

onde  $\rho$  e  $p$  são, respectivamente, a densidade e a pressão do fluido como medidas pelo observador  $V^A$ . Suas componentes não nulas são

$$T_{00} = \rho \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = p \quad (5.3.3)$$

Similarmente, o tensor momentum-energia para o campo eletromagnético tem a forma

$$T_{AB}^{\text{e.m.}} = \frac{1}{4} \eta_{AB} F_{CD} F^{CD} - \eta^{CD} F_{AC} F_{BD} \quad (5.3.4)$$

onde  $F^{AB}$  é o tensor do campo eletromagnético

$$F^{AB} = \begin{vmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (5.3.5)$$

As equações de Maxwell, na base de coordenadas, têm a forma

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = j^\alpha \quad (5.3.6)$$

$$F[\alpha\beta]{}_{;\alpha} = 0 \quad (5.3.7)$$

onde  $j^\alpha$  é o quadrivetor densidade de corrente.

No referencial de Lorentz local  $j^A = j^\alpha e_\alpha^{(A)}$  e  $F^{AB} = F^{\alpha\beta} e_\alpha^{(A)} e_\beta^{(B)}$ , o que permite escrever a eq. (6) na forma

$$F^{\alpha\beta} \parallel_\rho e_\alpha^{(A)} e_\beta^{(B)} e^\rho_{(B)} = j^A$$

onde usamos  $e_\beta^{(B)} e^\rho_{(B)} = \delta_\beta^\rho$ .

Mas

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} \parallel_\rho e_\alpha^{(A)} e_\beta^{(B)} e^\rho_{(C)} &= (F^{\alpha\beta} e_\alpha^{(A)} e_\beta^{(B)}) \parallel_\rho e^\rho_{(C)} - \\ &- F^{\alpha\beta} e_\alpha^{(A)} \parallel_\rho e_\beta^{(B)} e^\rho_{(C)} - F^{\alpha\beta} e_\alpha^{(A)} e_\beta^{(B)} \parallel_\rho e^\rho_{(C)} = \\ &= F^{AB} \parallel_C + \Gamma^A_{\phantom{A}EC} F^{EB} + \Gamma^B_{\phantom{B}EC} F^{AE} \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

onde usamos a definição dos coeficientes de rotação de Ricci eq. (4.3.11). A eq. (6) torna-se:

$$F^{AB} \parallel_B + \Gamma^A_{\phantom{A}EB} F^{EB} + \Gamma^B_{\phantom{B}EB} F^{AE} = j^A \quad (5.3.9)$$

O segundo par de equações de Maxwell, eq. (7), é descrito no referencial de Lorentz local na forma

$$F \llbracket_{AB} \parallel_C \rrbracket + 2F \llbracket_E \parallel_C \rrbracket \Gamma^E_{\phantom{E}AB} = 0 \quad (5.3.10)$$

onde usamos a eq. (8),  $F_{AB} = -F_{BA}$  e  $\Gamma_{ABC} = -\Gamma_{BAC}$ .

Nossos modelos exibem uma direção preferencial definida pela 1-forma  $e^1$ . Introduzimos campos elétrico e magnético paralelos, localmente ao longo da direção determinada por  $e^1$ , de tal forma que nas seções  $t = \text{const}$  não apenas a geometria, mas também o campo eletromagnético, distinguem tal direção de anisotropia.

Se entendemos a homogeneidade espacial no sentido de que, nas seções  $t = \text{const}$ , cada ponto pode ser levado em qualquer outro ponto de maneira que a métrica e o campo sejam preservados, devemos ter

$$\begin{aligned} F_{01} &= -F_{10} = E(t) \\ F_{23} &= -F_{32} = H(t) \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

A 1-forma  $\theta^1$  está associada à 1-forma invariante  $\bar{a}$  esquerda  $\omega^3$  nas seções de homogeneidade. Os campos  $E$  e  $H$  têm a direção do campo vetorial invariante associado, que é a direção do vetor  $\partial/\partial X$ , sendo portanto tangentes a círculos fechados nas seções de homogeneidade (veja as eqs. (2.4.6) e (2.4.10), para  $S^3$ , (2.5.3) e (2.5.5), para  $H^3$  e as transformações discutidas para os casos  $\lambda = \pm 1$  no início desse capítulo).

Tomamos como nulas as componentes do quadrivetor densidade de corrente, e as eqs. (9) e (10), tornam-se

$$\begin{aligned} E | (0) + (\Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) E - (\Gamma_{23}^1 - \Gamma_{32}^1) H &= 0 \\ H | (0) + (\Gamma_{23}^1 - \Gamma_{32}^1) E + (\Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) H &= 0 \end{aligned}$$

e usando os  $\Gamma_{ABC}$  definidos na eq. (2.9) podemos colocá-las na forma

$$(E B^2)^* - 2\lambda_1 A H = 0$$

$$(H B^2)^* + 2\lambda_1 A E = 0$$

Definindo  $E = EB^2$ ,  $H = HB^2$  e introduzindo uma nova coordenada temporal definida por  $d\tilde{t} = \frac{A}{B^2} dt$ , temos

$$\frac{dE}{d\tilde{t}} - 2\lambda_1 H = 0$$

$$\frac{dH}{dt} + 2\lambda_1 E = 0$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} E &= \Sigma_1 \cos 2\lambda_1 \xi + \Sigma_2 \sin 2\lambda_1 \xi \\ H &= -\Sigma_1 \sin 2\lambda_1 \xi + \Sigma_2 \cos 2\lambda_1 \xi \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Aqui  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são constantes de integração relacionadas à densidade de energia eletromagnética medida no referencial de Lorentz local. De fato, da eq. (4), as componentes não nulas do tensor momentum-energia do campo eletromagnético são

$$T_{00} = -T_{11} = T_{22} = T_{33} = \frac{1}{2} (E^2 + H^2) = \frac{\Sigma^2}{2B^4} \quad (5.3.12)$$

onde  $\Sigma^2 = \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2$ . Assim, para um dado valor de  $B$ ,  $\Sigma$  é proporcional à intensidade do campo eletromagnético. Vamos denominá-la parâmetro de intensidade do campo.

