

Luiz Boanerges Peixoto Jr.

CÁLCULO DO NÚMERO TOPOLÓGICO DE SOLUÇÕES
SINGULARES DE CAMPOS DE YANG-MILLS

Tese de MESTRADO -

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

1979

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Carlos Guido Bollini, pela orientação e sugestão da tese;

Ao Prof. Juan José Giambiagi, pela íntima colaboração ao longo do trabalho.

Aos professores e colegas do Grupo de Física Matemática do C.B.P.F. pelo seu apoio;

À CAPES e ao CTA-I.Á.E.-E.A.V. pelo apoio financeiro.

R E S U M O

São apresentadas algumas soluções clássicas, tipo instanton, das equações de Yang-Mills e discutidas algumas de suas propriedades topológicas, dando-se particular destaque ao cálculo do número topológico destas soluções.

É apresentada a classe de soluções, tipo instanton, com parâmetro de extensão λ^2 negativo, das equações de Yang-Mills, e analisa-se a natureza da esfera de raio $|\lambda|$ utilizando-se o método de regularização analítica, concluindo-se que esta solução tem número topológico igual à unidade.

Demonstra-se, utilizando o mesmo formalismo, que a classe de soluções do tipo dipolo tem número topológico nulo.

Uma outra solução do tipo dipolo, obtida através da representação regular para o potencial de dois instantons, utilizando-se a idéia de λ^2 negativo, é apresentada, a qual demonstra-se possuir também número topológico nulo.

S U M Á R I O

1. INTRODUÇÃO

2. A SOLUÇÃO TIPO INSTANTON BPST DAS EQUAÇÕES DE YANG-MILLS
 - 2.1. A teoria dos campos de Yang-Mills
 - 2.2. A solução BPST
 - 2.3. Propriedades topológicas

3. A SOLUÇÃO TIPO MULTI-INSTANTON DE 't HOOFT
 - 3.1. O multi-potencial escalar ρ
 - 3.2. Cálculo do número topológico

4. A SOLUÇÃO TIPO MÉRON DE ALFARO, FUBINI e FURLAN
 - 4.1. Obtenção de uma solução tipo íntanton através de uma transformação conforme
 - 4.2. A solução tipo méron
 - 4.3. Cálculo condensado do número topológico das soluções tipo méron e íntanton.

5. A CLASSE DE SOLUÇÕES COM PARÂMETRO DE "EXTENSÃO" λ^2 NEGATIVO
 - 5.1. O íntanton com λ^2 negativo
 - 5.2. Cálculo do número topológico das soluções tipo dipolo
 - 5.3. Uma outra solução tipo dipolo

6. CONCLUSÕES

1. INTRODUÇÃO

Ondas que se propagam sem dispersão já são conhecidas há algum tempo em hidrodinâmica. O primeiro registro de que se tem notícia desse fenômeno foi feito por John Scott Russel, há cerca de 150 anos atrás, na British Association for the Advancement of Science.

Scott Russel era de opinião de que a estabilidade da onda que ele havia observado resultava de propriedades intrínsecas do movimento da onda e não das circunstâncias da sua geração, idéia esta que não foi aceita imediatamente.

Em 1895, D. J. Korteweg e H. de Vries deram um tratamento analítico completo a certa equação não linear em hidrodinâmica, e mostraram que ondas não dissipativas e localizadas podiam existir [1].

Posteriormente, mostrou-se que, na verdade, estas ondas "solitárias", ou sólitons, como ficaram sendo conhecidas, mantinham-se imunes a dispersão através de um mecanismo delicado. De fato, o que ocorria era que os efeitos dissipativos eram exatamente cancelados por algum fenômeno compensativo, que mostrou-se originar do fato de que as equações de movimento eram não lineares.

O comportamento dos sólitons era bastante curioso, basicamente, por duas razões. A primeira era que eles podiam ser vistos como uma quantidade de energia que está permanentemente confinada em uma certa região do espaço, podendo mover-se sem dissipação. A segunda é que quando duas destas ondas colidem, cada uma delas se afasta do ponto de encontro com a sua

identidade intacta, e que, quando uma onda solitária encontra uma "anti-onda" solitária, ambas se aniquilam e, de suas energias, um outro par s6liton-anti-s6liton 6 criado, imediatamente.

Um comportamento deste tipo 6 extraordin6rio em ondas, mas nos 6 familiar em outro contexto: na f6sica das part6culas.

Recentemente, descobriu-se que ondas n6o dissipativas podiam aparecer tamb6m de algumas das equa66es formuladas com o intuito de descrever part6culas elementares, e o nome s6liton foi estendido a estes objetos. Assim, em f6sica de part6culas, as solu66es est6veis das equa66es cl6ssicas de movimento da teoria dos campos lagrangianos, com energia finita, passaram a ser conhecidas como solu66es tipo s6liton.

O s6liton deve satisfazer as equa66es de Euler-Lagrange do campo, as quais s6o obtidas do princ6pio da m6nima a666o, $\delta S = 0$, e ainda satisfazer a condi66o de estabilidade $\delta^2 S > 0$. Isto pode ser feito de duas maneiras e estas possibilidades distintas classificam as solu66es de acordo com o mecanismo de confinamento em s6litons topol6gicos e n6o-topol6gicos. De modo geral, at6 o presente momento, os s6litons topol6gicos t6m maiores aplica666es e maior import6ncia na f6sica.

Como as equa66es que descrevem as part6culas elementares est6o entre as que admitem solu66es do tipo s6liton, ent6o pode ser que elas existam como part6culas e devem satisfazer certas propriedades espec6ficas [2].

Mesmo que os s6litons como part6culas n6o existam, eles podem entrar no contexto da f6sica de part6culas de uma outra forma, como objetos confinados, n6o somente em uma

determinada região do espaço, como também em um intervalo de tempo. Melhor dizendo, um sôliton é um fenômeno espacial que se propaga com amplitude constante em uma dimensão temporal; no entanto, esta definição pode ser ampliada para o caso de um sôliton que se propague em uma quinta dimensão, sendo um fenômeno do espaço-tempo quadridimensional. Para nós que vivemos em um espaço-tempo quadridimensional, este fenômeno se apresentaria como um objeto confinado no espaço tridimensional durante um certo intervalo de tempo. A estes sôlitons evanescentes, deu-se o nome de instantons.

Como o sôliton propriamente dito, o instanton é um objeto clássico com interpretação em mecânica quântica. Ele pode ser visto, não como uma partícula, mas sim como a transição entre dois estados de um sistema, em uma manifestação do fenômeno conhecido como tunelamento [3].

Os instantons tornaram-se, recentemente, o foco de uma certa quantidade de pesquisas em física de partículas, embora as implicações físicas totais destas qualitativamente novas soluções não tenham sido totalmente compreendidas até os dias de hoje. Mesmo assim, os instantons já serviram para indicar uma possível solução para o problema do $U_A(1)$, e para resolver o problema da desagradável simetria extra presente na QCD simples, e parecem destinados a ter um importante papel na compreensão das teorias de gauge [2].

Em 1975, Polyakov demonstrou a importância das soluções tipo instanton das equações de campo de gauge nos problemas do infravermelho [4], no espaço euclidiano quadridimensional. Ainda no mesmo ano, Belavin, Polyakov, Schwartz e Tyup

kin [5] encontraram uma solução particular do tipo instanton , ou seja, potenciais de campo A_μ que minimizavam localmente a ação S dos campos de Yang-Mills [6], cuja ação era finita no espaço euclidiano quadridimensional.

No capítulo 2 descreveremos esta solução, que ficou conhecida pelo nome de solução BPST . Na seção 2.1 faremos um breve resumo da teoria de Yang-Mills. Na segunda seção, deste mesmo capítulo, falaremos da solução BPST em si , e na terceira, estudaremos as propriedades topológicas desta solução, onde definiremos o índice de Chern e o número topológico e mostraremos como eles estão relacionados.

No capítulo 3 descreveremos a solução multi-instanton de 't Hooft [10], bem como suas propriedades. Na seção 3.1, falaremos do multi-potencial escalar ρ e de como ele está relacionado com a condição de auto-dualidade do tensor das intensidades de campo ($F_{\mu\nu}$). Na seção 3.2, seguindo o procedimento devido a Jackiw, Nohl e Rebbi [14], calcularemos o número topológico da solução multi-instanton e demonstraremos que ele é igual ao número de instantons, no caso de $F_{\mu\nu}$ auto-dual, e igual ao negativo deste número, no caso de $F_{\mu\nu}$ anti-autodual.

No capítulo 4, falaremos sobre a solução do tipo méron apresentada por Alfaro, Fubini e Furlan [15]. Na seção 4.1 mostraremos como os autores, através de uma transformação conforme aplicada sobre a solução tipo méron, trouxeram as singularidades situadas na origem e no infinito para dois pontos arbitrários u e v , e obtendo um potencial do tipo instanton. Na seção 4.2, falaremos sobre a solução do tipo méron e mostraremos que ela possui número topológico semi-inteiro e igual a

1/2. Na seção 4.3, mostraremos que, devido a semelhança entre o comportamento assintótico das soluções tipo méron e instanton, podemos calcular um número topológico genérico, função de um parâmetro a , o qual nos fornece, no caso do méron ($a = i$), o valor 1/2 e, no caso do instanton ($a = 2i$), a unidade.

No capítulo 5, falaremos da classe de soluções com parâmetro de extensão λ^2 negativo introduzida por Bollini, Giambiagi e Tiomno [16]. Na seção 5.1, demonstraremos que, no caso do instanton com λ^2 negativo, o método de regularização analítica remove as singularidades sobre a superfície $x^2 = |\lambda^2|$, e que o número topológico, como no caso λ^2 positivo, é igual a unidade. Na seção 5.2, falaremos sobre a classe de soluções do tipo dipolo apresentada pelos referidos autores no mesmo trabalho, e demonstraremos que ela possui número topológico igual a zero. Na seção 5.3 apresentaremos outra solução do tipo dipolo, obtida a partir da representação regular do potencial de dois instantons, a qual, demonstraremos em seguida, possui também número topológico igual a zero.

No capítulo 6, apresentaremos as conclusões do presente trabalho.

Trabalharemos sempre no espaço quadridimensional euclidiano E_4 , e usaremos $\hbar = c = 1$.

2. A SOLUÇÃO TIPO INSTANTON BPST DAS
EQUAÇÕES DE YANG-MILLS

2.1 - A teoria dos campos de Yang-Mills

Consideremos o lagrangiano correspondente a um campo (pseudo) escalar complexo

$$L(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (2.1.1)$$

cuja corrente podemos mostrar ser dada por

$$j_\mu = i [(\partial_\mu \phi^*) \phi - \phi^* \partial_\mu \phi] \quad (2.1.2)$$

Se aplicarmos uma transformação de fase de primeira espécie ao campo ϕ

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi \quad ; \quad \alpha = \text{constante} \quad (2.1.3)$$

que na sua forma infinitesimal pode ser escrita como

$$\phi \rightarrow (1 + i\alpha) \phi \quad (2.1.4)$$

veremos que o lagrangiano do campo se mantém invariante, e o significado desta invariância de fase pode ser visto mais claramente se fizermos a troca de variáveis

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi + \phi^*) \quad ; \quad \phi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} (\phi^* - \phi)$$

pois neste caso, o lagrangiano (2.1.1) toma a forma

$$L = L_1 + L_2 \quad (2.1.5)$$

com

$$L_a = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial_\mu \phi_a - \frac{1}{2} m \phi_a^2 \quad ; \quad (a = 1, 2)$$

onde L_a é o lagrangiano de um campo (pseudo) escalar real e L é a soma de dois destes lagrangianos com massas iguais, e a transformação de fase (2.1.3) sobre os campos ϕ_1 e ϕ_2 é dada por

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

Assim, (2.1.6) nos diz que o grupo das transformações de fase é, para o lagrangiano (2.1.5), o grupo das rotações no plano em que ϕ_1 e ϕ_2 são os eixos ortogonais. A invariância correspondente implica que para L , os campos ϕ_a não são distinguíveis por algum atributo físico (só o nome os distingue) e daria no mesmo chamar ϕ_1 e ϕ_2 a quaisquer par de combinações ortogonais dos campos originais.

Podemos agora, nos perguntarmos como solucionar, no âmbito da eletrodinâmica quântica (QED), o problema de escrever o lagrangiano de duas partículas de mesma massa e de cargas opostas, que possam ser descritas por um campo (pseudo) escalar complexo, como por exemplo os π^+ e π^- , em interação com o campo eletromagnético. É claro que fazer este lagrangiano invariante frente uma transformação de fase de primeira espécie não resol-

ve o problema, já que sabemos que neste caso os campos ϕ_1 e ϕ_2 são indistinguíveis por quaisquer atributos físicos.

Este problema pode ser resolvido na QED observando-se que o conceito de campos e interação locais está associado a propagação através de pontos vizinhos e não devido a qualquer influência "a distância". Isto está contido no fato de que, no lagrangiano, só existem termos com produtos de campos e suas derivadas, no mesmo ponto. Todavia, ao estudarmos a invariância de fase de primeira espécie, podemos ver que a transformação correspondente (2.1.3) ou (2.1.6) é a mesma em todos os pontos. Isto parece contrário ao conceito de localidade, de modo que é plausível tratar de investigar-se a possibilidade de considerar a invariância frente a rotações independentes em pontos diferentes, ou seja, frente a transformações de fase de segunda espécie

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi \tag{2.1.7}$$

onde agora a fase é uma função arbitrária da posição.

É claro que o termo $\phi^* \phi$ não apresenta nenhum problema, mas o mesmo não ocorre com o termo que contém as derivadas já que

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \phi) = e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu + i \alpha_\mu) \phi$$

onde

$$\alpha_\mu = \partial_\mu \alpha(x)$$

e segue-se que

$$\partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi + (\partial_\mu + i \alpha_\mu) \phi^* (\partial_\mu - i \alpha_\mu) \phi$$

A aparição do gradiente de $\alpha(x)$ impede a invariância do lagrangiano frente a transformação de fase de segunda espécie. No entanto, se nos recordarmos que o campo eletromagnético está definido a menos de um gradiente, veremos que a invariância pode ser restituída se agregarmos o campo eletromagnético como "compensador" no termo da derivada.

$$\partial_\mu \phi \rightarrow (\partial_\mu - i e A_\mu) \phi \equiv D\phi \quad (2.1.8)$$

e exigirmos que a transformação (2.1.7) troque simultaneamente A_μ a A'_μ definido por

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \alpha_\mu \quad (2.1.9)$$

Deste modo, o lagrangiano

$$L = (\partial_\mu + i e A_\mu) \phi^* (\partial_\mu - i e A_\mu) \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (2.1.10)$$

resulta invariante ante a transformação de gauge definida por (2.1.7) e (2.1.9), e é exatamente a soma dos lagrangianos do campo (pseudo) escalar complexo e da interação deste campo com o campo de gauge (no caso, o campo eletromagnético) dado por (2.1.9). Para completar a descrição canônica destes campos é necessário dar também o lagrangiano livre do campo de gauge (eletromagnético) L_G , de modo que o lagrangiano total pode ser escrito como

$$L = L_M + L_{INT} + L_G$$

onde L_M é o lagrangiano dos campos de matéria (no caso, o campo (pseudo) escalar complexo).

Como o campo compensador é o campo eletromagnético, o lagrangiano livre é o próprio lagrangiano de Maxwell que é construído a partir do tensor das intensidades do campo eletromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.1.11)$$

formando o escalar

$$L_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.1.12)$$

que é invariante de medida, já que a transformação (2.1.9) não afeta a (2.1.11).

Podemos observar aqui que ao introduzirmos o campo A_μ , a corrente (2.1.2), modificada segundo (2.1.8), torna-se caracterizada como corrente eletromagnética, já que a ela se acopla o campo A_μ atuando como fonte da mesma e também que, além do campo "compensador", o campo eletromagnético serve ainda como "comparador" já que permite separar fisicamente as partículas de cargas diferentes, ou seja, A_μ dá sentido a um atributo físico (a carga elétrica) que diferencia as partículas implicadas.

Em 1954, Yang e Mills [6] publicaram um trabalho no qual propunham uma teoria, feita em analogia com a QED, na qual uma dada partícula podia interagir com um campo cujo grupo de invariância fosse mais geral do que o eletromagnético.

Naquela época, já se conhecia que o próton e o nêutron eram formas distintas de uma mesma partícula, o nucleon.

Esta era a teoria do isospin na qual o análogo a carga elétrica era a terceira componente do isospin I_3 ; $+\frac{1}{2}$ para o próton e $-\frac{1}{2}$ para o nêutron. Entretanto, ficou a questão de qual campo, análogo ao fóton na QED , poderia interagir com uma carga deste tipo.