#### 5.4 - AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E SUAS SOLUÇÕES

As equações de Einstein no referencial de Lorentz local definido na eq. (2.4),

$$R_{AB} - \frac{1}{2} R \eta_{AB} + \Lambda \eta_{AB} = \kappa (T_{AB}^{\text{fluido}} + T_{AB}^{\text{e.m.}}) \quad (5.4.1)$$

para  $T_{AB}^{\text{fluido}}$  e  $T_{AB}^{\text{e.m.}}$  dados nas eqs. (3.3) e (3.12) se reduzem às seguintes equações independentes

$$R_{00} = \frac{\kappa}{2} (\rho + 3p) + \frac{\kappa \Sigma^2}{2B^4} + \Lambda \quad (5.4.2)$$

$$R_{11} = \frac{\kappa}{2} (\rho - p) - \frac{\kappa \Sigma^2}{2B^4} - \Lambda \quad (5.4.3)$$

$$R_{11} - R_{22} + \frac{\kappa \Sigma^2}{B^4} = 0 \quad (5.4.4)$$

Consideremos as equações (2) e (3) como equações que definem  $\rho$  e  $p$  em nossos modelos. A eq. (4) torna-se uma única equação diferencial para as duas funções métricas  $A$  e  $B$ . Assim, em vez de assumirmos uma dada equação de estado, vamos assumir uma relação entre  $A$  e  $B$ .

Esta é uma alternativa para o que usualmente se faz em Cosmologia, onde, em geral, se escolhe uma equação de estado da forma  $p = \lambda\rho$ , com  $\lambda$  constante.

Ao assumirmos uma relação entre  $A$  e  $B$ , podemos, em princípio, obter para todo instante cósmico uma única equação de estado  $p = p(\rho)$  característica de fluidos isentrópicos. Temos ainda a liberdade na escolha da constante cosmológica  $\Lambda$  para garantirmos que as soluções são fisicamente aceitáveis.

Resolvendo as eqs. (2) e (3) para  $p$  e  $\rho$  temos

$$\kappa\rho = \frac{1}{2} (R_{00} + 3R_{11}) + \frac{\kappa \Sigma^2}{2B^4} + \Lambda \quad (5.4.5)$$

$$\kappa p = \frac{1}{2} (R_{00} - R_{11}) - \frac{\kappa \Sigma^2}{2B^4} - \Lambda \quad (5.4.6)$$

e usando as eqs. (2.13), obtemos para as funções  $A$  e  $B$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 4 \left[ \frac{\lambda_1 A}{B^2} \right]^2 - \frac{\ddot{B}}{B} - \left( \frac{\dot{B}}{B} \right)^2 + \frac{\lambda}{B^2} + \frac{\kappa \Sigma^2}{B^4} = 0 \quad (5.4.7)$$

Para resolvermos a eq. (7) impomos uma relação entre  $A$  e  $B$ . Tomando

$$A = A_0 B^{1/2} \quad (5.4.8)$$

a eq. (7) torna-se

$$\ddot{B} + \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 - \frac{2\lambda}{B^2} - \frac{8\lambda_1^2 A_0^2}{B^3} - \frac{2\kappa\Sigma^2}{B^4} = 0 \quad (5.4.9)$$

Introduzimos uma nova variável temporal definida por

$$d\tilde{t} = B^{-3/2} dt \quad (5.4.10)$$

e com essa transformação a eq. (9) assume a forma

$$B'' = 2\lambda B^2 + 8\lambda_1^2 A_0^2 B + 2\kappa\Sigma^2 \quad (5.4.11)$$

onde  $B' = dB/d\tilde{t}$ .

Tomando  $Y = dB/d\tilde{t}$ , uma integral da eq. (11) é

$$(B')^2 = \frac{4\lambda}{3} B^3 + 8\lambda_1^2 A_0^2 B^2 + 4\kappa\Sigma^2 B + C \quad (5.4.12)$$

onde  $C$  é uma constante de integração suposta sempre maior ou igual a zero.

#### - Propriedades das Soluções

Nossas soluções são definidas apenas para  $B(\tilde{t}) \geq 0$  para que a assinatura da métrica permaneça inalterada devido à escolha (8) e para que a coordenada  $t$ , obtida da eq. (10), assumam sempre valores reais.

Como se vê diretamente da eq. (12), podemos esperar que para  $\lambda = +1$  nossas soluções serão sempre crescentes para  $B(\tilde{t}) \geq 0$ , pois  $(B')^2 \geq 0$  sempre. Para  $\lambda = -1$  podemos esperar a existência de soluções sempre limitadas, pois existe um valor

$B(\tilde{t}) > 0$  para o qual  $(B')^2 \neq 0$ , e  $B(\tilde{t})$  não pode assumir valores maiores que esse, pois  $B'$  torna-se complexo.

A eq. (12) pode sempre ser colocada na forma padrão que define as funções elípticas de Jacobi. As funções jacobianas elípticas são funções periódicas, de período variável, e têm as funções trigonométricas e hiperbólicas como limite.

Um tratamento rigoroso das funções e integrais (ou da eq. (11)), assim como das funções e integrais elípticas é dado em Davis<sup>(30)</sup>. Para um tratamento mais intuitivo das propriedades de funções elípticas indicamos Synge<sup>(31)</sup>. Essas duas referências contêm todas as propriedades de funções elípticas citadas no que se segue.

Obtivemos soluções explícitas para  $B(\tilde{t})$  tomando  $C = 0$  em (12). Consideremos suas soluções nos casos  $\lambda = \pm 1$ .

a) Modelos Bianchi tipo IX ( $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda = -1$ ,  $C = 0$ )

Nesse caso a eq. (12) toma a forma

$$(B')^2 = \frac{4B}{3} \left[ -B^2 + 6\lambda_1^2 A_0^2 B + 3\kappa \Sigma^2 \right]$$

e as raízes de  $(B')^2 = 0$  são  $B_0 = 0$ ,  $B_1 = \sigma \sqrt{1 + \Delta} > 0$  e  $B_2 = \sigma \sqrt{1 - \Delta} < 0$ , onde

$$\sigma = 3\lambda_1^2 A_0^2$$

$$\Delta = \sqrt{1 + \frac{3\kappa \Sigma^2}{\sigma^2}}$$

com  $\Delta \geq 1$  se  $\Sigma^2 \geq 0$ .

Considerando  $0 \leq B \leq \sigma \sqrt{1 + \Delta}$  como domínio fisicamente aceitável de  $B(\tilde{t})$ , o parâmetro de intensidade do campo eletro -

magnético afeta a amplitude do modelo, pois  $B(\tilde{t}) = \sigma(1+\Delta)$  é máximo de  $B(\tilde{t})$ , como se pode ver diretamente da eq. (11).

Caso apenas o fluido perfeito esteja, presente, essa amplitude tem seu valor mínimo descrito por  $B_{\max} = 2\sigma$ .

A eq. (12) é escrita na forma

$$(B')^2 = -\frac{4}{3} B \left[ B - \sigma(1+\Delta) \right] \left[ B - \sigma(1-\Delta) \right]$$

Definindo  $b = \sigma B$ ,  $-\sigma\Delta \leq b \leq \sigma$ , temos

$$(b')^2 = \frac{4}{3} (b-\sigma)(b^2 - \sigma^2 \Delta^2)$$

e introduzindo uma nova mudança de variáveis

$$z^2 = \frac{b+\sigma\Delta}{\sigma(1+\Delta)} \quad 0 \leq z^2 \leq 1$$

temos

$$(z')^2 = \frac{2\sigma\Delta}{3} (1-z^2) \left[ 1 - k^2 z^2 \right]$$

ou

$$\pm \sqrt{\frac{2\sigma\Delta}{3}} (\tilde{t} - \tilde{t}_0) = \int_0^{\sqrt{\frac{b+\sigma\Delta}{\sigma(1+\Delta)}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

que é a forma de Jacobi para integrais elípticas de primeira espécie, onde o parâmetro

$$k = \sqrt{\frac{1+\Delta}{2\Delta}} \leq 1$$



é o módulo da integral elíptica e

$$\sqrt{\frac{b+\sigma\Delta}{\sigma(1+\Delta)}} = \operatorname{sn}\left[\pm\sqrt{\frac{2\sigma\Delta}{3}}(\tilde{t}-\tilde{t}_0)\right]$$

Resolvendo para  $B(\tilde{t})$  e usando as propriedades  $\operatorname{cn}(-x) = \operatorname{cn}(x)$ ,  $\operatorname{cn}^2 x + \operatorname{sn}^2 x = 1$ , obtemos

$$B(\tilde{t}-\tilde{t}_0) = \sigma(1+\Delta) \operatorname{cn}^2\left[\sqrt{\frac{2\sigma\Delta}{3}}(\tilde{t}-\tilde{t}_0)\right] \quad (5.4.13)$$

Funções jacobianas elípticas satisfazem  $\operatorname{sn}(x + 4K) = -\operatorname{sn}(x)$ , onde o período é determinado pela integral elíptica completa

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (5.4.14)$$

que é obviamente uma função de  $k$ , o módulo da integral elíptica de Jacobi, e seus valores são encontrados tabelados em, por exemplo, E. Jahnke e F. Emde (32).

A Figura 5.4.1 apresenta um esboço do gráfico da solução (13), onde nos restringimos ao intervalo

$$-K \leq \sqrt{\frac{2\sigma\Delta}{3}}(\tilde{t}-\tilde{t}_0) \leq K$$

pois  $B(\tilde{t}) = 0$  corresponde a singularidades em nossos modelos.

Quando apenas o fluido perfeito está presente,  $\Sigma = 0$ ,  $\Delta = 1$ ,  $k = 1$ , a função cosseno elíptico tem como limite a função secante hiperbólica e nossa solução toma a forma

$$B(\tilde{t}-\tilde{t}_0) = 2\sigma \operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{2\sigma}{3}}(\tilde{t}-\tilde{t}_0)\right] \quad (5.4.15)$$

Seu comportamento é mostrado na Figura 5.4.1.

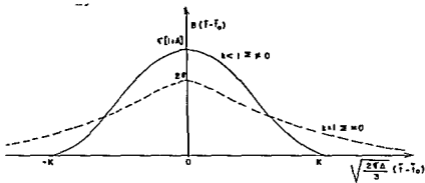


Figura 5.4.1 - Gráficos das eqs. (13) e (15): um campo eletromagnético não nulo reduz o período dos modelos Bianchi IX.

Os modelos Bianchi IX evoluem partindo de uma singularidade, expandindo-se continuamente até meio período do modelo para contraírem-se, evoluindo a outra singularidade. Como o período é determinado por integrais elípticas completas, o valor dessas últimas depende crucialmente do valor do módulo da integral elíptica. Dessa forma a introdução de campos eletromagnéticos afeta o período dos modelos Bianchi IX.

b) Bianchi VIII ( $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda = +1$ ,  $C = 0$ )

Nesse caso a eq. (12) toma a forma

$$(B')^2 = \frac{4}{3} B \left[ B + \sigma(1+\delta) \right] \left[ B - \sigma(1-\delta) \right] \quad (5.4.16)$$

onde  $\sigma = 3\lambda_1^2 A_0^2$  e

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\kappa \Sigma^2}{3\lambda_1^4 A_0^4}}$$

Para termos raízes reais na eq. (15), o parâmetro de intensidade do campo eletromagnético não pode ter valor arbitrário e te-

mos que restringi-lo ao domínio  $0 \leq \kappa \Sigma^2 \leq 3\lambda_1^4 A_0^4$ .