No caso da QED o fóton é um campo vetorial ; assim o que fizeram Yang e Mills foi construir uma teoria na qual um campo vetorial interagisse com "cargas" que estivessem contidas em um mesmo grupo de invariância, mais geral (e complicado) que o campo eletromagnético.

Faremos agora um breve resumo do procedimento seguido por Yang e Mills e enunciaremos alguns dos principais resultados.

Tomemos o espinor duplo (de oito componentes) formado através dos espinores do próton e do nêutron ($m = m_p = m_n$)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

É sabido que o lagrangiano livre dos nucleons adquire a forma

$$L = \bar{\psi}(-i \gamma \cdot \partial + m)\psi \quad (2.1.13)$$

e resulta invariante ante transformações "isotópicas" do tipo

$$\psi \rightarrow e^{i \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} \psi ; \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} \quad (2.1.14)$$

onde σ^k ($k = 1, 2, 3$) são as matrizes de Pauli, e a grandeza

conservada neste caso, para $\vec{\alpha}$ arbitrário, é a corrente isotópica

$$J_{\mu}^k = \bar{\Psi} \gamma_{\mu} \sigma^k \Psi \quad (2.1.15)$$

As transformações (2.1.14) são características de um grupo (o SU(2)) de três parâmetros (α^k) que é isomorfo ao grupo de rotações em um espaço tridimensional. A invariância de (2.1.13) frente o grupo de transformações (2.1.14) indica que não há nada no lagrangiano que permita a distinção física dos estados próton e nêutron.

Analogamente ao que foi feito anteriormente, podemos tentar fazer com que o lagrangiano (2.1.13) seja invariante frente a transformações isotópicas locais, ou seja, invariante a diferentes transformações em diferentes pontos, pedindo-se a invariância do lagrangiano frente a transformação (2.1.14) com $\alpha^k = \alpha^k(x)$, função arbitrária da posição. Assim teremos que, para $\vec{\alpha}$ infinitesimal

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \Psi + \partial_{\mu} \Psi + i \vec{\alpha}_{\mu} \cdot \vec{\sigma} \Psi + i \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma} \partial_{\mu} \Psi \\ \partial_{\mu} \Psi + \approx e^{i \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} (\partial_{\mu} + i \vec{\alpha}_{\mu} \cdot \vec{\sigma}) \Psi \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

e para compensar o termo em gradiente de $\vec{\alpha}$, devemos novamente introduzir um campo "compensador" \vec{D}_{μ} (D_{μ}^k ; $k=1, 2, 3$) que se agregue às derivadas, no lagrangiano, o que faz com que agora possamos distinguir o próton e o nêutron devido a suas "cargas isotópicas" ($+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, respectivamente), formando a combinação

$$\partial_\mu - i g \vec{b}_\mu \cdot \vec{\sigma} \quad (2.1.17)$$

onde g é a constante de acoplamento. Assim em lugar de (2.1.13), teremos:

$$L = -i \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu - i g \vec{b}_\mu \cdot \vec{\sigma}) \Psi + m \bar{\Psi} \Psi \quad (2.1.18)$$

Para manter a invariância de (2.1.18) ante transformações de fase de segunda espécie, os campos b_μ^k devem se transformar de uma maneira mais complicada que (2.1.9) dado que as matrizes de Pauli não comutam entre si, ou seja, o grupo das transformações não é abeliano. De fato, é possível mostrar-se, utilizando as relações de comutação,

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2 i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (2.1.19)$$

que

$$b_\mu^\ell = b_\mu^\ell + \frac{1}{g} \alpha_\mu^\ell - 2 \alpha^i b_\mu^j \epsilon_{ij\ell} \quad (2.1.20)$$

Analogamente ao que foi feito para o lagrangiano (2.1.10), precisamos adicionar a (2.1.18) o lagrangiano livre correspondente aos campos de Yang-Mills L_{YM} , introduzidos por ~~(2.1.17)~~, o qual deve ser, como o caso anterior, um invariante de gauge, ou seja, deve ser invariante frente a transformação definida por (2.1.20). Deste modo, o lagrangiano total é dado por

$$L = L_M + L_{INT} + L_{YM}$$

e é possível mostrar que o campo de gauge só pode estar contido

no lagrangiano livre dos campos de Yang-Mills L_{YM} , mediante a combinação que, analogamente ao caso eletromagnético, é chamada de tensor da intensidade dos campos de Yang-Mills

$$f_{\mu\nu}^j = \partial_\mu b_\nu^j - \partial_\nu b_\mu^j - 2g \epsilon_{jkl} b_\mu^k b_\nu^l \quad (2.1.21)$$

e que o lagrangiano livre (invariante de gauge) mais simples que contém $f_{\mu\nu}^j$ é o análogo a (2.1.12)

$$L_{YM} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^j \cdot f^{\mu\nu j} \quad (2.1.22)$$

cuja ação é dada por

$$S_{YM} = \frac{1}{4} \int f_{\mu\nu}^j f_j^{\mu\nu} d^4x \quad (2.1.23)$$

É possível mostrar que a equação de campo, na ausência de fontes, que minimiza (2.1.23) é dada por

$$\partial_\mu f_{\mu\nu}^j - 2g \epsilon_{jkl} b_\nu^k f_{\mu\nu}^l = f_{\mu\nu;j}^j = 0 \quad (2.1.24)$$

que é conhecida como equação de Yang-Mills.

Podemos mostrar também que frente a transformação de gauge definida por (2.1.20), para \vec{a} infinitesimal,

$$f_{\mu\nu}^{j'} = f_{\mu\nu}^j - 2 \epsilon_{jkl} a^k f_{\mu\nu}^l \quad (2.1.25)$$

É nosso desejo assinalar que os resultados acima podem ser generalizados para o caso em que o grupo de transformações seja um grupo contínuo de Lie.

Tomemos um lagrangiano da forma $L(\Psi, \partial_\mu \Psi)$ e por outro lado, um grupo contínuo de transformações cujos elementos dependem de um conjunto de n parâmetros reais α^k ($k=1,2,\dots,n$). As distintas componentes do campo "básico", que denotaremos por Ψ^A , constituem uma base para a representação matricial do grupo. Isto significa que as transformações do grupo podem ser expressas na forma

$$\Psi^{A'} = U_B^A(\alpha) \Psi^B$$

onde as matrizes U_B^A satisfazem todas as relações do grupo, e, em particular, ao elemento identidade corresponde a matriz δ_B^A . Os parâmetros podem ser sempre escolhidos de modo que a $\alpha^k = 0$ corresponda à unidade

$$U_B^A(0) = \delta_B^A$$

e assim para α infinitesimal

$$U_B^A(\alpha) \approx \delta_B^A + \alpha^k G_{kB}^A$$

relação esta que simbolizaremos simplesmente por

$$U(\alpha) \approx 1 + \alpha^k G_k$$

onde

$$G_k = \left. \frac{\partial U}{\partial \alpha^k} \right|_{\alpha=0} ; k = 1, 2, \dots, n$$

são os geradores infinitesimais do grupo, e possuem a propriedade

de formar uma algebra de Lie

$$[G_k, G_l] = C_{kl}^m G_m \quad (2.1.26)$$

com

$$C_{kl}^m = - C_{lk}^m$$

onde C_{kl}^m são as constantes de estrutura do grupo.

No caso anterior das transformações isotópicas e $i \vec{a}(x) \vec{\sigma}$, os geradores são as três matrizes de Pauli ($G_k = i \sigma_k$), que satisfazem a (2.1.19), tendo

$$C_{ij}^k = - 2 \epsilon_{ijk} \quad (2.1.27)$$

como constantes de estrutura.

Tendo-se em conta (2.1.26) e (2.1.27) e introduzindo a definição de "conexão de gauge"

$$E_\mu = g b_\mu^k G_k \quad (2.1.28)$$

e conseqüentemente

$$F_{\mu\nu} = g f_{\mu\nu}^j G_j \quad (2.1.29)$$

é relativamente fácil mostrar que (2.1.20), (2.1.25), (2.1.21) e (2.1.24) podem agora ser escritos em uma forma mais geral como

$$B_L^i = U^{-1}(\alpha) B_\mu U(\alpha) - U^{-1}(\alpha) \partial_\mu U(\alpha) \quad (2.1.30)$$

$$F'_{\mu\nu} = U^{-1}(\alpha) F_{\mu\nu} U(\alpha) \quad (2.1.31)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu] \quad (2.1.32)$$

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} + [B_\nu, F_{\mu\nu}] = 0 \quad (2.1.33)$$

Queremos aqui ressaltar que alguns autores preferem utilizar (2.1.19) na forma

$$\left[\frac{\sigma_i}{2i}, \frac{\sigma_j}{2i} \right] = \epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2i}$$

tomando neste caso

$$G_k = \frac{\sigma_k}{2i} \quad ; \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.1.34)$$

como geradores do grupo de transformação e

$$C_{ij}^k = \epsilon_{ijk}$$

como constantes de estrutura, opção esta que não altera a forma geral das equações (2.1.30), (2.1.31), (2.1.32) e (2.1.33).

Para aqueles que desejarem uma discussão mais profunda e rigorosa do assunto, aconselhamos a referência [7].

2.2. - A solução BPST

Em 1975, Belavin, Polyakov, Schwartz e Tyupkin [5] encontraram uma solução particular do tipo instanton das

equações de Yang-Mills, ou seja, potenciais de campo A_μ (tipo instanton) que minimizavam localmente a ação dos campos de Yang-Mills e cuja ação era finita no espaço euclidiano quadridimensional, solução esta que ficou conhecida pelo nome BPST.

É nosso desejo aqui fazer uma descrição da solução BPST das equações de Yang-Mills, mas antes disto, faremos algumas considerações preliminares adicionais.

É possível mostrar que além de satisfazer a equação de Yang-Mills (2.1.24), $f_{\mu\nu}^j$ satisfaz a identidade de Bianchi.

$$f_{\mu\nu;\alpha}^j + f_{\alpha\mu;\nu}^j + f_{\nu\alpha;\mu}^j \equiv 0 \quad (2.2.1)$$

o que pode ser verificado a partir da própria definição do tensor e do fato de que as constantes de estrutura satisfazem a identidade de Jacobi

$$[c^k, [c^l, c^m]] + [c^l, [c^m, c^k]] + [c^m, [c^k, c^l]] \equiv 0$$

de onde podemos deduzir a relação

$$[c^k, c^l] = c^{klm} c^m \quad ; \quad c^{klm} = c_{lm}^k$$

que definem a representação adjunta do grupo de transformações.

Podemos escrever a identidade de Bianchi, equação (2.2.1), em uma forma mais compacta, utilizando o tensor totalmente anti-simétrico de quatro índices

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\alpha} \varepsilon_{\lambda\beta\sigma\theta} f_{\sigma\theta;\beta}^j \equiv 0$$

e fixando agora μ, ν, α , teremos então que

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\beta\sigma\theta} f_{\sigma\theta;\beta}^j \equiv 0$$

e agora, se definirmos o tensor dual de $f_{\mu\nu}^j$ como

$$\tilde{f}_{\mu\nu}^j = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} f_{\alpha\beta}^j \quad (2.2.2)$$

segue que

$$\tilde{f}_{\mu\nu;\nu}^j \equiv 0 \quad (2.2.3)$$

que é equivalente a identidade de Bianchi.

Assim temos que o tensor da intensidade dos campos de Yang-Mills $f_{\mu\nu}^j$ satisfaz simultaneamente as equações (2.1.24) e (2.2.3).

No caso de

$$\tilde{f}_{\mu\nu}^j = \pm f_{\mu\nu}^j$$

dizemos que $f_{\mu\nu}^j$ é respectivamente, autodual ou anti-autodual, e a identidade de Bianchi dada pela equação (2.2.3) se reduz a equação de Yang-Mills.

Para melhor distinguir estes dois tipos de soluções escreveremos a solução autodual como $\tilde{f}_{\mu\nu}^j$, de modo que

$$\tilde{f}_{\mu\nu}^j = f_{\mu\nu}^j$$

e a solução anti-autodual como $\tilde{f}_{\mu\nu}^j$, onde agora

$$\tilde{f}_{\mu\nu}^j = -f_{\mu\nu}^j$$

sendo ambas soluções das equações de Yang-Mills.

Se tomarmos como geradores do SU(2) os G_i definidos pela equação (2.1.34) então segue que

$$F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}^j \frac{\sigma_j}{2i} \quad ; \quad (g = 1) \quad (2.2.4)$$

$$\bar{F}_{\mu\nu} = \bar{f}_{\mu\nu}^j \frac{\sigma_j}{2i} \quad ; \quad (g = 1) \quad (2.2.5)$$

Embora não seja necessário tomemos, por questão de comodidade, o grupo O(4) cujos geradores são produtos diretos dos geradores do grupo SU(2)

$$O(4) = SU(2) \times SU(2)$$

cujos seis geradores são dados por

$$\Sigma_{\mu\nu} = i \begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad ; \quad [\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\alpha\beta}] = \epsilon_{\mu\nu\theta\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\theta\xi} \Sigma_{\sigma\xi} \quad (2.2.6)$$

onde $\sigma_{\mu\nu}$ e $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ são matrizes auto-duais e anti-auto-duais, respectivamente, construídas a partir das matrizes de Pauli segundo

$$\sigma_{\mu\nu} = \begin{cases} \sigma_{ij} = \epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} \\ \sigma_{i4} = \frac{\sigma_i}{2} = -\sigma_{4i} \end{cases} \quad ; \quad \bar{\sigma}_{\mu\nu} = \begin{cases} \bar{\sigma}_{ij} = \epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} \\ \bar{\sigma}_{i4} = -\frac{\sigma_i}{2} = -\bar{\sigma}_{4i} \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Procedendo assim, podemos obter uma representação mais compacta para as soluções dadas pelas equações (2.2.4) e (2.2.5)

$$F_{\mu\nu}^{(4)} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & F_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (2.2.8)$$

e, de modo análogo, podemos escrever

$$A_{\mu}^{(4)} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{\mu} & 0 \\ 0 & A_{\mu} \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

e das equações (2.2.8) e (2.2.9) podemos ver claramente que, analogamente a (2.1.32), podemos escrever

$$F_{\mu\nu}^{(4)} = \partial_{\mu} A_{\nu}^{(4)} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{(4)} + [A_{\mu}^{(4)}, A_{\nu}^{(4)}] \quad (2.2.10)$$

É conveniente definirmos agora

$$F_{\mu\nu}^{(4)} = F_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \quad (2.2.11)$$

$$A_{\mu}^{(4)} = A_{\mu}^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \quad (2.2.12)$$

que são anti-simétricos em α, β . Com as definições acima, é possível mostrar que a seguinte relação é satisfeita

$$\epsilon_{\mu\nu\theta\sigma} F_{\theta\sigma}^{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\theta\sigma} F_{\mu\nu}^{\theta\sigma} \quad (2.2.13)$$

além do que, da equação (2.2.10), segue que

$$F_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \partial_{\mu} A_{\nu}^{\alpha\beta} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{\alpha\beta} - A_{\nu}^{\theta\sigma} A_{\mu}^{\xi\eta} \epsilon_{\theta\sigma\lambda\alpha} \epsilon_{\xi\eta\lambda\beta} \quad (2.2.14)$$

Podemos observar a vantagem de se utilizar a notação do grupo $O(4)$ é que nela os índices do grupo de gauge e do espaço-tempo são análogos.

Se agora, procurarmos uma solução de (2.2.13) que seja também solução de (2.2.14) e que seja invariante a rotações simultâneas do espaço ordinário e do espaço-tempo, veremos que a única possibilidade é fazermos

$$A_{\mu}^{\alpha\beta} = f(x)(x_{\alpha} \delta_{\mu\beta} - x_{\beta} \delta_{\mu\alpha}) \quad (2.2.15)$$

onde $f(x)$ é uma função a ser determinada.

Substituindo-se a equação (2.2.15) em (2.2.14) segue que

$$F_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = (2f - 2x^2 f^2)(\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha}) + \\ (\frac{f'}{x} + 2f^2)(x_{\alpha} x_{\mu} \delta_{\nu\beta} - x_{\alpha} x_{\nu} \delta_{\mu\beta} + x_{\beta} x_{\nu} \delta_{\mu\alpha} - x_{\beta} x_{\mu} \delta_{\nu\alpha})$$

e podemos ver que o segundo termo não satisfaz a equação (2.2.13), o que significa que

$$\frac{f'}{x} + 2f^2 = 0$$

cujá solução é

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + \lambda^2}$$

onde λ é um parâmetro arbitrário.

Assim segue que

$$F_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \frac{2\lambda^2}{(x^2 + \lambda^2)^2} (\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha})$$

$$A_{\mu}^{\alpha\beta} = \frac{1}{x^2 + \lambda^2} (x_{\alpha} \delta_{\mu\beta} - x_{\beta} \delta_{\mu\alpha})$$

e substituindo estes resultados nas equações (2.2.11) e (2.2.12) e estas por sua vez em (2.2.8) e (2.2.9), obteremos que

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\mu} &= -\frac{2i}{x^2 + \lambda^2} \sigma_{\mu\nu} x_{\nu} \quad ; \quad \bar{F}_{\mu\nu} = \frac{4i \lambda^2}{(x^2 + \lambda^2)^2} \sigma_{\mu\nu} \\ A_{\mu} &= -\frac{2i}{x^2 + \lambda^2} \bar{\sigma}_{\mu\nu} x_{\nu} \quad ; \quad F_{\mu\nu} = \frac{4i \lambda^2}{(x^2 + \lambda^2)^2} \bar{\sigma}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

que são as soluções BPST das equações de Yang-Mills.

É nosso desejo ainda ressaltar que os potenciais de campo A_{μ} e \bar{A}_{μ} podem ser escritos de uma outra forma.

Observemos, que uma transformação genérica do $SU(2)$, é dada por

$$g(x) = e^{\vec{\alpha}(x) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2i}} = \eta_4(x) + i \vec{\eta}(x) \cdot \vec{\sigma} \quad (2.2.17)$$

$$\eta_4^2 + |\vec{\eta}|^2 = 1$$

tomando na equação acima $\vec{\alpha}(x) = -2\hat{\xi}\hat{x}$, segue que

$$g(x) = g(\xi, \theta, \phi) = e^{i\hat{\xi}\hat{x} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \xi + i \operatorname{sen} \xi (\hat{x} \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.2.18)$$

$$0 \leq \xi, \theta \leq \pi \quad ; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

e utilizando-se a parametrização

$$\cos \xi = \frac{x_4}{|x|} ; \quad \text{sen } \xi = \frac{|\vec{x}|}{|x|} ; \quad |x| = \sqrt{x_4^2 + |\vec{x}|^2}$$

teremos que

$$g(x) = \frac{x_4 + i\vec{x} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{x^2}} ; \quad g^{-1}(x) = g^\dagger(x), \quad (2.2.19)$$

e agora calculando $g^{-1}(x)\partial_\mu g(x)$ e $g(x)\partial_\mu g^{-1}(x)$ teremos que

$$g^{-1}(x)\partial_\mu g(x) = -\frac{2i \bar{\sigma}_{\mu\nu} x_\nu}{x^2} \quad (2.2.20)$$

$$g(x)\partial_\mu g^{-1}(x) = -\frac{2i \sigma_{\mu\nu} x_\nu}{x^2}$$

onde agora, de (2.2.16) segue que

$$A_\mu = \frac{x^2}{x^2 + \lambda^2} g^{-1}(x)\partial_\mu g(x) ; \quad \bar{A}_\mu = \frac{x^2}{x^2 + \lambda^2} g(x)\partial_\mu g^{-1}(x) \quad (2.2.21)$$

As soluções \bar{A}_μ e A_μ são conhecidas como soluções tipo instanton e anti-instanton ou pseudo partícula e anti-pseudopartícula respectivamente, e dependem de 5 parâmetros : quatro para especificar a posição e um (λ) para especificar o tamanho.

É interessante observar que se aplicarmos uma transformação de gauge a $A_\mu = 0$ e $F_{\mu\nu} = 0$, veremos de (2.1.30) e (2.1.31) que

$$A'_\mu = g^{-1}(x)\partial_\mu g(x) ; \quad F'_{\mu\nu} = 0$$

$$\bar{A}'_\mu = g(x)\partial_\mu g^{-1}(x) ; \quad \bar{F}'_{\mu\nu} = 0$$

são puro gauge.

Assim, das equações (2.2.16) e (2.2.21), segue-se que as soluções A_μ^{BPST} e $\bar{A}_\mu^{\text{BPST}}$ comportam-se no infinito como puro gauge, o que é de nosso interesse, já que os campos que nos interessam não devem possuir fontes no infinito, ou seja,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} F_{\mu\nu} = 0$$

Para que a condição acima seja satisfeita, podemos efetivamente mostrar que é suficiente que A_μ se comporte no infinito como puro gauge. Assim se

$$A_\mu = g^{-1}(x) \partial_\mu g(x)$$

teremos que

$$\partial_\mu A_\nu = \partial_\mu [g^{-1}(x) \partial_\nu g(x)] = \partial_\mu g^{-1}(x) \partial_\nu g(x) + g^{-1}(x) \partial_\mu \partial_\nu g(x)$$

como

$$\partial_\mu (g^{-1}(x) g(x)) = \partial_\mu g^{-1}(x) \cdot g(x) + g^{-1}(x) \partial_\mu g(x) = 0$$

segue-se que

$$\partial_\mu g^{-1}(x) = -g^{-1}(x) \cdot \partial_\mu g(x) \cdot g^{-1}(x)$$

e do fato de que $F_{\mu\nu}$ é anti-simétrico e de que $g(x)$ é regular neste limite, podemos desprezar a contribuição da parte simétrica

$$g^{-1}(x) \partial_\mu \partial_\nu g(x)$$

e destes dois últimos resultados segue-se que

$$\partial_\mu A_\nu = -g^{-1}(x) \partial_\mu g(x) g^{-1}(x) \partial_\nu g(x) = -A_\mu A_\nu$$

e assim temos finalmente que neste caso

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \equiv 0$$

e a demonstração para

$$\bar{A}_\mu = g(x) \partial_\mu g^{-1}(x)$$

é exatamente análoga.

2.3. - Propriedades topológicas

Conforme já mencionamos na seção anterior, uma transformação genérica do SU(2) pode ser dada por (2.2.17).

Queremos aqui ressaltar, que os vetores η_μ caracterizam os pontos de uma superfície esférica S_3 de raio unitário no espaço E_4 , de modo que cada elemento do grupo SU(2) corresponde a um ponto desta superfície.

Para cada x_4 fixo, $g(x)$ define um mapeamento entre os pontos do espaço físico tridimensional e os elementos do SU(2), ou melhor, entre os pontos (x_1, x_2, x_3) de E_3 , ou equivalentemente entre os pontos da superfície S_3 de E_4 , e os pontos da superfície S_3 de raio unitário em E_4 , caracterizados pelos vetores η_μ .

É sabido que este tipo de mapeamento $S_3 \rightarrow SU(2)$ divide o espaço de fase em um número infinito de classes [2], cada uma das quais é caracterizada por um certo número \bar{q} , conhecido como número topológico dado por

$$\bar{q} = - \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon_{ijk} \text{Tr} \left\{ (g^{-1} \partial_i g) (g^{-1} \partial_j g) (g^{-1} \partial_k g) \right\} \quad (2.3.1)$$

o que se torna claro, se observamos que

$$du(g) = -\epsilon_{ijk} \text{Tr} \left\{ (g^{-1} \partial_i g)(g^{-1} \partial_j g)(g^{-1} \partial_k g) \right\} d^3x$$

é o invariante de gauge deste grupo, já que esta é a forma diferencial invariante da dimensão apropriada, ou seja, o integrando acima é exatamente o jacobiano do mapeamento de S_3 em $SU(2)$. Assim, se $g(x)$ é regular em toda a superfície esférica S_3 , \bar{q} é o número de vezes que o $SU(2)$ é coberto pelo mapeamento, de modo que

$$\bar{q} = \frac{1}{24\pi^2} \int du(g) = \eta ; \eta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

rotula as chamadas classes de homotopia em que o espaço de fase está dividido, de maneira que mapeamentos pertencentes a classes homotópicas distintas não podem ser continuamente deformados uns nos outros.

Se agora um campo A_μ tende a puro gauge no infinito, podemos tomar a superfície esférica S_3 de E_4 com raio muito grande, ao longo da qual A_μ se comporta como $g^{-1} \partial_\mu g$, de modo que A_μ define então, um mapeamento entre os pontos desta superfície esférica e os pontos da esfera S_3 do grupo de gauge $SU(2)$. Assim, segue-se que campos que tendem a puro gauge no infinito, se agrupam, da mesma forma que as transformações g , em classes de homotopia, de modo que potenciais de campo pertencentes a uma mesma classe podem ser continuamente deformados uns nos outros, o que não acontece com potenciais pertencentes a classes de homotopia diferentes.

Por analogia com a equação (2.3.1), podemos também, neste caso, definir o número topológico \bar{q} como

$$\bar{q} = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_3} \text{Tr} \left\{ (g^{-1} \partial_\nu g) (g^{-1} \partial_\alpha g) (g^{-1} \partial_\beta g) \right\} d^3 S_\mu \quad (2.3.2)$$

o qual rotula as classes de homotopia dos potenciais de campo A_μ .

É fácil verificar ainda, que as duas quantidades definidas por

$$S = - \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\}$$

$$C = \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right\}$$

e que são conhecidas respectivamente por densidades de ação e de Chern, são gauge invariantes.

Destas duas densidades, podemos definir a ação e o índice de Chern e dados por

$$S = - \frac{1}{2} \int \text{Tr} \{ F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \} d^4 x = \int S d^4 x \quad (2.3.3)$$

$$q = - \frac{1}{16\pi^2} \int \text{Tr} \{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \} d^4 x \quad (2.3.4)$$

Demonstraremos agora que se, A_μ se comporta como puro gauge no infinito e é regular em todas as regiões finitas de E_4 , então o índice de Chern q , definido pela equação (2.3.4), rotula as classes de homotopia A_μ , ou seja, q é igual ao número topológico \bar{q} definido pela equação (2.3.2).

Da equação (2.2.2) segue que

$$\text{Tr} \{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \{ F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \}$$

Substituindo a equação (2.1.32) na equação acima, e utilizando-se as propriedades de anti-simetria do tensor de Levi-Civita de quatro índices podemos facilmente mostrar que

$$\text{Tr} \{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \} = 2 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \{ (\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) + (\partial_\mu A_\nu) A_\alpha A_\beta + A_\mu A_\nu \partial_\alpha A_\beta + A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta \} \quad (2.3.5)$$

Utilizando agora (2.1.28), onde estamos tomando $g = 1$, segue que o último termo de (2.3.5) pode ser escrito como

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \{ A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta \} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} a_\mu^i a_\nu^j a_\alpha^k a_\beta^l \text{Tr} \{ G_i G_j G_k G_l \}$$

mas como no $SU(2)$ sô temos três geradores, então pelo menos dois índices em μ, ν, α, β são repetidos, de onde concluímos que^(*)

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \{ A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta \} \equiv 0 \quad (2.3.6)$$

Observemos agora, que

$$(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) = \partial_\mu (A_\nu \partial_\alpha A_\beta) - A_\nu \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta$$

(*) Este resultado é válido para qualquer grupo $SU(n)$, o que pode ser demonstrado a partir de identidade de Jacobi aplicada às constantes de estrutura do grupo.

e se A_μ é livre de singularidades em pelo menos todas as regiões finitas de E_4 , segue que

$$\partial_\mu \partial_\alpha A_\beta = \partial_\alpha \partial_\mu A_\beta \quad (2.3.7)$$

e da equação acima segue imediatamente que

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ (\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) \right\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ \partial_\mu (A_\nu \partial_\alpha A_\beta) \right\} \quad (2.3.8)$$

Podemos ver também que

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ \partial_\mu (A_\nu A_\alpha A_\beta) \right\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ (\partial_\mu A_\nu) A_\alpha A_\beta + A_\nu (\partial_\mu A_\alpha) A_\beta + A_\nu A_\alpha \partial_\mu A_\beta \right\}$$

onde não existe nenhuma razão para que as contribuições de cada um dos três termos a direita não sejam iguais, e que

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ A_\nu A_\alpha \partial_\mu A_\beta \right\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ A_\mu A_\nu \partial_\alpha A_\beta \right\}$$

de onde concluímos que

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ (\partial_\mu A_\nu) A_\alpha A_\beta + A_\mu A_\nu \partial_\alpha A_\beta \right\} = \frac{2}{3} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ \partial_\mu (A_\nu A_\alpha A_\beta) \right\} \quad (2.3.9)$$

Substituindo os resultados obtidos em (2.3.6), (2.3.8) e (2.3.9) em (2.3.5), teremos que

$$\text{Tr} \{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \} = 2 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \text{Tr} \left\{ A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta \right\}$$

que podemos escrever também na forma

$$\text{Tr} \{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \} = \partial_\mu I_\mu \quad (2.3.10)$$

onde

$$I_\mu = 2 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta \right\} \quad (2.3.11)$$

Substituindo (2.3.10) em (2.3.4) e aplicando o teorema de Gauss, teremos que

$$q = - \frac{1}{16\pi^2} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_3} I_\mu \, dS_\mu \quad (2.3.12')$$

É interessante expressarmos a equação (2.3.11) em outra forma, observando que de

$$I_\mu = 2 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ \frac{A_\nu}{2} (F_{\alpha\beta} - [A_\alpha, A_\beta]) + \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta \right\}$$

é fácil ver que podemos escrever I_μ também como

$$I_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ A_\nu F_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta \right\} \quad (2.3.13)$$

Substituindo agora (2.3.13) em (2.3.12) e levando em conta que no limite $|x| \rightarrow \infty$ $F_{\alpha\beta}$ tende a zero muito mais rapidamente que $A_\alpha A_\beta$, e ainda que neste limite A_μ se comporta como puro gauge, chegamos finalmente a

$$q = \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_3} \text{Tr} \{ (g^{-1} \partial_\nu g) (g^{-1} \partial_\alpha g) (g^{-1} \partial_\beta g) \} \, dS_\mu$$

que é exatamente a equação (2.3.2), o que demonstra a nossa afirmativa de que, neste caso, o índice de Chern q rotula as classes de homotopia dos A_μ , ou seja, é igual ao número topológico

co.

Podemos observar agora, que se A_μ , mesmo que pos sua singularidades nas regiões finitas de E_4 , se comporta como puro gauge na superfície da esfera S_3 de raio muito grande e é regular de modo que (2.3.13) é válida neste limite, a quantidade dada por (2.3.12) é sempre igual ao número topológico dado por (2.3.2), de maneira que este pode ser escrito também como

$$\bar{q} = - \frac{1}{16\pi^2} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_3} I_\mu dS_\mu \quad (2.3.14)$$

de onde fica claro agora que quando A_μ é regular em todo o espaço e se comporta como puro gauge no infinito, o índice de Chern é igual ao número topológico ($q = \bar{q}$).

A ligação entre as equações (2.3.4) e (2.3.14) se faz observando que, quando temos singularidades (a_i) nas regiões finitas de E_4 ,

$$\int_{x \notin \Delta v_i} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}\} d^4x = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_3} I_\mu dS_\mu - \sum_{i=1}^N \lim_{|x| \rightarrow \epsilon_i} \int_{\Delta v_i} I_\mu dS_\mu \quad (2.3.15)$$

onde estamos tomando, no último membro a direita, a normal interior, e N é o número de singularidades e Δv_i é o volume infinitesimal em torno de cada uma delas.

A diferença entre as definições de índice de Chern dada por (2.3.4) e número topológico dada por (2.3.14) reside no fato de que, no caso em que $F_{\mu\nu}$ possui singularidades isoladas, o índice de Chern não está bem definido nestes pontos.

Se agora, redefinirmos o índice de Chern como

$$q = - \frac{1}{16\pi^2} \int_{x \notin \Delta v_i} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}\} d^4x - \frac{1}{16\pi^2} \sum_{i=1}^N \text{Lim}_{|\times| \rightarrow \epsilon_i} \int_{\Delta v_i} I_{\mu} dS_{\mu} \quad (2.3.16)$$

onde ao primeiro termo a direita chamaremos de número topológico regular q^r e ao segundo de número topológico singular q^s , é fácil ver de (2.3.15) que com a definição acima removemos a distinção entre índice de Chern e número topológico de modo que de agora em diante

$$q = \bar{q} = q^r + q^s \quad (2.3.17)$$

onde

$$q^r = - \frac{1}{16\pi^2} \int_{x \notin \Delta v_i} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}\} d^4x; \quad q^s = - \frac{1}{16\pi^2} \sum_{i=1}^N \text{Lim}_{|\times| \rightarrow \epsilon_i} \int_{\Delta v_i} I_{\mu} dS_{\mu}$$

Queremos ressaltar aqui que, conforme vimos, quando $g(x)$ é regular sobre a superfície da esfera S_3 de raio muito grande, o número topológico é sempre um inteiro. Foi demonstrado que pela introdução de transformações g singulares sobre esta superfície, é possível obter-se números topológicos não inteiros [8].