Introduzimos uma nova variável, com a restrição  $\Sigma \neq 0$ , definida por

$$z^2 = \frac{B}{B + \sigma(1-\delta)} \quad \begin{array}{l} 0 \leq B < \infty \\ 0 \leq z^2 \leq 1 \end{array}$$

e a eq. (15) toma a forma

$$(z')^2 = \frac{\sigma(1+\delta)}{3} [1 - z^2] [1 - k^2 z^2] \quad (5.4.17)$$

onde  $k^2 = 2\delta/(1+\delta)$ ,  $0 \leq k^2 \leq 1$ , pois  $0 \leq \delta \leq 1$ . Portanto

$$\sqrt{\frac{\sigma(1+\delta)}{3}} (\tilde{t} - \tilde{t}_0) = \int_0^{\sqrt{\frac{B}{B+\sigma(1-\delta)}}} \frac{dz}{\sqrt{[1-z^2][1-k^2 z^2]}}$$

que é a forma padrão das integrais elípticas de Jacobi, e temos

$$\sqrt{\frac{B}{B+\sigma(1-\delta)}} = \operatorname{sn} \sqrt{\frac{\sigma(1+\delta)}{3}} (\tilde{t} - \tilde{t}_0)$$

Resolvendo para  $B(t)$  temos

$$B(\tilde{t}) = \sigma(1-\delta) \frac{\operatorname{sn}^2 \sqrt{\frac{\sigma(1+\delta)}{3}} (\tilde{t} - \tilde{t}_0)}{\operatorname{cn}^2 \sqrt{\frac{\sigma(1+\delta)}{3}} (\tilde{t} - \tilde{t}_0)} \quad (5.4.18)$$

A Fig. 5.4.2 ilustra o comportamento dessa solução, onde o período das funções elípticas é determinado pela eq. (14).

A solução (18) é restrita a

$$0 \leq \sqrt{\frac{\sigma(1-\delta)}{3}} (\tilde{t} - \tilde{t}_0) \leq K$$

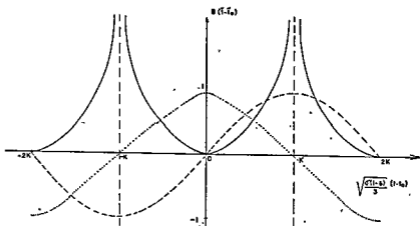


Figura 5.4.2 - O gráfico da eq. (18) é apresentado em linhas contínuas. A linha tracejada é o gráfico de  $sx$ , e a linha pontilhada é o gráfico de  $cnx$ .

para  $\Sigma \neq 0$ , pois se  $\Sigma = 0$ , temos  $\delta = 1$  e a eq. (18) torna-se a solução trivial  $B = 0$ .

Caso  $\Sigma = 0$ , obtemos soluções na variável  $t$ , pois sua interpretação é mais simples. Usando a eq. (10) na eq. (12) e tomando  $C = \Sigma = 0$ , temos

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)^2 = \frac{4}{3} \left[ \frac{B+2\sigma}{B} \right]$$

Integrando diretamente, a solução pode ser escrita na forma paramétrica

$$B(\eta) = 2\sigma \operatorname{tg}^2 \eta$$

$$t(\eta) = \sigma\sqrt{3} \left[ \operatorname{sech} \operatorname{tg} \eta - \ell n (\operatorname{sech} + \operatorname{tg} \eta) \right]$$

Em  $\eta = 0$ ,  $B = 0$ ,  $t = 0$  e se  $\eta \rightarrow \pi/2$ ,  $B \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

5.5 - O COMPORTAMENTO DA DENSIDADE E DA PRESSÃO E OS PARÂMETROS CINEMÁTICOS

O comportamento da densidade e da pressão pode ser inteiramente descrito em termos da função  $B(\tilde{t})$ . Usando as eqs. (2.13), (8), (10), (11) e (12), as eqs. (5) e (6), que usamos para definir  $\rho$  e  $p$  em nossos modelos, tomam a forma

$$\kappa\rho = \left( \frac{5\lambda}{3} B + 15A_0^2 \lambda_1^2 + \frac{15}{2} \kappa \Sigma^2 B^{-1} + 8CB^{-2} + AB^3 \right) B^{-3} \quad (5.5.1)$$

$$\kappa p = \left( \frac{-\lambda}{3} B + 3\lambda_1^2 A_0^2 + \frac{9}{2} \kappa \Sigma^2 B^{-1} + 8CB^{-2} - AB^3 \right) B^{-3} \quad (5.5.2)$$

Por inspeção direta dessas expressões, vemos que em  $B(\tilde{t}) = 0$  a densidade e a pressão divergem. Esses pontos correspondem portanto a singularidades em nossos modelos.

Para que as soluções sejam fisicamente aceitáveis temos que garantir que  $\rho > 0$ , para termos energia positivo definida,  $p/\rho < 1$  e  $dp/d\rho < 1$ , para garantirmos que a velocidade do som  $\bar{c}$  sempre menor que a velocidade da luz, em todo o domínio da coordenada  $\tilde{t}$ . Discutimos essas condições para os modelos Bianchi II/VIII, para possíveis valores de  $C$  e  $\Sigma$ , separadamente.

1) Bianchi IX ( $\lambda = -1$ )

As soluções possíveis da eq. (4.12), com  $B \geq 0$  e  $\lambda = -1$  são sempre limitadas, apresentando dois zeros sucessivos, como por exemplo, a eq. (4.19), e selecionamos apenas um período entre esses zeros sucessivos. Se  $C = \Sigma = 0$ , as singularidades estão localizadas em  $\tilde{t} = \pm\infty$ , como se pode ver da solução (4.15).

Consideramos as seguintes situações, para os diferentes valores de C e  $\Sigma$ :

$$a) C = \Sigma = 0$$

Nesse caso as eqs. (1) e (2) tomam a forma

$$\begin{aligned} \kappa\rho &= (-5B + 15\sigma + 3AB^3) \frac{B^{-3}}{3} \\ \kappa p &= (B + 3\sigma - 3AB^3) \frac{B^{-3}}{3} \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

onde  $\sigma = 3\lambda_1^2 A_0^2$  e  $0 \leq B \leq 2\sigma$ , como mostra a eq. (4.15). A densidade comporta-se próximo à singularidade ( $B(\tilde{t}) = 0$ ) com  $\rho = 5\sigma/B^3$  e atinge seu menor valor em  $B = 2\sigma$ , quando  $\rho = \frac{5}{24\sigma^2} + \Lambda$ . Quando  $B(\tilde{t}) = 0$ ,  $p = \sigma/B^3$ , e a pressão atinge seu menor valor em  $B = 2\sigma$ , quando  $p = \frac{5}{24\sigma^2} - \Lambda$ . Para que a pressão seja positivo-definida, escolhemos  $\Lambda \leq 5/24\sigma^2$  em  $B_{\max}$ , de forma a termos  $p \geq 0$  nesse ponto. Segue-se que  $\rho > 0$ ,  $p > 0$  e  $p/\rho < 1$ . A equação de estado nas vizinhanças de singularidade descrita por  $p = \frac{1}{5} \rho$ . Segue-se também que  $dp/d\rho = \frac{2B+9\sigma}{5(9\sigma-2B)} < 1$  em todo o domínio da coordenada  $\tilde{t}$ .

$$b) C = 0, \Sigma \neq 0$$

As eqs. (1) e (2) tomam a forma

$$\begin{aligned} \kappa\rho &= \frac{5}{3} \left[ -B + 3\sigma + \frac{3}{2} \sigma^2 (\Delta^2 - 1)B^{-1} + \frac{3}{5} \Lambda B^3 \right] B^{-3} \\ \kappa p &= \frac{1}{3} \left[ B + 3\sigma + \frac{9}{2} \sigma^2 (\Delta^2 - 1)B^{-1} - 3 \Lambda B^3 \right] B^{-3} \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

onde  $0 \leq B \leq \sigma(1+\Delta)$  como se vê da eq. (4.13). A densidade comporta-se em  $B(\tilde{t}) = 0$  com  $\rho = \frac{5}{2} \sigma^2 (\Delta^2 - 1)B^{-4}$  e atinge seu menor valor em  $B = \sigma(1+\Delta)$ , quando  $\kappa\rho = \frac{5}{6} \frac{1}{\sigma^2(1+\Delta)^2} + \Lambda$ . Próximo à sin

gularidade  $\kappa p = \frac{3}{2} \sigma^2 (\Delta^2 - 1) B^{-4}$ , e a pressão atinge seu menor valor em  $B = \sigma(1+\Delta)$ , quando  $\kappa p = \frac{1}{6} \frac{11\Delta-1}{\sigma^2(1+\Delta)^3} - \Lambda$ . Escolhemos  $\Lambda = \frac{11\Delta-1}{6\sigma^2(1+\Delta)^3}$  para termos  $p = 0$  em  $B_{\max}$ . A equação de estado nas vizinhanças da singularidade é  $p/\rho = 3/5$ . Temos então  $p > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $p/\rho < 1$  e  $dp/d\rho < 1$  em todo o domínio da variável  $\tilde{\xi}$ . Note-se que não podemos tomar  $\Lambda = 0$  neste caso, pois  $p/\rho > 1$  em  $B_{\max}$ .

c)  $C \neq 0$ ,  $\Sigma \neq 0$

Neste caso, quando  $B(\tilde{\xi}) = 0$ ,  $p = \rho = 8CB^{-5}$  e nas vizinhanças da singularidade  $p/\rho = 1$ . Os menores valores de  $p$  e  $\rho$  ocorrem em  $B = B_{\max}$  e grandes valores de  $C$  e  $\Sigma$  poderão permitir  $p > \rho$  nesse ponto. Escolhemos  $\Lambda$  de forma a termos  $p = 0$  em  $B_{\max}$ , seguindo-se que  $dp/d\rho < 1$ .

II) Bianchi VIII ( $\lambda = 1$ )

Nesses modelos as soluções  $B(\tilde{\xi})$  são sempre monotonicamente crescentes a partir de  $B = 0$ . Verifica-se diretamente da eq. (1) que  $\rho > 0$  sempre. Da eq. (2) torna-se inevitável o surgimento de valores negativos da pressão, pois para grandes valores de  $B$ ,  $p \sim -1/3 B^{-2}$ . Tomamos  $\Lambda = 0$  e verifica-se  $|p| < \rho$  e  $|dp/d\rho| < 1$  em todo o domínio da variável  $\tilde{\xi}$ .

- O Movimento da Matéria

Calculamos agora os parâmetros cinemáticos associados à congruência de curvas  $V^\alpha = \delta^\alpha_0$  comovente com o fluido. Por inspeção direta do elemento de linha descrito na eq. (2.1) vemos que as trajetórias dos diversos elementos do fluido são geo

désicas e não apresentam rotação, pois  $g_{0i} = 0$ , como vimos no Capítulo 4.

No referencial inercial local definido pelas 1-formas da eq. (2.4), temos, usando as eqs. (2.9) e (4.3.17)

$$\begin{aligned} \theta &= - \eta^{BC} \Gamma_{BC}^0 = \\ &= \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{33}^0 = \frac{\dot{A}}{A} + 2 \frac{\dot{B}}{B} \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

onde tomamos  $v^A = \delta^A_0$ .

Podemos expressar a expansão em termos de  $B(\xi)$ . Usando as eqs. (4.8), (4.10) e (4.12), temos

$$\theta^2 = \frac{25}{4} \left( \frac{4}{3} \lambda + 8\lambda_1^2 A_0^2 B^{-1} + 4\kappa\Sigma^2 B^{-2} + cB^{-3} \right) B^{-2} \quad (5.5.6)$$

A expansão é anisotrópica e a anisotropia pode ser medida pela distorção ("shear") da congruência. As componentes não nulas do tensor de distorção são

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{2}{3} \left( \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} \right) \\ \sigma_{22} &= \sigma_{33} = \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \end{aligned}$$

onde usamos a eq. (4.3.18) e as eqs. (2.9).

Sua intensidade  $\bar{\sigma}$  é descrita por

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{AB} \sigma^{AB} = \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} \right)^2$$

ou equivalentemente, na variável  $\xi$ , por

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{15} \theta \quad (5.5.7)$$

onde fizemos uso da eq. (6).