Consideremos a desigualdade

$$\int \text{Tr} \{ F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu} \}^2 d^4x \geq 0 \quad (2.3.18)$$

É fácil ver que substituídas as equações (2.3.3) e (2.3.4) em (2.3.18), a ação possui um limite inferior, que é dado por

$$S \geq 8\pi^2 |q| \quad (2.5.19)$$

e assim, temos que soluções com índice de Chern não nulo minimizam a ação, o que não poderia deixar de acontecer, pois estas são soluções das equações de campo da teoria.

No caso da solução BPST, sabemos que $\tilde{F}_{\mu\nu} = \pm F_{\mu\nu}$ e neste caso podemos mostrar que

$$S = 8\pi^2$$

e comparando este resultado com (2.3.19), podemos ver que o índice de Chern da solução BPST é $q = 1$.

No próximo capítulo mostraremos a solução, com índice de Chern maior que a unidade, tipo multi-íntanton e demonstraremos como calculá-lo.

3. A SOLUÇÃO TIPO MULTI-INSTANTON DE 't HOOFT

3.1. - O multi-potencial escalar ρ

Após o aparecimento da solução BPST (Belavin, Polyakov, Schwartz e Tyupkin) tipo Instanton das equações de Yang-Mills que, no domínio euclidiano, fazia com que a ação funcional possuísse um mínimo e que tinha índice de Chern igual à unidade, restou saber se a ação poderia ser ou não saturada para valores do índice de Chern diferentes da unidade.

Esta questão foi respondida de modo afirmativo por Witten [9] que descobriu um conjunto de configurações de campo no qual um número arbitrário de Instantons apareciam alinhados em um eixo definido com tamanhos e separações arbitrários.

Uma solução mais geral que a de Witten foi descoberta por G. 't Hooft [10] na qual, um número arbitrário de Instantons aparecia distribuído em pontos arbitrários do espaço quadri-dimensional euclidiano E , solução esta que é nosso intuito aqui descrever bem como suas propriedades topológicas.

Faremos agora, inicialmente, algumas considerações cujo objetivo é facilitar o tratamento posterior do assunto em questão.

Um ansatz muito útil e que simplifica drasticamente as equações de movimento foi proposto por Wilczek [11] e Corrigan e Farlie [12]. Segundo eles, os potenciais de campo A_μ podiam ser expressos como

$$A_\mu = i \sigma_{\mu\nu} \partial_\nu \ln \rho \quad (3.1.1)$$

onde $\sigma_{\mu\nu}$ são os geradores do grupo $O(4)$ construídos, conforme vimos no capítulo anterior, com as matrizes de Pauli e ρ é conhecido com o nome de potencial escalar podendo ou não ser singular.

Substituindo (3.1.1) nas equações de Yang-Mills

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (2.1.32)$$

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0 \quad (2.1.33)$$

temos, respectivamente, que

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} = & -i \sigma_{\mu\nu} \frac{\partial_\alpha \rho \partial_\alpha \rho}{\rho^2} - i \sigma_{\mu\beta} \frac{1}{\rho} \left\{ \partial_\nu \partial_\beta \rho - \frac{2}{\rho} \partial_\nu \rho \partial_\beta \rho \right\} \\ & + i \sigma_{\nu\alpha} \frac{1}{\rho} \left\{ \partial_\mu \partial_\alpha \rho - \frac{2}{\rho} \partial_\mu \rho \partial_\alpha \rho \right\} \\ & i \sigma_{\mu\nu} \rho^2 \partial_\mu \left\{ \frac{\square \rho}{\rho^3} \right\} = 0 \end{aligned}$$

o que estabelece a seguinte equação para ρ

$$\frac{\square \rho}{\rho^3} = C \quad (3.1.2)$$

onde C é uma constante arbitrária e $\square \rho = \partial_\mu \partial_\mu \rho$.

Ao invés do ansatz (3.1.1) poderíamos igualmente ter utilizado o análogo construído a partir das matrizes anti-
auto-duais $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$, dado por

$$A_{\mu} = i \bar{\sigma}_{\mu\nu} \partial_{\nu} \ln \rho \quad (3.1.3)$$

e teríamos chegado ao mesmo resultado (3.1.2).

A condição (3.1.2) não é uma condição necessária, mas é suficiente, para que a equação de Yang-Mills seja satisfeita.

É fácil verificar que

$$\rho = 1 + \frac{\lambda^2}{y^2}; \quad y_{\mu} = (x - a)_{\mu} \quad (3.1.4)$$

não é solução de (3.1.2), mas no entanto, é solução de

$$\square \rho = 0 \quad (3.1.5)$$

e quando aplicado em (3.1.1) e (2.1.32), nos fornece que

$$A_{\mu} = - \frac{2i \lambda^2 \sigma_{\mu\alpha} y_{\alpha}}{y^2 (y^2 + \lambda^2)}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{4i \lambda^2 \sigma_{\mu\nu}}{(y^2 + \lambda^2)} - \frac{8i \lambda^2 y_{\beta}}{y^2 (y^2 + \lambda^2)^2} \left\{ \sigma_{\mu\beta} y_{\nu} - \sigma_{\nu\beta} y_{\mu} \right\}$$

À primeira vista, estes resultados nos parecem estranhos; entretanto, podemos mostrar que eles são gauge equivalentes aos resultados BPST correspondentes (2.2.16), ou seja, através de uma transformação de gauge adequada

$$A'_{\mu} = g^{-1}(y) A_{\mu} g(y) + g^{-1}(y) \partial_{\mu} g(y)$$

$$F'_{\mu\nu} = g^{-1}(y) F_{\mu\nu} g(y)$$

onde $g(y)$ é dado por

$$g(y) = \frac{y_\mu + i \vec{\sigma} \cdot \vec{y}}{\sqrt{y^2}}$$

podemos mostrar que

$$A'_\mu = \frac{-2i \sigma_{\mu\nu} y_\nu}{(y^2 + \lambda^2)}$$

e

$$F'_{\mu\nu} = \frac{4i \lambda^2 \sigma_{\mu\nu}}{(y^2 + \lambda^2)^2}$$

Uma solução de (3.1.2) foi encontrada por S. Fubini [13]:

$$\rho = \frac{2\sqrt{2} \lambda}{y^2 + \lambda^2}$$

e que nos fornece exatamente os resultados acima, equivalentes a (2.2.16).

Foi G. 't Hooft [10] quem demonstrou que a solução (3.1.4) da equação (3.1.5) para o caso de um instanton, podia ser generalizada para o caso de N instantons:

$$\rho = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{y_i^2} ; \quad y_{i\mu} = (x - a_i)_\mu \quad (3.1.6)$$

que dependia de $5N$ parâmetros os quais podiam ser interpretados como sendo as posições e os tamanhos dos N instantons, além do que, (3.1.5) podia ser tomada como a condição de autodualidade do campo, o que demonstraremos a seguir utilizando um procedimento devido a S. Sciuto [3].

É fácil ver que o tensor das intensidades de cam

po pode ser escrito, a partir de (3.1.3), como

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu} = & - i \bar{\sigma}_{\mu\nu} (\partial_\alpha \ell_n \rho) \partial_\alpha \ell_n \rho \\
 & + i \bar{\sigma}_{\nu\alpha} \left\{ \partial_\mu \partial_\alpha \ell_n \rho - (\partial_\alpha \ell_n \rho) \partial_\mu \ell_n \rho \right\} \\
 & - i \sigma_{\mu\alpha} \left\{ \partial_\nu \partial_\alpha \ell_n \rho - (\partial_\alpha \ell_n \rho) \partial_\nu \ell_n \rho \right\}
 \end{aligned}$$

que pode também ser colocado na forma

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu} = & - \frac{i}{2} \bar{\sigma}_{\mu\nu} \left\{ \partial_\alpha \partial_\alpha \ell_n \rho + (\partial_\alpha \ell_n \rho) \partial_\alpha \ell_n \rho \right\} \\
 & + \frac{i}{2} \bar{\sigma}_{\mu\nu} \left\{ \partial_\alpha \partial_\alpha \ell_n \rho - (\partial_\alpha \ell_n \rho) \partial_\alpha \ell_n \rho \right\} \\
 & + i \bar{\sigma}_{\nu\alpha} \left\{ \partial_\alpha \partial_\mu \ell_n \rho - (\partial_\alpha \ell_n \rho) \partial_\mu \ell_n \rho \right\} \\
 & - i \bar{\sigma}_{\mu\alpha} \left\{ \partial_\alpha \partial_\nu \ell_n \rho - (\partial_\alpha \ell_n \rho) \partial_\nu \ell_n \rho \right\} \quad (3.1.7)
 \end{aligned}$$

Podemos mostrar com facilidade que

$$\partial_\alpha \partial_\alpha \ell_n \rho + (\partial_\alpha \ell_n \rho) \partial_\alpha \ell_n \rho = \frac{\square \rho}{\rho} \quad (3.1.8)$$

Definindo agora

$$F_{\mu\nu}^I = - i \bar{\sigma}_{\mu\nu} \frac{\square \rho}{2\rho} \quad (3.1.9)$$

segue-se de (3.1.8) que (3.1.7) pode ser posto na forma

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^I + F_{\mu\nu}^{II} \quad (3.1.10)$$

onde F^{II} é dado por

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu}^{II} &= i \bar{\sigma}_{\mu\alpha} \left\{ (\partial_\alpha \ln \rho) \partial_\nu \ln \rho - \partial_\alpha \partial_\nu \ln \rho \right\} \\
 &- i \bar{\sigma}_{\nu\alpha} \left\{ (\partial_\alpha \ln \rho) \partial_\mu \ln \rho - \partial_\alpha \partial_\mu \ln \rho \right\} \\
 &- \frac{i}{2} \bar{\sigma}_{\mu\nu} \left\{ (\partial_\alpha \ln \rho) \partial_\alpha \ln \rho - \partial_\alpha \partial_\alpha \ln \rho \right\} \quad (3.1.11)
 \end{aligned}$$

Observemos agora que (3.1.11) pode ainda ser re-escrita como

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu}^{II} &= i \bar{\sigma}_{\mu\lambda} \left\{ (\partial_\lambda \ln \rho) \partial_\nu \ln \rho - \partial_\lambda \partial_\nu \ln \rho \right\} \\
 &- i \bar{\sigma}_{\mu\lambda} \frac{\delta_{\lambda\nu}}{4} \left\{ (\partial_\alpha \ln \rho) \partial_\alpha \ln \rho - \partial_\alpha \partial_\alpha \ln \rho \right\} \\
 &- i \bar{\sigma}_{\nu\lambda} \left\{ (\partial_\lambda \ln \rho) \partial_\mu \ln \rho - \partial_\lambda \partial_\mu \ln \rho \right\} \\
 &+ i \sigma_{\nu\lambda} \frac{\delta_{\lambda\mu}}{4} \left\{ (\partial_\alpha \ln \rho) \partial_\alpha \ln \rho - \partial_\alpha \partial_\alpha \ln \rho \right\} \quad (3.1.12)
 \end{aligned}$$

Definindo-se

$$C_{\mu\nu} = (\partial_\mu \ln \rho) \partial_\nu \ln \rho - \partial_\mu \partial_\nu \ln \rho \quad (3.1.13)$$

e substituindo-se (3.1.13) em (3.1.12) teremos que

$$F_{\mu\nu}^{II} = i \bar{\sigma}_{\mu\lambda} \left\{ C_{\lambda\nu} - \frac{\delta_{\lambda\nu}}{4} C_{\alpha\alpha} \right\} - i \bar{\sigma}_{\nu\lambda} \left\{ C_{\lambda\mu} - \frac{\delta_{\lambda\mu}}{4} C_{\alpha\alpha} \right\}$$

e definindo agora

$$T_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} - \frac{\delta_{\mu\nu}}{4} C_{\alpha\alpha} \quad (3.1.14)$$

teremos finalmente que

$$F_{\mu\nu}^{II} = i \left\{ \bar{\sigma}_{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} - \bar{\sigma}_{\nu\lambda} T_{\lambda\mu} \right\} \quad (3.1.15)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico de traço nulo.

De (3.1.9) segue imediatamente que, como $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ é uma matriz anti-autodual, então

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^I = - F_{\mu\nu}^I$$

ou seja, $F_{\mu\nu}^I$ é uma solução anti-autodual da equação de Yang-Mills.

Para $F_{\mu\nu}^{II}$, teremos que

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^{II} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^{II} = i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\sigma}_{\alpha\lambda} T_{\lambda\beta} \quad (3.1.16)$$

mas como $\bar{\sigma}_{\alpha\lambda}$ é anti-autodual podemos escrever

$$\bar{\sigma}_{\alpha\lambda} = - \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\lambda\phi\xi} \bar{\sigma}_{\phi\xi} = - \tilde{\bar{\sigma}}_{\alpha\lambda} \quad (3.1.17)$$

e substituindo (3.1.17) em (3.1.16) não é difícil ver que

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^{II} = F_{\mu\nu}^{II}$$

Assim, podemos concluir que o ansatz (3.1.3) ,

quando substituído na expressão para o tensor das intensidades de campos, nos fornece uma solução da equação de Yang-Mills que pode ser escrita como a soma de duas soluções, sendo uma autodual (3.1.15) e a outra anti-autodual (3.1.9).

Se quisermos que a nossa solução seja autodual, basta fazer

$$F_{\mu\nu}^I = 0$$

condição esta que é satisfeita se

$$\frac{\square\rho}{\rho} = 0$$

como era nosso desejo demonstrar.

Se quisermos que a nossa solução seja anti-autodual, basta fazer

$$F_{\mu\nu}^{II} = 0$$

que é satisfeita se

$$T_{\mu\nu} = 0 \tag{3.1.18}$$

Convém ressaltar que, caso tivéssemos escolhido o ansatz (3.1.1) com $\sigma_{\mu\nu}$ autodual, o papel das equações (3.1.5) e (3.1.8) seria invertido. É fácil ver que operar com a condição (3.1.5) é muito menos trabalhoso do que operar com a condição (3.1.8). Por esta razão, o ansatz com $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ é mais adequado para

o tratamento das soluções autoduais ($\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$), enquanto que o com $\sigma_{\mu\nu}$ é, por sua vez, mais indicado para o caso de soluções anti-autoduais ($\tilde{F}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$).

Para finalizar, substituindo-se (3.1.6) em (3.1.1), obtêm-se que

$$A_{\mu} = - \frac{2i \sigma_{\mu\nu}}{\rho} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2 (x-a_i)_{\nu}}{(x-a_i)^4} \quad (3.1.19)$$

que é o chamado potencial multi-íntanton de 't Hooft, singular nos pontos $x=a_i$, cujo índice de Chern (e também o número topológico) é igual a N, o número de íntantons presentes, o que será assunto da próxima seção.

3.2. - Cálculo do número topológico

Conforme já mencionamos anteriormente, Witten foi o primeiro a apresentar uma solução da equação de Yang-Mills do tipo multi-íntanton, na qual os íntantons apareciam alinhados, e que possuía índice de Chern maior do que a unidade. Após o aparecimento da solução multi-íntanton de 't Hooft, mais geral que a de Witten, restou saber o índice de Chern desta solução, o que foi calculado de maneira precisa por Jackiw, Nohl e Rebbi [14], cujo método exporemos a seguir.

Definindo

$$E = \frac{\square \rho}{2\rho}$$

e levando em conta os resultados (3.1.9), (3.1.10) e (3.1.15),

podemos calcular a densidade de Chern, dada por

$$C = \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right\}_{x \neq a_i} = \text{Tr} \left\{ (F_{\mu\nu}^{II} + F_{\mu\nu}^I) (F_{\mu\nu}^{II} - F_{\mu\nu}^I) \right\}_{x \neq a_i}$$

o que nos fornece que

$$C = \text{Tr} \left\{ \left[\bar{\sigma}_{\mu\lambda}, \bar{\sigma}_{\nu\beta} \right]^+ T_{\beta\mu} T_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \left[\bar{\sigma}_{\mu\nu}, \bar{\sigma}_{\mu\nu} \right]^+ E^2 - \left[\bar{\sigma}_{\mu\lambda}, \bar{\sigma}_{\mu\nu} \right]^+ T_{\lambda\beta} T_{\beta\nu} \right\}_{x \neq a_i}$$

e agora, lembrando que,

$$\left[\sigma_{\alpha\beta}^{\pm}, \sigma_{\gamma\rho}^{\pm} \right]^+ = \frac{1}{2} \left\{ \pm \epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} + (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho} - \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\gamma}) \right\} \quad (3.2.1)$$

onde $\sigma_{\alpha\beta}^+$ significa autodual ($\sigma_{\alpha\beta}$) e $\sigma_{\alpha\beta}^-$ significa anti-autodual ($\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$), é possível mostrar que

$$C = \left\{ 6 E^2 - 2 T_{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right\}_{x \neq a_i}$$

Para o caso de soluções autoduais, nas quais estaremos interessados daqui por diante, devido a (3.1.4) reza que

$$C = \left\{ - 2 T_{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right\}_{x \neq a_i}$$

que pode ser escrita, levando em conta (3.1.13) e (3.1.14) como

$$C = 8 \frac{1}{\rho^3} (\partial_{\mu}\rho)(\partial_{\nu}\rho)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\rho - 6 \frac{1}{\rho^4} (\partial_{\mu}\rho)(\partial_{\mu}\rho)(\partial_{\nu}\rho)(\partial_{\nu}\rho) - \\ - 2 \frac{1}{\rho^2} (\partial_{\mu}\partial_{\nu}\rho)(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\rho)$$

é gauge invariante e regular em todo o espaço.