O efeito da anisotropia na densidade de matéria e a mudança nas escalas de tempo quando comparadas com os modelos isotrópicos correspondentes podem ser calculados usando-se as eqs. (6) e (7).

Para a comparação de modelos isotrópicos e anisotrópicos existem, entretanto, algumas dificuldades técnicas: as métricas dos modelos isotrópicos e anisotrópicos devem poder ser igualadas em algum tempo cosmológico, e essa tarefa não é de simples realização e interpretação em modelos que exibem comportamento cíclico como os modelos Bianchi IX. Neste sentido, conferir o Apêndice B, onde integramos o modelo Bianchi IX isotrópico, (Friedman fechado) para uma equação de estado arbitrária  $p = \lambda\rho$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Do ponto de vista observacional, uma questão que está sendo examinada em detalhe é o possível efeito da anisotropia sobre o parâmetro de desaceleração, já citado neste capítulo.

APÊNDICE A

O ELIPSÓIDE  $L^3$  COMO DEFORMAÇÃO DE  $S^3$

Consideremos um reescalonamento de três dos vetores da base do espaço euclidiano  $E^4$ , isto é, vamos tomar uma nova base  $\{\vec{m}_\mu\}$ , definida por

$$\begin{aligned}\vec{m}_0 &= \vec{e}_0 \\ \vec{m}_i &= \alpha_i \vec{e}_i\end{aligned}\quad (A.1)$$

Fazendo uso da álgebra de quatêrnios descrita na eq. (2.2.1), os vetores  $\{\vec{m}_\mu\}$  satisfazem

$$\begin{aligned}\vec{m}_0 \vec{m}_\mu &= \vec{m}_\mu \vec{m}_0 = \vec{m}_0 & \mu &= 0, 1, 2, 3 \\ \vec{m}_i \vec{m}_i &= -(\alpha_i)^2 \vec{m}_0 & i &= 1, 2, 3 \\ \vec{m}_i \vec{m}_k &= \frac{\alpha_i \alpha_k}{\alpha_j} \epsilon_{ijk} \vec{m}_j & i \neq k\end{aligned}\quad (A.2)$$

Descrevemos cada quatêrnio  $\vec{a}$  e seu conjugado por

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a^0 \vec{m}_0 + a^i \vec{m}_i \\ \vec{a}^* &= a^0 \vec{m}_0 - a^i \vec{m}_i\end{aligned}\quad (A.3)$$

de tal forma que

$$N(\vec{a}) = \vec{a} \vec{a}^* = (a^0)^2 + (\alpha_i)^2 (a^i)^2$$

A equação do elipsóide  $L^3$  imerso em  $E^4$  é portanto

$$\vec{a} \cdot \vec{a}^* = (a^0)^2 + (\alpha_1)^2 (a^1)^2 = 1 \quad (A.4)$$

e pode-se mostrar, da mesma forma que no Capítulo 2, que  $L^3$  tem estrutura de grupo de Lie de transformações sobre si próprio.

Os campos invariantes à esquerda sobre  $L^3$  tem a forma

$$\vec{\omega}_i = \omega_i^{\mu\nu} \vec{m}_\nu = \vec{a} \vec{m}_i = a^0 \vec{m}_i - a^j (\alpha_j)^2 \vec{m}_0 + \sum_{j \neq i} a^j \frac{\alpha_j \alpha_i}{\alpha_k} \epsilon_{ijk} \vec{m}_k \quad (A.5)$$

e suas componentes são:

$$\begin{aligned} \omega_1^\mu &= \left\{ -a^1 \alpha_1^2, a^0, a^3 \frac{\alpha_3 \alpha_1}{\alpha_2}, -a^2 \frac{\alpha_2 \alpha_1}{\alpha_3} \right\} \\ \omega_2^\mu &= \left\{ -a^2 \alpha_2^2, -a^3 \frac{\alpha_3 \alpha_2}{\alpha_1}, a^0, a^1 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} \right\} \\ \omega_3^\mu &= \left\{ -a^3 \alpha_3^2, a^2 \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1}, -a^1 \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2}, a^0 \right\} \end{aligned} \quad (A.6)$$

Na base  $\{\partial/\partial a^\mu\}$ , os campos vetoriais invariantes à esquerda satisfazem à álgebra

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} E_3 \\ [E_3, E_1] &= 2 \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2} E_2 \\ [E_2, E_3] &= 2 \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1} E_1 \end{aligned} \quad (A.7)$$

Introduzindo  $X_1 = \frac{1}{2} E_3$ ,  $X_2 = -\frac{1}{2} E_2$ ,  $X_3 = \frac{1}{2} E_1$ , a álgebra (A.7) é colocada na forma

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1} X_3 \\ [X_2, X_3] &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} X_1 \\ [X_3, X_1] &= \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2} X_2 \end{aligned} \quad (A.8)$$

Consideremos o elemento de linha para a variedade  $M^4 = R \times S^3$

$$ds^2 = dt^2 - B^2(t) d\ell^2$$

onde

$$d\ell^2 = \frac{A^2(t)}{B^2(t)} (\omega^3)^2 + (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 \quad (A.9)$$

e as 1-formas  $\{\omega^i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são as 1-formas invariantes sobre  $S^3$  descritas na eq. (2.4.6).

Podemos tomar  $d\ell^2$  como o elemento de linha da seção espacial um dado instante  $t$ -fixo. Sua métrica é construída de formando-se, por um fator constante, num dado instante, os campos invariantes sobre  $S^3$ , isto é:

$$\begin{aligned} g(\tilde{X}_1, \tilde{X}_1) &= g(\tilde{X}_2, \tilde{X}_2) = 1 \\ g(\tilde{X}_3, \tilde{X}_3) &= \frac{A^2}{B^2} \end{aligned}$$

onde definimos  $\tilde{X}_1 = X_2$ ,  $\tilde{X}_2 = X_1$ ,  $\tilde{X}_3 = \frac{A}{B} X_3$ . Os campos  $\{X_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , satisfazem a álgebra descrita na eq. (2.4.1) e os campos  $\{\tilde{X}_i\}$  têm como álgebra

$$\begin{aligned} [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] &= \frac{B}{A} \tilde{X}_3 \\ [\tilde{X}_3, \tilde{X}_1] &= \frac{A}{B} \tilde{X}_2 \\ [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3] &= \frac{A}{B} \tilde{X}_1 \end{aligned} \quad (A.10)$$

Comparando as constantes de estrutura nas eqs. (A.8) e (A.10), resolvemos as constantes  $\alpha_1$

$$\alpha_1 = \frac{A}{B} \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$

Assim, escolher para a variedade  $S^3$  a métrica descrita na eq. (A.9), ou eq. (2.4.13) para  $M^4 = \mathbb{R} \times S^3$ , significa de formar a álgebra dos campos invariantes sobre  $S^3$  e, consequentemente, levar  $S^3$  no elipsóide  $L^3$

$$(a^0)^2 + \frac{A^2}{B^2} (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = 1$$

no mesmo sentido de que o reescalonamento dos vetores da base de  $E^4$  deforma  $S^3$  em  $L^3$ , como se vê da eq. (A.4).

## APÊNDICE B

### OS MODELOS DE FRIEDMANN FECHADOS

Nos modelos de Friedmann a métrica tem a forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ dx^2 + \sigma^2(x)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad (\text{B.1})$$

Escolhemos

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt \\ \theta^1 &= a dx \\ \theta^2 &= a \sigma d\theta \\ \theta^3 &= a \sigma \text{sen}\theta d\phi \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

que nos permite escrever  $ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B$ .

As 1-formas de rotação não nulas são

$$\begin{aligned} \omega^1_0 &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^1 & \omega^2_1 &= \frac{\sigma'}{a\sigma} \theta^2 \\ \omega^2_0 &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^2 & \omega^3_1 &= \frac{\sigma'}{a\sigma} \theta^3 \\ \omega^3_0 &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^3 & \omega^3_2 &= \frac{\cot\theta}{a\sigma} \theta^3 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

As 2-formas de curvatura não nulas tem a forma

$$\begin{aligned} \Omega^1_0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^1 & \Omega^2_1 &= \left[ \frac{\sigma''}{a\sigma} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right] \theta^1 \wedge \theta^2 \\ \Omega^2_0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^2 & \Omega^3_1 &= \left[ \frac{\sigma''}{a\sigma} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right] \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega^3_0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^3 & \Omega^3_2 &= \left[ \frac{1}{a\sigma^2} (\sigma'^2 - 1) - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right] \theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

As componentes não nulas do tensor de curvatura são portanto

$$\begin{aligned}
 R_{0101} &= R_{0202} = R_{0303} = \frac{\ddot{a}}{a} \\
 R_{1212} &= R_{1313} = \left[ \frac{\sigma^u}{2\sigma} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right] \\
 R_{2323} &= \left[ \frac{1}{2\sigma^2} (\sigma'^2 - 1) - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

e as componentes do tensor de Ricci são descritas por

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a} \\
 R_{11} &= \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{a} \left[ \frac{\sigma^u}{\sigma} - \dot{a}^2 \right] \\
 R_{22} &= R_{33} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (\sigma\sigma'' + \sigma'^2 - 1)
 \end{aligned}$$

As equações de Einstein  $R_{AB} - \frac{1}{2} \eta_{AB} R = \kappa T_{AB}$ , para um tensor momentum-energia de fluido perfeito permitem escrever as seguintes equações independentes

$$\begin{aligned}
 R_{00} + R_{11} + 2R_{22} &= 2\kappa\rho \\
 R_{00} + R_{11} - 2R_{22} &= 2\kappa p \\
 R_{00} - R_{11} &= 2\kappa p
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

As duas últimas equações em (7) permitem escrever  $R_{11} = R_{22}$  e, usando (6), temos

$$\sigma\sigma'' - \sigma'^2 + 1 = 0 \implies \sigma(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \\ x \\ \operatorname{senh} x \end{cases}$$

Tomamos  $\sigma(X) = \text{sen} X$  para universos de Friedmann fechados e introduzimos uma equação de estado

$$p = \alpha \rho \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (\text{B.8})$$

As duas primeiras equações em (7) tornam-se

$$\kappa \rho = \frac{3}{a^2} [1 + \dot{a}^2] \quad (\text{B.9})$$

e

$$a\ddot{a} + \Lambda_0 \dot{a}^2 + \Lambda_0 = 0 \quad (\text{B.10})$$

onde  $\Lambda_0 = \frac{3\alpha+1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} \leq \Lambda_0 \leq 2$ .

Definindo  $x = \dot{a}$  temos uma primeira integral da eq.

(10)

$$\frac{da}{dt} = \frac{\sqrt{a_0^{2\Lambda_0} - a^{2\Lambda_0}}}{a^{\Lambda_0}} \quad a \leq a_0$$

ou

$$(t-t_0) = \int_0^a \frac{a^{\Lambda_0}}{\sqrt{a_0^{2\Lambda_0} - a^{2\Lambda_0}}} da \quad a \leq a_0$$

Definindo  $y^{1/2} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\Lambda_0}$  temos

$$t-t_0 = \frac{a_0}{2\Lambda_0} \int_0^{\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\Lambda_0}} \frac{1}{y^{\frac{1}{2\Lambda_0}} - \frac{1}{2}} (1-y)^{-1/2} dy \quad a \leq a_0 \quad (\text{B.11})$$

que é uma função beta incompleta e pode ser expressa por funções hipergeométricas de Gauss <sup>(33,34)</sup>.



A eq. (11) pode ser colocada na forma

$$t-t_0 = \left( \frac{a_0}{1+\Lambda_0} \right) \left( \frac{a}{a_0} \right)^{1+\Lambda_0} F \left( \frac{1}{2}, \Lambda; \Lambda+1; \left( \frac{a}{a_0} \right)^{2\Lambda_0} \right) \quad \frac{a}{a_0} \leq 1 \quad (B.12)$$

onde  $A = \left( \frac{1+\Lambda_0}{2\Lambda_0} \right)$  e  $F(a,b;c;x)$  é função hipergeométrica de Gauss. Em nosso caso, o argumento e os coeficientes de  $F(a,b;c;x)$  satisfazem as condições para convergência absoluta da série.