Por esta razão, é conveniente escrevermos (3.2.2)

como

$$C = \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right\} = \begin{cases} \square \square \ln \rho ; x \neq a_i \\ \text{Lim} \quad \square \square \ln \rho ; x = a_i \\ x \rightarrow a_i \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Tomando

$$\rho \underset{x \rightarrow a_j}{=} \frac{\lambda_j^2}{(x - a_j)^2} + \sum_{j \neq i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{(a_j - a_i)^2} + 1 + 0 \left(\frac{|x - a_j|}{a} \right)$$

e definindo

$$a = \min_{i \neq j} |a_j - a_i|$$

$$c_j^2 = 1 + \sum_{j \neq i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{(a_j - a_i)^2}$$

$$\lambda^2 = \frac{\lambda_j^2}{c_j^2}$$

$$y = (x - a_j)$$

temos que

$$\rho \underset{x \rightarrow a_j}{=} c_j^2 \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{y^2} \right\} + 0 \left(\frac{|y|}{a} \right)$$

de onde podemos mostrar que

$$\square \square \ln \rho = - \frac{96 \lambda^4}{(y^2 + \lambda^2)^4} - 4 \square \frac{1}{y^2} \quad (3.2.5)$$

Não é difícil mostrar que, uma vez imposta a condição de autodualidade (3.1.4), que a expressão anterior pode ser escrita, em uma forma mais compacta, como

$$C = \int \int \ln \rho \quad ; \quad x \neq a_i \quad (3.2.2)$$

Caso estivéssemos interessados nas soluções anti-autoduais, deveríamos ter tomado o desenvolvimento baseado no ansatz (3.1.1) com $\sigma_{\mu\nu}$ autodual e, neste caso, encontraríamos

$$C = \left\{ -6 E^2 + 2 T_{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right\}_{x \neq a_i}$$

e que de modo exatamente análogo, onde agora $E = 0$ é a condição de anti-autodualidade, obteríamos que

$$C = - \int \int \ln \rho \quad ; \quad x \neq a_i \quad (3.2.3)$$

Assinalemos, agora, que até aqui trabalhamos com o multi-potencial escalar ρ sem levar em conta o fato de ele ser singular nos pontos $x=a_i$ ($i=1, \dots, N$), de modo que os resultados (3.2.2) e (3.2.3) são válidos somente neste domínio. Entretanto, se estas singularidades forem não essenciais e podem ser removidas para o infinito por uma transformação de gauge, ou seja, se existir uma solução regular $F_{\mu\nu}^{\text{reg}}$, obtida de $F_{\mu\nu}$ por uma transformação de gauge e neste caso há, conforme foi demonstrado por Giambiagi e Rothe [15], então a quantidade

$$C = \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right\} = \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}^{\text{reg}} \tilde{F}_{\mu\nu}^{\text{reg}} \right\}$$

De (3.2.5), podemos observar que o último termo se anula em todo o espaço, com exceção de $y = 0$, onde ele é proporcional a $\delta^4(y)$.

Daí resulta a importância de (3.2.4), onde fica implícito que este termo não contribui.

É nosso desejo, agora, demonstrar que

$$\prod_{j=1}^N \ln \frac{N}{\prod_{j=1}^N (x-a_j)^2} = 0 \quad ; \quad x \neq a_j \quad (j=1,2,\dots,N) \quad (3.2.6)$$

Com esta finalidade, observemos inicialmente que,

$$\prod \ln (x-a)^2 = \frac{4}{(x-a)^2} \quad ; \quad x \neq a$$

de onde segue imediatamente que

$$\prod \prod \ln (x-a)^2 = 0 \quad ; \quad x \neq a$$

o que demonstra (3.2.6).

Assim, utilizando (3.2.6) podemos reescrever

(3.2.4) como

$$G = -\text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right\} = \begin{cases} \prod \prod \ln \left\{ \rho \prod_{j=1}^N (x-a_j)^2 \right\} ; x \neq a_i \neq a_j \\ \lim_{x \rightarrow a_i} \prod \prod \ln \left\{ \rho \prod_{j=1}^N (x-a_j)^2 \right\} ; x = a_i ; x \neq a_j \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Olhando para a expressão (3.1.6) de ρ , podemos ver que

$$P_{2N} \stackrel{!}{=} \rho \prod_{j=1}^N (x-a_j)^2$$

define um polinômio de grau igual a $2N$ e que não possui raízes nem polos sobre o eixo real, de modo que podemos eliminar os dois ramos de (3.2.7) e escrever

$$C = \square \square P_{2N}$$

que é regular em todo o espaço E_4 .

Assim de (2.3.4) segue que o índice de Chern é dado por

$$q = - \frac{1}{16\pi^2} \int \square \square (\ln P_{2N}) d^4x \quad (3.2.8)$$

e conforme vimos na seção (2-3), neste caso, é também igual ao número topológico o qual pode ser obtido pela aplicação do teorema de Gauss na equação (3.2.8)

$$q = \bar{q} = - \frac{1}{16\pi^2} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_3} \partial_\mu \{ \square (\ln P_{2N}) \} dS_\mu$$

Observando que sobre a superfície S_3 , $x^2 = R^2$, e que no limite $|x| \rightarrow \infty$ podemos tomar só o primeiro termo do polinômio, que é dominante, podemos escrever

$$q = - \frac{1}{16\pi^2} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_3} \partial_\mu \{ \square (\ln R^{2N}) \} dS_\mu$$

Como

$$dS_\mu \partial_\mu = R^3 d\Omega \frac{d}{dR}$$

$$\square (\ln R^{2N}) = \frac{4N}{R^2}$$

$$\frac{d}{dR} \left\{ \square (\ln R^{2N}) \right\} = - \frac{8N}{R^3}$$

segue que

$$q = \frac{1}{16\pi^2} \int (8N) d\Omega = N \quad (3.2.9)$$

ou seja, a solução multi-íntanton de 't Hooft, para $F_{\mu\nu}$ autodu-
al, possui índice de Chern, ou equivalentemente número topolôgi-
co, igual a N.

De (2.3.2) segue que, para $F_{\mu\nu}$ anti-autodual, a
solução de 't Hooft possui número topolôgico igual a - N.

Finalmente, queremos ressaltar que, quando $N=1$,
a solução multi-íntanton (3.1.9) se reduz a conhecida solução
BPST e (3.2.9) nos mostra que o seu índice de Chern é igual a
unidade.

4. A SOLUÇÃO TIPO MÉRON DE ALFARO, FUBINI E FURLAN

4. Obtenção de uma solução tipo instanton através de uma transformação conforme.

Conforme foi visto no capítulo anterior, é possível escrever os potenciais de campo de Yang-Mills na forma

$$A_{\mu} = i \sigma_{\mu\nu} \partial_{\nu} \ln \rho \tag{3.1.1}$$

sendo que se potencial escalar ρ satisfaz a condição

$$\square \rho + c \rho^3 = 0 \tag{3.1.2}$$

onde c é uma constante arbitrária, os $F_{\mu\nu}$ obtidos a partir de A_{μ} satisfazem a equação de Yang-Mills

$$\partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + [A_{\mu}, F_{\nu\lambda}] = 0 \tag{2.1.33}$$

Em 1976, Alfaro, Fubini e Furlan [13] apontaram a existência de uma solução elementar de (3.1.2) que, ao mesmo tempo, era invariante de Lorentz e possuía propriedades simples de dilatação, e que era dada por

$$\rho = \frac{1}{r} ; r = \sqrt{x^2} \tag{4.1.1}$$

Entretanto, mesmo em um espaço euclidiano, esta solução apresentava um problema que residia no fato de que $\ln \rho$

era singular tanto para $r = 0$ como para $r = \infty$ (que são os pontos característicos do grupo de dilatação $O(1,1)$).

Para contornar esta situação, os autores propuseram o uso de uma transformação conforme que deslocasse as singularidades para dois pontos arbitrários u e v , de modo que, após esta transformação, ρ tomava a seguinte forma

$$\rho = \frac{(u-v)^2}{\sqrt{(x-u)^2 (x-v)^2}}$$

e escolhendo-se, sem perda de generalidade, $u = -v = a$ tem-se que

$$\rho = \frac{2a}{\sqrt{(x-a)^2 (x+a)^2}}$$

Queremos deixar claro aqui, que isto só pode ser feito devido ao fato de que as equações (3.1.2) e (2.1.33) são invariantes com relação às transformações conformes.

Substituindo-se (4.1.1) em (2.1.32) e (3.1.1), pode-se verificar facilmente que

$$A_{\mu} = - \frac{i \sigma_{\mu\alpha} \tilde{x}_{\alpha}}{x^2} \quad (4.1.2)$$

e

$$F_{\mu\nu} = \left[\sigma_{\mu\alpha} \tilde{x}_{\alpha}, \sigma_{\nu\beta} \tilde{x}_{\beta} \right], \frac{1}{x^4} \quad (4.1.3)$$

É importante observarmos que, por (2.2.20) (4.1.2) pode ser escrita como

$$A_{\mu} = \frac{1}{2} g^{-1}(x) \partial_{\mu} g(x) \quad (4.1.4)$$

de onde podemos ver que a presença do fator $(1/2)$ é essencial ,

pois este fator é responsável pelo fato de termos um $F_{\mu\nu}$ não nulo.

Como podemos observar (4.1.2) e (4.1.3) são ambas singulares $x = 0$, bem como que A_μ não se comporta como um puro gauge no infinito e que $F_{\mu\nu}$ tende a zero muito lentamente ($\sim x^{-2}$) neste limite.

Da mesma forma que no caso do potencial escalar, podemos utilizar a vantagem da invariância conforme e deslocarmos os pontos de singularidade para u e v . Após alguns cálculos que envolvem também uma transformação de gauge, chegamos aos seguintes resultados:

$$A_\mu = -2i \sigma_{\mu\alpha} S_\alpha \quad (4.1.5)$$

$$F_{\mu\nu} = 4 \left[\sigma_{\mu\alpha} \omega_\alpha, \sigma_{\nu\beta} \omega_\beta \right] \quad (4.1.6)$$

onde

$$\left[\sigma_{\mu\alpha} \omega_\alpha, \sigma_{\nu\beta} \omega_\beta \right] = i \left[\omega^2 \sigma_{\mu\nu} + \omega_\mu \sigma_{\nu\beta} \omega_\beta - \omega_\nu \sigma_{\mu\alpha} \omega_\alpha \right]$$

$$S_\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(x-u)_\alpha}{(x-u)^2} + \frac{(x-v)_\alpha}{(x-v)^2} \right\}$$

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(x-u)_\alpha}{(x-u)^2} - \frac{(x-v)_\alpha}{(x-v)^2} \right\}$$

É possível verificar-se que as expressões (4.1.5) e (4.1.6) são também solução da equação de Yang-Mills.

Observemos que fazendo $u \rightarrow 0$ e $v \rightarrow \infty$, retornaremos às expressões (4.1.2) e (4.1.3).

Podemos observar que a forma assintótica de (4.1.5) é

$$A_{\mu} = g^{-1}(x) \partial_{\mu} g(x) \quad (4.1.7)$$

o que coincide com a forma assintótica da solução tipo Instanton (2.2.21), o que implica que esta solução possui também número topológico igual a unidade. Por outro lado, é possível deduzir de (4.1.6) que

$$\text{Tr} \{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \} = 0 ; x \neq u \neq v$$

o que por (2.3.16) implica no fato de

$$q = q^S \hat{=} 1$$

ou seja, neste caso, a densidade de Chern está concentrada em dois pontos, ao invés de estar dispersa em todo o espaço:

$$C = \text{Tr} \{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \} = - 8\pi^2 \{ \delta^4(x-u) + \delta^4(x-v) \}$$

4.2. - A solução tipo méron

É nosso desejo, agora, mostrar que a solução das equações de Yang-Mills descrita pelas equações (4.1.2) e (4.1.3) é do tipo méron, ou seja, possui número topológico semi-inteiro, neste caso, igual a 1/2.

Conforme já foi ressaltado anteriormente, (4.1.2) e (4.1.3) são singulares na origem. Demonstraremos agora, que a densidade de Chern é nula em todo o espaço com exceção da origem, ou seja,

$$C = \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right\}_{x \neq 0} = 0 \quad (4.2.1)$$

Da definição do tensor dual e de (4.1.3), podemos mostrar que

$$\text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right\}_{x \neq 0} = -\frac{1}{2x^8} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} [\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\mu\nu}]^+ x^4 + 2 [\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\beta\phi}]^+ x^2 x_\alpha x_\phi \right\}$$

e utilizando (3.2.1) segue que

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right\}_{x \neq 0} &= -\frac{1}{x^8} \left\{ \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{x^4}{4} - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\phi} x^2 x_\beta x_\phi \right\} = \\ &= -\frac{1}{x^8} \{ 6x^4 - 6x^2 \delta_{\beta\phi} x_\beta x_\phi \} = 0 \end{aligned}$$

o que demonstra (4.2.1):

É nosso desejo calcular agora I_μ definido por (2.3.11) como

$$I_\mu = 2 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta \right\}$$

Substituindo-se (4.1.2) na expressão acima, segue que

$$\begin{aligned} I_\mu &= -2 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ -\sigma_{\nu\theta} \sigma_{\beta\alpha} \frac{x_\theta}{x^4} + [\sigma_{\nu\theta}, \sigma_{\beta\phi}] \frac{x_\theta x_\phi x_\alpha}{x^6} + \right. \\ &\quad \left. \frac{i}{3} \sigma_{\nu\theta} \frac{x_\theta x_\xi x_\phi}{x^6} [\sigma_{\alpha\xi}, \sigma_{\beta\phi}] \right\} \end{aligned}$$

como

$$4\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} + (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu}) + 2i \left\{ \delta_{\alpha\mu} \sigma_{\beta\nu} - \delta_{\beta\mu} \sigma_{\alpha\nu} - \delta_{\alpha\nu} \sigma_{\beta\mu} + \delta_{\beta\nu} \sigma_{\alpha\mu} \right\} \quad (4.2.2)$$

e

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\alpha\beta}] = i(\delta_{\mu\alpha}\sigma_{\nu\beta} - \delta_{\nu\alpha}\sigma_{\mu\beta} - \delta_{\mu\beta}\sigma_{\nu\alpha} + \delta_{\nu\beta}\sigma_{\mu\alpha}) \quad (4.2.3)$$

após alguns cálculos tem-se que

$$I_{\mu} = -\frac{2}{3} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\theta\nu\alpha\beta} \frac{x_{\theta}}{x^4} = -\frac{4x_{\mu}}{x^4} = 2 \partial_{\mu} x^{-2} \quad (4.2.4)$$

e aplicando-se agora (2.3.10) na expressão acima

$$\text{Tr} \{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \} = 2 \square x^{-2}$$

e dado que

$$\square x^{-2} = -4\pi^2 \delta^4(x)$$

segue que

$$\text{Tr} \{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \} = -8\pi^2 \delta^4(x)$$

e substituindo-se este resultado em (2.3.4), temos finalmente que

$$q = \frac{1}{2} \int \delta^4(x) d^4x = \frac{1}{2}$$

o que demonstra a nossa afirmativa de que o mēron possui número topológico igual a 1/2.

É interessante observar que, de acordo com as nossas definições (2.3.16) e (2.3.17), e de (4.2.1) temos que

$$q = \bar{q} = q_s = \frac{1}{2}$$

De fato, substituindo (4.2.4) em (2.3.14) segue que

$$\bar{q} = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_3} \frac{x_\mu}{x^4} dS_\mu = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_3} \frac{R_\mu}{R^4} R_\mu R^2 d\Omega$$

$$\bar{q} = \frac{1}{4\pi^2} \int d\Omega = \frac{1}{2}$$

e a demonstração para q_s é trivial, pois a integral não depende do raio.

4.3. - Cálculo condensado do número topológico das soluções tipo méron e instanton

Observando o comportamento assintótico da solução tipo instanton (4.1.5), dado por (4.1.7), e a solução tipo méron, dada por (4.1.2), a qual pode ser escrita na forma (4.1.4), veremos que estas são bem parecidas. Esta observação, somada ao fato de que (4.1.2) e (4.1.3) estão relacionadas a (4.1.5) e (4.1.6) por uma transformação conforme, nos sugere que os números topológicos das soluções tipo instanton (4.1.5) e tipo méron (4.1.2) estejam relacionados de alguma forma.

Demonstraremos, a seguir, que esta relação existe e que podemos calcular um número topológico genérico, função de um parâmetro a , $q(a)$, que nos fornece, no caso do méron ($a=1$) o valor $1/2$ e, no caso do instanton ($a=2i$), a unidade.

Primeiramente, condensemos (4.1.4) e (4.1.7) em uma única expressão, definindo

$$A_\mu(a) = - \frac{a \sigma_{\mu\alpha} x_\alpha}{x^2} \quad (4.3.1)$$

onde a é um parâmetro complexo arbitrário. Fica claro de (4.3.1) que, quando $a = i$, temos novamente (4.1.4) e, para $a=2i$, (4.1.7).

Substituindo (4.3.1) em (2.1.32), podemos mostrar que

$$F_{\mu\nu}(a) = -i a (2+i a) \frac{1}{x^4} [\sigma_{\mu\alpha} x_{\alpha}, \sigma_{\nu\beta} x_{\beta}]$$

expressão esta que, devido a (4.1.3), pode ser escrita como

$$F_{\mu\nu}(a) = -i a(2+i a) F_{\mu\nu}^M \quad (4.3.2)$$

onde por $F_{\mu\nu}^M$, queremos designar (4.1.3). Assim, de (4.3.2), segue que (4.2.1) é válida também neste caso, ou seja,

$$\text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}(a) \tilde{F}_{\mu\nu}(a) \right\}_{x \neq 0} = 0$$

o que implica no fato de que q^r é igual a zero.

Substituindo-se (4.3.1) em (2.3.11), podemos mostrar, a partir de um cálculo exatamente análogo ao da seção anterior, que

$$I_{\mu}(a) = -3a^2(1 + \frac{1}{3} i a) \partial_{\mu} x^{-2} \quad (4.3.3)$$

e de (2.3.10) temos que

$$\text{Tr} \{ F_{\mu\nu}(a) \tilde{F}_{\mu\nu}(a) \} = 12\pi^2 a^2 (1 + \frac{1}{3} i a) \delta^4(x) \quad (4.3.4)$$

Deste modo, de (2.3.4), segue que

$$q(a) = -\frac{3}{4} a^2 \left(1 + \frac{1}{3} i a\right) \quad (4.3.5)$$

onde

$$q(a) = \bar{q}(a) = q^S(a)$$

o que pode ser comprovado, calculando-se $\bar{q}(a)$ a partir de (2.3.14)

$$\begin{aligned} \bar{q}(a) &= \frac{3a^2}{16\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3} i a\right) \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_3} \partial_\mu x^{\mu-2} dS_\mu \\ &= -\frac{3a^2}{8\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3} i a\right) \int_{S_3} d\Omega \end{aligned}$$

ou seja,

$$\bar{q}(a) = -\frac{3}{4} a^2 \left(1 + \frac{1}{3} i a\right)$$

e a demonstração para q^S é trivial.

Finalmente, podemos ver de (4.3.5) que

$$q(i) = \frac{1}{2}$$

e que

$$q(2i) = 1$$

como queríamos demonstrar.

5. A CLASSE DE SOLUÇÕES COM PARÂMETRO DE "EXTENSÃO"

λ^2 NEGATIVO.

5.1. - O Instanton com λ^2 negativo

Em 1978, Bollini, Giambiagi e Tiomno [16] propuseram que a classe de soluções tipo Instanton das equações de Yang-Mills, com parâmetro de extensão λ^2 positivo, podia ser estendida a λ^2 negativo e que a natureza da esfera de raio $|\lambda|$ podia ser analisada utilizando-se o método de regularização analítica [17]. Ainda no mesmo trabalho, os autores demonstraram que o número topológico da solução do tipo Instanton com λ^2 negativo podia ser calculado e que, analogamente ao caso do Instanton com λ^2 positivo, era igual à unidade. Isto sugeria que o método da regularização analítica podia ser aplicado ao Instanton com λ^2 negativo e que ambas as soluções possuíam características similares.

Queremos, aqui, aprofundar as análises neste sentido e demonstrar, através do método da regularização analítica, a similaridade entre as classes de soluções λ^2 negativo e λ^2 positivo.

Reveremos inicialmente alguns resultados de nosso interesse.

Podemos observar que quando λ é puramente imaginário em

$$A_{\mu} = - \frac{2i \sigma_{\mu\nu} x_{\nu}}{x^2 + \lambda^2}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{4i \lambda^2 \sigma_{\mu\nu}}{(x^2 + \lambda^2)^2}$$

que, conforme podemos ver de (2.2.16), são correspondentemente o potencial e o tensor das intensidades de campo que caracterizam a solução tipo instanton BPST, temos uma singularidade na esfera $x^2 = |\lambda^2|$. Uma maneira natural de dar um significado a esta singularidade, é nos aproximarmos do eixo imaginário pela direita. Para $\text{Re}(\lambda) = 0$, (2.2.16) é uma solução sem fonte. Assim, podemos tomar

$$\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2 \quad ; \quad \lambda_1 > 0$$

e, conseqüentemente, no limite $\lambda_1 \rightarrow 0$,

$$\lambda^2 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 2i \lambda_1 \lambda_2 \rightarrow -\lambda_2^2 \pm i0$$

onde o sinal \pm corresponde a $\lambda_2 \gtrless 0$.

Trabalhando, por questão de simplicidade, com o sinal positivo, teremos que

$$A_{\mu}^{(+i0)} = - \frac{2i \sigma_{\mu\nu} x_{\nu}}{(x^2 - \lambda^2 + i0)} \quad (5.1.1)$$

e, dos resultados obtidos por Guelfand e Shilov [17] de que a distribuição

$$(x^2 - \lambda^2 + ic)^{\alpha}$$

é um funcional analítico (inteiro), bem definido com relação ao

parâmetro α e que todas as suas potências e derivadas estão bem definidas, podemos calcular o tensor das intensidades de campo $F_{\mu\nu}$ e a corrente correspondente a (5.1.1):

$$F_{\mu\nu}^{(+i0)} = \frac{4i \lambda^2 \cdot \sigma_{\nu\mu}}{(x^2 - \lambda^2 + i0)^2} \tag{5.1.2}$$

$$J_\mu = \partial_\nu F_{\mu\nu} + [A_\nu, F_{\mu\nu}]$$

$$J_\mu^{(+i0)} = 0 \tag{5.1.3}$$

A equação (5.1.3) segue simplesmente da autodualidade de (5.1.2).

Dos resultados obtidos por Guelfand e Shilov, temos ainda que

$$(x^2 - \lambda^2 \pm i0)^\alpha = (x^2 - \lambda^2)_+^\alpha + e^{\pm i\pi\alpha} (x^2 - \lambda^2)_-^\alpha \tag{5.1.4}$$

onde

$$(x^2 - \lambda^2)_+^\alpha = \begin{cases} (x^2 - \lambda^2)^\alpha & ; x^2 > \lambda^2 \\ 0 & ; x^2 < \lambda^2 \end{cases} \tag{5.1.5}$$

$$(x^2 - \lambda^2)_-^\alpha = \begin{cases} (\lambda^2 - x^2)^\alpha & ; x^2 < \lambda^2 \\ 0 & ; x^2 > \lambda^2 \end{cases}$$

são distribuições bem definidas, analíticas em α , com polos em $\alpha = -n$ (inteiro positivo), de modo que de (5.1.4) e (5.1.5) $A_\mu^{(+i0)}$ pode ser escrito em termos de $A_\mu^{(\alpha)+}$ e $A_\mu^{(\alpha)-}$ definidos por

$$A_{\mu}^{(\alpha)\pm} = \mp 2i \sigma_{\mu\nu} x_{\nu} (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{\alpha} \quad (5.1.6)$$

e do potencial acima, o tensor das intensidades de campo $F_{\mu\nu}^{(\alpha)\pm}$ pode ser calculado

$$F_{\nu\mu}^{(\alpha)\pm} = 4i \sigma_{\mu\nu} \left[x^2 \mp (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{-\alpha} \right] (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{2\alpha} + \\ 4i (\sigma_{\nu\beta} x_{\mu} - \sigma_{\mu\beta} x_{\nu}) x_{\beta} \left[\alpha (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{\alpha-1} + (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{2\alpha} \right] \quad (5.1.7)$$

e, introduzindo a definição

$$A_{\mu}^{(\alpha)} = A_{\mu}^{(\alpha)+} + A_{\mu}^{(\alpha)-} \quad (5.1.8)$$

ou seja,

$$A_{\mu}^{(\alpha)} = -2i \sigma_{\mu\nu} x_{\nu} \left[(x^2 - \lambda^2)_{+}^{\alpha} - (x^2 - \lambda^2)_{-}^{\alpha} \right] \quad (5.1.9)$$

podemos ver que, quando $\alpha \rightarrow -1$, (5.1.4) é exatamente a parte entre colchetes em (5.1.9). Dado que, perto dos polos,

$$(x^2 - \lambda^2)_{+}^{\alpha} = \frac{(-1)^{n-1} \delta^{(n-1)} (x^2 - \lambda^2)}{(n-1)! (\alpha + n)} + \left[x^2 - \lambda^2 \right]_{+}^{-n} + O(\alpha + n)$$

$$(x^2 - \lambda^2)_{-}^{\alpha} = \frac{\delta^{(n-1)} (x^2 - \lambda^2)}{(n-1)! (\alpha + n)} + \left[x^2 - \lambda^2 \right]_{-}^{-n} + O(\alpha + n)$$

onde

$$\left[x^2 - \lambda^2 \right]_{\pm}^{-n} = v_p (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{\alpha} \Big|_{\alpha = -n}$$

$$\delta^{(k)}(u) = \frac{d^k \delta(u)}{du^k}$$

$$\delta^{(k-1)}(\lambda^2 - x^2) = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k \lambda^{k-1}} \left[\delta^{(k-1)}(x - \lambda) - \delta^{(k-1)}(x + \lambda) \right]$$

teremos que, quando $\alpha \rightarrow -1$, a parte dos polos das distribuições (+) e (-) cancelam-se, deixando um resultado finito, onde

$$A_{\mu}^{VP} = -2i \sigma_{\mu\nu} x_{\nu} [x^2 - \lambda^2]^{-1}$$

é uma solução real e onde $[x^2 - \lambda^2]^{-1}$ é dada por

$$[x^2 - \lambda^2]^{-n} = [x^2 - \lambda^2]_{+}^{-n} + (-1)^n [x^2 - \lambda^2]_{-}^{-n}$$

e coincide com o valor principal de Cauchy para $n = 1$.

É fácil calcular o campo para o potencial dado pela equação (5.1.9), já que de (5.1.5), podemos ver que as distribuições (+) e (-) não se interferem, pois quando uma é zero a outra não o é e vice-versa. Por esta razão, o tensor das intensidades de campo correspondente a (5.1.9) é uma superposição dos resultados condensados em (5.1.7).

$$F_{\mu\nu}^{(\alpha)} = F_{\mu\nu}^{(\alpha)+} + F_{\mu\nu}^{(\alpha)-} \quad (5.1.10)$$

Para calcular o número topológico da solução dada pelas equações (5.1.1) e (5.1.2), Bollini, Giambiagi e Tiomnó calcularam, utilizando o método da regularização analítica, a integral em todo o espaço de

$$\text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}^{(i0)} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(i0)} \right\} = - \frac{96\lambda^4}{(x^2 - \lambda^2 + i0)^4}$$

demonstrando que o número topológico era, como no caso do íns -

tanton com λ^2 positivo, igual à unidade.

Faremos, agora, uma análise mais detalhada do comportamento do número topológico. Para isto, utilizaremos a propriedade de mútua exclusividade (não interferência) das distribuições (+) e (-), e de (5.1.6) e (5.1.7) calcularemos $q^{(\alpha)}$, $\bar{q}^{(\alpha)}$ nas regiões interior e exterior a $x^2 = |\lambda^2|$, além de suas respectivas contribuições no infinito.

De (2.3.11), (5.1.5) e (5.1.6) podemos calcular

$$I_{\mu}^{(\alpha)\pm} = 2 \epsilon_{\mu\nu\xi\beta} \text{Tr} \left\{ A_{\nu}^{(\alpha)\pm} \partial_{\xi} A_{\beta}^{(\alpha)\pm} + \frac{2}{3} A_{\nu}^{(\alpha)\pm} A_{\xi}^{(\alpha)\pm} A_{\beta}^{(\alpha)\pm} \right\}$$

e que devido à propriedade de mútua exclusividade dos campos, analogamente a (5.1.8) e (5.1.10), temos também

$$I_{\mu}^{(\alpha)} = I_{\mu}^{(\alpha)+} + I_{\mu}^{(\alpha)-} \quad (5.1.11)$$

Observando que

$$\partial_{\mu} A_{\nu}^{(\alpha)\pm} = \pm 2i \sigma_{\mu\nu} (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{\alpha} - 4i \alpha x_{\mu} x_{\nu} \sigma_{\nu\phi} (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{\alpha-1}$$

pode-se mostrar que

$$I_{\mu}^{(\alpha)\pm} = 2 \epsilon_{\mu\nu\xi\beta} \text{Tr} \left\{ 4x_{\theta} (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{2\alpha} \sigma_{\nu\theta} \sigma_{\xi\beta} \pm 8\alpha x_{\theta} x_{\phi} x_{\xi} (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{2\alpha-1} \sigma_{\nu\theta} \sigma_{\beta\phi} \right. \\ \left. \pm \frac{16}{3} i x_{\theta} x_{\rho} x_{\phi} (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{3\alpha} \sigma_{\nu\theta} \sigma_{\xi\rho} \sigma_{\beta\phi} \right\}$$

e utilizando-se as propriedades de anti-simetria de $\epsilon_{\mu\nu\xi\beta}$ e de (4.2.2) e (4.2.3) segue que

$$I_{\mu}^{(\alpha)\pm} = 4 \epsilon_{\mu\nu\xi\beta} \epsilon_{\nu\theta\xi\beta} x_{\theta} (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{2\alpha} \left\{ 1 \mp \frac{2}{3} x^2 (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{\alpha} \right\}$$

de onde obtêm-se que

$$I_{\mu}^{(\alpha)\pm} = -24 x_{\mu} (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{2\alpha} \left\{ 1 \mp \frac{2}{3} x^2 (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{\alpha} \right\} \quad (5.1.12)$$

De modo análogo, de (5.1.7) e (5.1.10), podemos calcular

$$\text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}^{(\alpha)} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(\alpha)} \right\} = \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}^{(\alpha)+} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(\alpha)+} \right\} + \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}^{(\alpha)-} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(\alpha)-} \right\}$$

É possível mostrar que

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}^{(\alpha)\pm} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(\alpha)\pm} \right\} &= -2 \epsilon_{\mu\nu\theta\phi} \text{Tr} \left\{ \epsilon_{\mu\nu\theta\phi} \left[x^2 \mp (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{-\alpha} \right]^2 (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{4\alpha} \right. \\ &\quad \left. - 4 \epsilon_{\mu\nu\theta\beta} x_{\phi} x_{\beta} \left[x^2 \mp (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{-\alpha} \right] (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{2\alpha} \left[\alpha (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{\alpha-1} + (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{2\alpha} \right] \right\} \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}^{(\alpha)\pm} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(\alpha)\pm} \right\} &= 96 \alpha x^4 (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{3\alpha-1} - 96 (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{2\alpha} \\ &\quad \mp 96 \alpha x^2 (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{2\alpha-1} \pm 96 x^2 (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{3\alpha} \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

A partir de (5.1.12), podemos mostrar facilmente que

$$\text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}^{(\alpha)\pm} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(\alpha)\pm} \right\} = 2 I_{\mu}^{(\alpha)\pm} \quad (5.1.14)$$