Ainda é objeto de investigação a possibilidade de reduzir-se a eq. (12) a funções elementares. Caso não se alcance esse objetivo, a eq. (12) permite ainda o tratamento numérico de modelos de Friedmann com qualquer equação de estado.

As soluções existentes na literatura podem ser recuperadas da eq. (12). Por exemplo, se a equação de estado é  $p = \frac{1}{3} \rho$ ,  $\Lambda_0 = 1$ , e podemos definir

$$a = a_0 \operatorname{senn} \eta$$

para termos

$$t-t_0 = \frac{a_0}{2} \operatorname{sen}^2 \eta F \left( \frac{1}{2}, 1; 2; \operatorname{sen}^2 \eta \right)$$

Como (34)

$$F \left( a, \frac{1}{2} + a; 1 + 2a; z \right) = 2^{2a} \left[ 1 + (1-z)^{1/2} \right]^{-2a},$$

verifica-se diretamente que as soluções para modelos de Friedmann com  $p = \frac{1}{3} \rho$  são

$$a = a_0 \operatorname{senn} \eta$$

$$t-t_0 = a_0 (1 - \operatorname{cos} \eta)$$

A eq. (12) permite ainda a determinação dos períodos dos modelos de Friedmann, pois

$$\frac{\tau}{2} = \left(\frac{a_0}{1+\lambda_0}\right) F\left(\frac{1}{2}, A; A+1; 1\right)$$

e usando

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} .$$

temos

$$\tau = 2a_0 \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\lambda_0} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2\lambda_0}\right)} \quad (B.13)$$

onde  $\Gamma$  representa a função gama.

Tomando a fórmula de duplicação de Legendre<sup>(34)</sup>, a eq. (13) pode ser escrita como:

$$\tau = 2^{2 - \frac{1}{\lambda_0}} a_0 \pi \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2\lambda_0}\right)\right]^2} \quad (B.14)$$

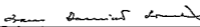
## REFERÊNCIAS

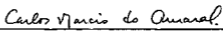
- (1) - Bondi, H. - *Cosmology*, 2<sup>a</sup> edição, Cambridge University Press, (1968), Capítulos 1 e 2.
- (2) - MacCallum, M.A.H. - *Cosmological Models from a Geometrical Point of View*, Cargèse Lectures in Physics, Vol. 6, Gordon and Breach, (1973).
- (3) - Tamman, G.A.; Sandage, A.; Yahil, A. - *The Determination of Cosmological Parameters*, Lecture Notes for the 1979 Les Houches Sommer School, Preprint of the Astronomical Institute of the University of Basel, nº 1, (1979).
- (4) - Gunn, J.E.; Longair, M.S.; Rees, M.J. - *Observational Cosmology - 8th. advanced course*, Swiss Society of Astronomy and Astrophysics, (1978).
- (5) - Longair, M.S. - *Observational Cosmology*, *Rep. Prog. Phys.*, 34, (1971), 1125.
- (6) - Cohn, P.M. - *Lie Groups*, 1<sup>a</sup> edição, Cambridge University Press, (1957).
- (7) - Maia, M.D. - *Notas de aula da 1<sup>a</sup> Escola de Cosmologia e Gravitação*, CBPP, (1978).
- (8) - Boothby, W.M. - *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, 1<sup>a</sup> edição, Academic Press, (1975).
- (9) - Lovelock, D.; Rund, H. - *Tensors, Differential Forms and Variational Principles*, 1<sup>a</sup> edição, John Wiley & Sons, (1975).
- (10) - Von Westenholz, C. - *Differential Forms in Mathematical Physics*, 1<sup>a</sup> edição, North-Holland Publishing Company, (1978).

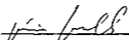
- (11) - Yano, K. - Theory of Lie Derivatives and its Applications, 1ª edição, North-Holland Publishing Co., (1955), Capítulo 1.
- (12) - Yano, K. - Integral Formulas in Riemannian Geometry, 1ª edição, Marcel Dekker, Inc., (1970), Capítulo 1.
- (13) - Gilmore, R. - Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications, 1ª edição, John Wiley & Sons, (1974).
- (14) - Schücking, E.; Ozsvath, I. - The Finite Rotating Universe, Ann. Phys., 55, (1969), 166.
- (15) - Ozsvath, I. - Dust Filled Universes of Class II and Class III, J. Math. Phys., 11, (1970), 2871.
- (16) - Cödel, K. - An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equation of Gravitation, Rev. Mod. Phys., 21, (1949), 447.
- (17) - Goldstein, H. - Classical Mechanics, 1ª edição, Addison Wesley Publishing Company, (1950), pág. 116.
- (18) - Flanders, H. - Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, 1ª edição, Academic Press, (1963), páginas 153.
- (19) - Bianchi, L. - Sugli Spazi a tre Dimensioni che Ammettono un Gruppo Continuo di Movimenti, Mem. Soc. It. delle Sc. (dei XL), 3, (1897), 267.
- (20) - Estabrook, F.B.; Wahlquist, H.D.; Behr, C.G. - Dyadic Analysis of Spatially Homogeneous World Models, J. Math. Phys., 9, (1968), 497.
- (21) - Soares, I.D. - Notas de aula do Curso de Cosmologia, CBPP, 1979.
- (22) - Eisenhart, L.P. - Riemannian Geometry, 1ª edição, Princeton University Press, (1925), capítulos 2 e 6.

- (35) - Soares, I.D.; Assad, M.J.D. - Anisotropic Bianchi VIII/IX  
Cosmological Models with Matter and Electromagnetic Fields,  
Phys. Lett., 66A, (1978), 359.

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

  
Ivano Damião Soares

  
Carlos Marcio do Amaral

  
Mario Novello



Rio de Janeiro, 16 de setembro de 1980