Obtidos os resultados (5.1.12) e (5.1.13), podemos agora calcular $\bar{q}(\alpha)$ e $q(\alpha)$ definidos respectivamente por

$$\bar{q}(\alpha) = \bar{q}_I(\alpha) + \bar{q}_{II}(\alpha) + \bar{q}_{III}(\alpha) \quad (5.1.15)$$

onde

$$\bar{q}_I(\alpha) = -\frac{1}{16\pi^2} \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{S_3(R^2 = \lambda^2 - \epsilon^2)} I_\mu^{(\alpha)} dS_\mu$$

$$\bar{q}_{II}(\alpha) = -\frac{1}{16\pi^2} \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{S_3(R^2 = \lambda^2 + \epsilon^2)} I_\mu^{(\alpha)} dS_\mu$$

$$\bar{q}_{III}(\alpha) = -\frac{1}{16\pi^2} \lim_{R^2 \gg \lambda^2} \int_{S_3} I_\mu^{(\alpha)} dS_\mu$$

e fica claro das definições acima, que $\bar{q}_I(\alpha)$ nos dá a contribuição do fluxo de $I_\mu^{(\alpha)}$ proveniente da região interior a $x^2 = |\lambda^2|$; bem como que $\bar{q}_{II}(\alpha)$ é a contribuição proveniente da região exterior a $x^2 = |\lambda^2|$, assim como $\bar{q}_{III}(\alpha)$ é a contribuição no infinito e,

$$q(\alpha) = q_{Int}(\alpha) + q_{Ext}(\alpha) \quad (5.1.16)$$

onde

$$q_{Int}(\alpha) = -\frac{1}{16\pi^2} \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V(X^2 \leq \lambda^2 - \epsilon^2)} \text{Tr}\{F_{\mu\nu}^{(\alpha)} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(\alpha)}\} d^4x$$

$$q_{Ext}(\alpha) = -\frac{1}{16\pi^2} \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V(\lambda^2 + \epsilon^2 \leq x^2 \leq R^2)} \text{Tr}\{F_{\mu\nu}^{(\alpha)} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(\alpha)}\} d^4x$$

ficando claro das definições acima que $q_{Int}(\alpha)$ é a contribuição da densidade de Chern no volume interior a $x^2 = |\lambda^2|$, bem como que

$q_{Ext}^{(\alpha)}$ é a contribuição da região exterior

Assim de (5.1.12) e (5.1.15), segue que

$$\begin{aligned} \bar{q}_I^{(\alpha)} &= -\frac{1}{16\pi^2} \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{S^3(R^2=\lambda^2-\epsilon^2)} I_{\mu}^{(\alpha)-} dS_{\mu} \\ &= \frac{3}{2\pi^2} \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{S^3(R^2=\lambda^2-\epsilon^2)} \left\{ (x^2-\lambda^2)^2 \alpha \left\{ \frac{2}{3} x^2 (x^2-\lambda^2)^{\alpha-} + 1 \right\} \right\} x^4 d\Omega \\ &= \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} (\lambda^2-R^2)^{2\alpha} \left\{ 2R^2 (\lambda^2-R^2)^{\alpha} + 3 \right\} R^4 \Big|_{R^2=\lambda^2-\epsilon^2} \\ &= \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \left\{ 2(\lambda^2-\epsilon^2)^3 \epsilon^{6\alpha} + 3(\lambda^2-\epsilon^2)^3 \epsilon^{4\alpha} \right\} \\ \bar{q}_I^{(\alpha)} &= 0 \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_{II}^{(\alpha)} &= -\frac{1}{16\pi^2} \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{S^3(R^2=\lambda^2+\epsilon^2)} I_{\mu}^{(\alpha)+} dS_{\mu} \\ &= \frac{3}{2\pi^2} \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{S^3(R^2=\lambda^2+\epsilon^2)} \left\{ (x^2-\lambda^2)^2 \alpha \left\{ 1 - \frac{2}{3} x^2 (x^2-\lambda^2)^{\alpha+} \right\} \right\} x^4 d\Omega \\ &= \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} (R^2-\lambda^2)^{2\alpha} \left\{ 3-2R^2 (R^2-\lambda^2)^{\alpha} \right\} R^4 \Big|_{R^2=\lambda^2+\epsilon^2} \\ &= \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \left\{ 3(\lambda^2+\epsilon^2)^2 \epsilon^{4\alpha} - 2(\lambda^2+\epsilon^2)^3 \epsilon^{6\alpha} \right\} \\ \bar{q}_{II}^{(\alpha)} &= 0 \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

bem como que

$$\begin{aligned} \bar{q}_{III}(\alpha) &= -\frac{1}{16\pi^2} \lim_{R^2 \gg \lambda^2} \int_{S_3} \tilde{I}_\mu^{(\alpha)+} dS_\mu \quad - \\ &= \lim_{R^2 \gg \lambda^2} (R^2 - \lambda^2)^{2\alpha} \{3 - 2R^2(R^2 - \lambda^2)^\alpha\} R^4 \end{aligned}$$

$$\bar{q}_{III}(\alpha) = 3R^{4(\alpha+1)} - 2R^{6(\alpha+1)} \quad (5.1.19)$$

Analogamente, de (5.1.13) e (5.1.16), segue que

$$\begin{aligned} q_{Int}(\alpha) &= -\frac{1}{16\pi^2} \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V(R^2 \leq \lambda^2 - \epsilon^2)} \text{Tr} \{ F_{\mu\nu}^{(\alpha)-} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(\alpha)-} \} d^4x \\ &= \frac{6}{\pi^2} \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V(R^2 \leq \lambda^2 - \epsilon^2)} d^4x \left[(\lambda^2 - x^2)^{2\alpha} \alpha x^2 (\lambda^2 - x^2)^{2\alpha-1} - \alpha x (\lambda^2 - x^2)^{3\alpha-1} + x^2 (\lambda^2 - x^2)^{3\alpha} \right] \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

entretanto, como

$$\int_{V(R^2 \leq \lambda^2 - \epsilon^2)} d^4x \ x^2 (\lambda^2 - x^2)^{2\alpha-1} = 2\pi^2 \int_0^{\sqrt{\lambda^2 - \epsilon^2}} r^5 (\lambda^2 - r^2)^{2\alpha-1} dr = \pi^2 \int_0^{\lambda^2 - \epsilon^2} r^4 (\lambda^2 - r^2)^{2\alpha-1} dr^2$$

e fazendo agora $r^2 = x$, temos que

$$\int_{V(R^2 \leq \lambda^2 - \epsilon^2)} d^4x \ x^2 (\lambda^2 - x^2)^{2\alpha-1} = \pi^2 \int_0^{\lambda^2 - \epsilon^2} x^2 (\lambda^2 - x)^{2\alpha-1} dx$$

e efetuando a integração por partes do termo à direita obtêm-se que

$$\int_{V(R^2 \leq \lambda^2 - \epsilon^2)} d^4x \ x^2 (\lambda^2 - x^2)^{2\alpha-1} = \frac{\pi^2}{\alpha} \left\{ -\frac{(\lambda^2 - \epsilon^2)^2 (\epsilon^2)^{2\alpha}}{2} + \int_0^{\lambda^2 - \epsilon^2} x (\lambda^2 - x)^{2\alpha} dx \right\}$$

e agora, tomando-se a parametrização inversa $x = r^2$, podemos

mostrar que

$$\pi^2 \int_0^{\lambda^2 - \varepsilon^2} x (\lambda^2 - x)^{2\alpha} dx = \int_{V(R^2 \leq \lambda^2 - x^2)} d^4 x (\lambda^2 - x^2)^{2\alpha}$$

de modo que no limite $\varepsilon^2 \rightarrow 0$, teremos que

$$\lim_{\varepsilon^2 \rightarrow 0} \alpha \int_{V(R^2 \leq \lambda^2 - \varepsilon^2)} d^4 x x^4 (\lambda^2 - x^2)^{2\alpha-1} = \lim_{\varepsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V(R^2 \leq \lambda^2 - \varepsilon^2)} d^4 x x^2 (\lambda^2 - x^2)^{2\alpha}$$

e de modo exatamente análogo, podemos demonstrar que

$$\lim_{\varepsilon^2 \rightarrow 0} \alpha \int_{V(R^2 \leq \lambda^2 - \varepsilon^2)} d^4 x x^4 (\lambda^2 - x^2)^{\alpha-1} = \lim_{\varepsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V(R^2 \leq \lambda^2 - \varepsilon^2)} d^4 x x^2 (\lambda^2 - x^2)^{\alpha}$$

e estes dois últimos resultados aplicados em (5.1.20) nos dizem que

$$q_{Int}^{(\alpha)} = 0 \quad (5.1.21)$$

Devido as definições de $\bar{q}_{II}^{(\alpha)}$ e $\bar{q}_{III}^{(\alpha)}$ dadas pela eq. (5.1.15) e a definição de $q_{Ext}^{(\alpha)}$ dada pela eq. (5.1.16), fica claro que, pelo teorema de Gauss, temos que

$$q_{Ext}^{(\alpha)} = \bar{q}_{II}^{(\alpha)} + \bar{q}_{III}^{(\alpha)} \quad (5.1.22)$$

que é uma conseqüência direta de (5.1.14), e como veremos a seguir, é facilmente verificado.

Para $q_{\text{Ext}}^{(\alpha)}$, segue-se que

$$\begin{aligned}
 q_{\text{Ext}}^{(\alpha)} &= -\frac{1}{16\pi^2} \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V(\lambda^2 + \epsilon^2 \leq x^2 \leq R^2)} \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}^{(\alpha)+} F_{\mu\nu}^{(\alpha)+} \right\} d^4x \\
 &= \frac{6}{\pi^2} \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V(\lambda^2 + \epsilon^2 \leq x^2 \leq R^2)} d^4x \left[(x^2 - \lambda^2)^{2\alpha} + \alpha x^2 (x^2 - \lambda^2)^{2\alpha-1} - \alpha x^4 (x^2 - \lambda^2)^{3\alpha-1} - \right. \\
 &\quad \left. - x^2 (x^2 - \lambda^2)^{3\alpha} \right] \quad (5.1.23)
 \end{aligned}$$

entretanto, sabendo-se que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \alpha \int_{V(\lambda^2 + \epsilon^2 \leq x^2 \leq R^2)} x^2 (x^2 - \lambda^2)^{2\alpha-1} d^4x &= \alpha 2\pi^2 \int_{\lambda}^R (r^2 - \lambda^2)^{2\alpha-1} r^5 dr = \\
 &= \alpha \pi^2 \int_{\lambda}^R (r^2 - \lambda^2) r^4 dr^2
 \end{aligned}$$

e efetuando, agora, a parametrização $r^2 = x$ e integrando por partes o último termo a direita, teremos que

$$\lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \alpha \int_{V(\lambda^2 + \epsilon^2 \leq x^2 \leq R^2)} x^2 (x^2 - \lambda^2)^{2\alpha-1} d^4x = \frac{R^4 (R^2 - \lambda^2)^{2\alpha} \pi^2}{2} - \pi^2 \int_{\lambda^2}^{R^2} x (x - \lambda^2)^{2\alpha} d^4x$$

e como

$$\lim_{\epsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V(\lambda^2 + \epsilon^2 \leq x^2 \leq R^2)} (x^2 - \lambda^2)^{2\alpha} d^4x = \pi^2 \int_{\lambda^2}^{R^2} x (x - \lambda^2)^{2\alpha} d^4x$$

podemos demonstrar então que

$$\lim_{\varepsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V(\lambda^2 + \varepsilon^2 \leq x^2 \leq R^2)} d^4x \left[(x^2 - \lambda^2)^{2\alpha} + \alpha x^2 (x^2 - \lambda^2)^{2\alpha-1} \right] = \frac{\pi^2 R^{4(1+\alpha)}}{2}$$

e seguindo o mesmo processo podemos demonstrar igualmente que

$$\lim_{\varepsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V(\lambda^2 + \varepsilon^2 \leq x^2 \leq R^2)} d^4x \left[(x^2 - \lambda^2)^{3\alpha} + \alpha x^2 (x^2 - \lambda^2)^{3\alpha-1} \right] = \frac{\pi^2 R^{6(1+\alpha)}}{3}$$

e aplicando estes dois últimos resultados a (5.1.23), teremos que

$$q_{\text{Ext}}^{(\alpha)} = 3R^{4(\alpha+1)} - 2R^{6(\alpha+1)} \quad (5.1.24)$$

Assim de (5.1.15) e (5.1.16), bem como de (5.1.17), (5.1.18), (5.1.19), (5.1.21), (5.1.2) segue-se que

$$q^{(\alpha)} = \bar{q}^{(\alpha)} = q_{\text{Ext}}^{(\alpha)} = \bar{q}_{\text{III}}^{(\alpha)} = 3R^{4(\alpha+1)} - 2R^{6(\alpha+1)}$$

e que é uma consequência direta de (5.1.14), e efetuando-se agora o prolongamento analítico $\alpha \rightarrow -1$, teremos que

$$q^{(-1)} = \bar{q}^{(-1)} = 1$$

o que demonstra que o método da regularização analítica elimina as singularidades sobre a superfície $x^2 = |\lambda^2|$ para o caso do instanton com λ^2 negativo, e que este possui o mesmo número topológico da solução λ^2 positivo.

5.2. - Cálculo do número topológico das soluções tipo dipolo

Ainda no mesmo trabalho, Bollini, Giambiagi e

Tiomno [16] mostraram que, uma vez aceita a solução do tipo λ^2 negativo, a fórmula de superposição de instantons de 't Hooft (3.1.6), no caso de dois instantons, podia ser escrita sob certa condição particular como

$$\rho = 1 + \frac{P \cdot x}{x^4} \quad (5.2.1)$$

onde P define o momento de dipolo de dois instantons.

Substituindo-se (5.2.1) em (3.1.1), teremos que

$$A_\mu = i \frac{\sigma_{\mu\nu} Q_\nu}{D} \quad (5.2.2)$$

onde

$$D = x^4 + P \cdot x \quad (5.2.3)$$

e

$$Q_\nu = P_\nu - \frac{4}{x^2} P \cdot x \cdot x_\nu \quad (5.2.4)$$

e de (5.2.2) e (2.1.32) segue que

$$\begin{aligned} F_{\nu\mu} = & i \frac{\sigma_{\mu\nu} Q^2}{D^2} + i \frac{\sigma_{\mu\beta}}{D^2} [D\partial_\nu Q_\beta - Q_\beta(Q_\nu + \partial_\nu D)] \\ & - i \frac{\sigma_{\nu\beta}}{D^2} [D\partial_\mu Q_\beta - Q_\beta(Q_\mu + \partial_\mu D)] \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Iremos agora demonstrar que o número topológico da solução tipo dipolo dada pelas equações (5.2.2) e (5.2.5) é zero.

Primeiramente, é possível mostrar que a densidade de Chern é dada por

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right\} = & -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ 2 \left[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\alpha\beta} \right] \frac{Q^4}{D^4} + \right. \\ & 2 \left[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\alpha\phi} \right] + \frac{Q^2}{D^4} \left[D \partial_\beta Q_\phi - Q_\phi (Q_\beta + \partial_\beta D) \right] + \\ & \left. 4 \sigma_{\mu\phi} \sigma_{\alpha\xi} \frac{1}{D^4} \left[D \partial_\nu Q_\phi - Q_\phi (Q_\nu + \partial_\nu D) \right] \left[D \partial_\beta Q_\xi - Q_\xi (Q_\beta + \partial_\beta D) \right] \right\} \end{aligned}$$

e utilizando-se as equações (3.2.1) e (4.2.2), além do fato de que de (5.2.3) e (5.2.4) é possível mostrar-se que

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{1}{D^3} \left[D (\partial_\nu Q_\alpha) \partial_\beta Q_\mu - 2 (\partial_\nu Q_\alpha) Q_\mu \partial_\beta D \right] = 0$$

e que

$$Q_\beta \partial_\beta D - D \partial_\beta Q_\beta = Q_\beta Q_\beta$$

segue-se que

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \} = & \frac{2}{D^4} \{ 3Q^2 + D \partial_\nu Q_\nu \} Q_\beta \partial_\beta D \\ & + \frac{2}{D^3} \partial_\nu Q_\beta \{ D \partial_\beta Q_\nu - 2Q_\nu Q_\beta - 2Q_\nu \partial_\beta D \} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Substituindo-se (5.2.2) em (2.3.11), podemos mostrar que

$$I_\mu = \frac{2}{D^3} Q_\alpha \{ D \partial_\alpha Q_\mu - Q_\mu \partial_\alpha D \} \quad (5.2.7)$$

cujas divergência nos fornece que

$$\begin{aligned} \partial_\mu I_\mu = & \frac{2}{D^4} \{ 3 (\partial_\mu D) \partial_\alpha D - D \partial_\mu \partial_\alpha D \} Q_\alpha Q_\mu + \\ & \frac{2}{D^3} \{ D \partial_\mu Q_\alpha - 3 Q_\alpha \partial_\mu D \} \partial_\alpha Q_\mu + \\ & \frac{2}{D^3} \{ D \partial_\alpha \partial_\mu Q_\mu - (\partial_\mu Q_\mu) \partial_\alpha D \} Q_\alpha \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Embora a igualdade entre as equações (5.2.6) e (5.2.8) não seja evidente podemos, a partir de (5.2.3) e (5.2.4), mostrar que

$$\text{Tr} \{F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}\} = \partial_\mu \bar{I}_\mu = \frac{2}{(x^4 + P \cdot x)^4} \left\{ 3P^4 - 16P^2 x^2 (P \cdot x) + 32P^2 x^6 - 32(P \cdot x)^3 + 160(P \cdot x)^2 x^4 \right\}$$

que aplicadas a (5.2.6) nos fornecem também que

$$\bar{I}_\mu = - \frac{2}{(x^4 + P \cdot x)^3} \left\{ P_\mu (P^2 - 8x^2 (P \cdot x)) + 4x_\mu (P^2 x^2 + 10(P \cdot x)^2 + \frac{2(P \cdot x)^3}{x^4}) \right\}$$

de onde podemos calcular o número topológico. Da equação (2.3.12) segue então que

$$\bar{q} = \frac{1}{8\pi^2} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_3} \frac{[4P^2 x^6 + P^2 x^2 (P \cdot x) + 32x^4 (P \cdot x)^2 + 8(P \cdot x)^3]}{(x^4 + P \cdot x)^3} d\Omega$$

de onde podemos ver que

$$\bar{q} = 0 \quad (5.2.9)$$

É claro que (5.2.9) só nos fornece o comportamento do número topológico no infinito. Para estudarmos o comportamento perto da superfície singular $D = 0$, podemos empregar o método de regularização analítica e fazer como no caso do íns-tanton com λ^2 negativo, ou seja, escrever (5.2.2) na forma

$$A_\mu^{(\alpha)\pm} = \pm i \sigma_{\mu\nu} Q_\nu D_\pm^\alpha \quad (5.2.10)$$

com

$$A_{\mu}^{(\alpha)\pm i0} = A_{\mu}^{(\alpha)+} \pm e^{i\pi\alpha} A_{\mu}^{(\alpha)-}$$

e

$$A_{\mu}^{(\alpha)} = A_{\mu}^{(\alpha)+} + A_{\mu}^{(\alpha)-}$$

onde

$$D_{+}^{\alpha} = \begin{cases} D^{\alpha} & ; D > 0 \\ 0 & ; D < 0 \end{cases}$$

$$D_{-}^{\alpha} = \begin{cases} |D|^{\alpha} & ; D < 0 \\ 0 & ; D > 0 \end{cases}$$

e calcular $I_{\mu}^{(\alpha)\pm}$ e $\text{Tr} \{F_{\mu\nu}^{(\alpha)\pm} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(\alpha)\pm}\}$ e, através destes, obter $\bar{q}^{(\alpha)}$ e $q^{(\alpha)}$ definidos analogamente a (5.1.15) e (5.1.16) e, após isto, efetuar o prolongamento analítico $\alpha \rightarrow -1$.

Entretanto, devido a semelhança entre as equações (5.1.6) e (5.2.10) (de fato, se fizermos $Q_{\nu} = -2x_{\nu}$ e $D_{\pm}^{\alpha} = (x^2 - \lambda^2)_{\pm}^{\alpha}$ em (5.2.10), obteremos (5.1.6)), e as equações (5.1.5) e (5.1.11), é intuitivamente óbvio que a contribuição para o número topológico nas regiões interior ($D < 0$) e exterior ($D > 0$) a superfície de singularidade ($D = 0$) será, identicamente ao caso anterior, igual a zero, de modo que o estudo do comportamento do número topológico no infinito nos é suficiente para determinar a sua contribuição total.

5.3. - Uma outra solução tipo dipolo

Demonstraremos, agora, que uma outra solução do tipo dipolo, diferente da anterior, pode ser obtida a partir do potencial multi-instanton de 't Hooft (3.1.19) para o caso de

dois instantons, uma vez aceita a idéia de λ^2 negativo, e que a mesma possui número topológico igual a zero.

Observemos, inicialmente, que o potencial escalar de dois instantons, da equação (3.1.6), é dado por

$$\rho = 1 + \frac{\lambda_1^2}{y_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{y_2^2}; \quad y_{i\nu} = (x - x_i)_\nu$$

e que, neste caso, o potencial, singular em x_1 e x_2 , solução da equação de Yang-Mills é, devido a equação (3.1.19), com $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ anti-autodual, igual a

$$A_\mu = - \frac{2i \bar{\sigma}_{\mu\beta}}{\rho} \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i^2 y_{i\beta}}{y_i^4} \quad (5.3.1)$$

Conforme foi demonstrado por Giambiagi e Rothe [15] é possível, neste caso, através de uma transformação de gauge singular $g(x)$ dada por

$$g(x) = \frac{z_\mu(x) + i\vec{\sigma} \cdot \vec{z}(x)}{\sqrt{z^2}}$$

onde

$$z_\mu = \frac{y_{1\mu}}{y_1^2} - \frac{y_{2\mu}}{y_2^2}$$

remover as duas singularidades e obter um potencial $A_\mu^{\text{"reg"}}$ regular em todo o espaço euclidiano quadridimensional.

Definindo

$$f_i(x) = \frac{\lambda_i^2}{y_i^2} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda_j^2}{y_j^2} \right\} \quad (5.3.2)$$

segue que a equação (5.3.1) pode ser escrita como

$$A_{\mu} = -2i \bar{\sigma}_{\mu\beta} \sum_{i=1}^2 \frac{f_i(x) y_{i\beta}}{y_i^2} \quad (5.3.3)$$

e, aplicando-se a transformação de gauge $g(x)$, teremos que

$$A_{\mu}^{\text{"reg"}} = g(x)A_{\mu}g^{-1}(x) + g(x)\partial_{\mu}g^{-1}(x)$$

que pode ser escrita, utilizando-se a equação (5.3.3), como

$$A_{\mu}^{\text{"reg"}} = \sum_{i=1}^2 f_i(x)g(x)(g_i^{-1}\partial_{\mu}g_i)g^{-1}(x) + g(x)\partial_{\mu}g^{-1}(x) \quad (5.3.4)$$

onde, de acordo com a equação (2.2.20),

$$g_i^{-1}\partial_{\mu}g_i = -\frac{2i\bar{\sigma}_{\mu\beta}y_{i\beta}}{y_i^2}$$

É possível mostrar-se que

$$g(x)(g_i^{-1}\partial_{\mu}g_i)g^{-1}(x) = 2i \left[\frac{2y_i \cdot z}{y_i^2} \sigma_{\mu\nu} \frac{z_{\nu}}{z^2} - \sigma_{\mu\nu} \frac{y_{i\nu}}{y_i^2} - 2z_{\mu}\sigma_{\lambda\rho} \frac{y_{i\lambda}}{y_i^2} \frac{z_{\rho}}{z^2} \right] \quad (5.3.5)$$

e que

$$g(x)\partial_{\mu}g^{-1}(x) = -2i\sigma_{\nu\lambda} \frac{z_{\lambda}}{z^2} S_{\mu\nu} \quad (5.3.6)$$

onde

$$S_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left\{ \delta_{\mu\nu} - \frac{2y_{i\mu}y_{i\nu}}{y_i^2} \right\} \frac{1}{y_i^2} \quad (5.3.7)$$

bem como que

$$z^2 = \frac{a^2}{y_1^2 y_2^2}; \quad a^2 = (x_1 - x_2)^2 \quad (5.3.8)$$

Dos três últimos resultados, segue-se que

$$g(x) \partial_{\mu} g^{-1}(x) = - \frac{2i}{a^2} \sigma_{\mu\lambda} \left\{ \frac{y_{1\lambda}}{y_1^2} - \frac{y_{2\lambda}}{y_2^2} \right\} (y_2^2 - y_1^2) + \frac{4i}{a^2} \left\{ \frac{y_{1\mu}}{y_1^2} - \frac{y_{2\mu}}{y_2^2} \right\} \sigma_{\nu\lambda} y_{2\nu} y_{1\lambda} \quad (5.3.9)$$

e, finalmente, substituindo as equações (5.3.2), (5.3.5) e (5.3.9) em (5.3.4), pode-se mostrar, após alguns cálculos, que

$$A_{\mu}^{\text{"reg"}} = \frac{-2i}{1 + \frac{\lambda_1^2}{y_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{y_2^2}} \left\{ \frac{(y_2^2 - y_1^2)}{(x_2 - x_1)^2} \sigma_{\mu\nu} z_{\nu} + \frac{1}{y_1^2 y_2^2} \sigma_{\mu\nu} (\lambda_2^2 y_{1\nu} + \lambda_1^2 y_{2\nu}) + \frac{2z_{\mu}}{(x_2 - x_1)^2} \sigma_{\lambda\nu} y_{1\lambda} y_{2\nu} \right\} \quad (5.3.10)$$

nos fornece a representação regular para o potencial de dois instantons.

Uma vez aceita a idéia de λ^2 negativo, podemos tomar, na equação (5.3.10), os limites $\lambda_1^2 \rightarrow \lambda^2$ e $\lambda_2^2 \rightarrow -\lambda^2$, e teremos então o potencial $A^{\text{"sing"}}$ para dois instantons, dado por

$$A_{\mu}^{\text{"sing"}} = \frac{-2i}{1 - \lambda^2 \left(\frac{1}{y_2^2} - \frac{1}{y_1^2} \right)} \left\{ \frac{y_2^2 - y_1^2}{(x_2 - x_1)^2} \sigma_{\mu\nu} z_{\nu} + \frac{1}{y_1^2 y_2^2} \sigma_{\mu\nu} \lambda^2 (y_{2\nu} - y_{1\nu}) + \frac{2z_{\mu}}{(x_2 - x_1)^2} \sigma_{\rho\nu} y_{1\rho} y_{2\nu} \right\} \quad (5.3.11)$$

que é singular sobre a superfície.

$$\frac{1}{y_2^2} - \frac{1}{y_1^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Fazendo, agora, $x_1 = 0$ e $x_2 = \epsilon$, a equação (5.3.11)

toma a forma

$$\begin{aligned}
 A_{\mu}^{\text{"sing"}} = & \frac{-2i}{1-\lambda^2 \left(\frac{2x \cdot \epsilon - \epsilon^2}{x^2(x-\epsilon)^2} \right)} \left\{ \frac{\epsilon^2 - 2x \cdot \epsilon}{\epsilon^2} \sigma_{\mu\nu} \frac{(\epsilon^2 - 2x \cdot \epsilon)x_{\nu} + x^2 \epsilon_{\nu}}{x^2(x-\epsilon)^2} \right. \\
 & - \sigma_{\mu\nu} \frac{\lambda^2 \epsilon_{\nu}}{x^2(x-\epsilon)^2} \\
 & \left. - \frac{2}{\epsilon^2} \left(\frac{(\epsilon^2 - 2x \cdot \epsilon)x_{\mu} + x^2 \epsilon_{\mu}}{x^2(x-\epsilon)^2} \right) \sigma_{\rho\nu} x_{\rho} \epsilon_{\nu} \right\} \quad (5.3.12)
 \end{aligned}$$

Se $|\epsilon| \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$, de forma que o produto

$$P_{\mu} = -2 \lambda^2 \epsilon_{\mu}$$

seja constante, então o potencial (5.3.12) tomado neste limite

$$A_{\mu}^{\text{Dip}} = \lim_{|\epsilon| \rightarrow 0} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_{\mu}^{\text{"sing"}}$$

representa o potencial de um dipolo e é dado por

$$A_{\mu}^{\text{Dip}} = \frac{-i}{x^4 + P \cdot x} \left\{ \sigma_{\mu\nu} (P_{\nu} + 4x^2(x \cdot e)\eta_{\nu}) + 4\sigma_{\rho\nu} x^2 x_{\rho} e_{\nu} \eta_{\mu} \right\} \quad (5.3.13)$$

onde

$$e_{\mu} = \frac{\epsilon_{\mu}}{|\epsilon|}$$

$$\eta_{\mu} = 2x_{\mu} \frac{(x \cdot e)}{x^2} - e_{\mu}$$

Definindo agora

$$D = x^4 + P \cdot x$$

$$T_v = - [P_v + 4x^2(x.e)\eta_v]$$

$$R_{\rho v} = - 4x^2 x_\rho e_v,$$

podemos escrever (5.3.13) como

$$A_\mu^{Dip} = i \sigma_{\mu v} \frac{T_v}{D} + i \sigma_{\rho v} \frac{R_{\rho v} \eta_\mu}{D} \quad (5.3.14)$$

e a partir da equação acima podemos mostrar que o tensor das intensidades de campo $F_{\mu\nu}$ é dado por

$$\begin{aligned} F_{\nu\mu}^{Dip} = & i \sigma_{\mu\nu} \frac{T^2}{D^2} - i(\sigma_{\mu\phi} T_\nu - \sigma_{\nu\phi} T_\mu) \frac{T_\phi}{D^2} - i(\sigma_{\mu\eta\nu} - \sigma_{\mu\phi}\eta_\nu)(R_{\xi\phi} - R_{\phi\xi}) \frac{T_\xi}{D^2} \\ & + i \sigma_{\xi\phi} [\eta_\nu (R_{\mu\phi} - R_{\phi\mu}) - \eta_\mu (R_{\nu\phi} - R_{\phi\nu})] \frac{T_\xi}{D^2} \\ & + i \sigma_{\mu\phi} \partial_\nu \left(\frac{T_\phi}{D} \right) + i \sigma_{\xi\phi} \partial_\nu \left(\frac{R_{\xi\phi} \eta_\mu}{D} \right) \\ & - i \sigma_{\nu\phi} \partial_\mu \left(\frac{T_\phi}{D} \right) - i \sigma_{\xi\phi} \partial_\mu \left(\frac{R_{\xi\phi} \eta_\nu}{D} \right) \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

Da equação (5.3.15) podemos ver que o comportamento de $F_{\mu\nu}^{Dip}$ quando $|x| \rightarrow \infty$ é da forma x^{-2} , o que significa que ele vai a zero muito lentamente no infinito; entretanto, demonstraremos que o número topológico desta solução é igual a zero.

Dado que I_μ^{Dip} está definido como

$$I_\mu^{Dip} = 2 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \{ A_\nu^{Dip} \partial_\alpha A_\beta^{Dip} + \frac{2}{3} A_\nu^{Dip} A_\alpha^{Dip} A_\beta^{Dip} \}$$

podemos mostrar, observando que só existem duas variáveis independentes, x_μ e e_μ , já que P_μ é um vetor constante na direção de e_μ , que

$$I_{\mu}^{DiP} = \frac{2}{3D^3} \left\{ 3D(T_{\alpha} \partial_{\alpha} T_{\mu} - T_{\mu} \partial_{\alpha} T_{\alpha}) - 3T_{\mu} T^2 + (R_{\mu\nu} - R_{\nu\mu}) \eta_{\nu} T^2 \right. \\ \left. + 2(R_{\mu\nu} - R_{\nu\mu}) \eta_{\beta} T_{\beta} T_{\nu} - 2(R_{\beta\nu} - R_{\nu\beta}) \eta_{\beta} T_{\nu} T_{\mu} \right\}$$

É possível mostrar-se que o comportamento assintótico de I_{μ}^{DiP} é dado por

$$I_{\mu}^{DiP} (|x| \rightarrow \infty) = \frac{1}{x^{12}} \left\{ 64 \times 6^6 (x.e)^2 x_{\mu} + 128 \times 6^6 (x.e)^3 e_{\mu} - 256 \times 4^4 (x.e)^4 x_{\mu} \right\}$$

de modo que de (2.3.14) teremos que

$$\frac{-DiP}{q} = - \frac{1}{16\pi^2} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{S_3} I_{\mu}^{DiP} dS_{\mu} \\ = \frac{4}{\pi^2} \int_{S_3} (2 \cos^4 \xi - \cos^2 \xi) d\Omega$$

onde escolhemos, sem perda de generalidade, $e = \hat{t}$.

Tomando

$$d\Omega = \sin^2 \xi \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, d\xi ; 0 < \phi < 2\pi ; 0 < \theta, \xi < \pi$$

e dado que

$$\int_0^{\pi} \cos^4 \xi \sin^2 \xi \, d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 \xi \sin^2 \xi \, d\xi$$

segue que

$$\frac{-DiP}{q} = 0.$$

como era nosso intuito demonstrar.

É claro que, aqui também, só calculamos a contribuição do fluxo de I_{μ}^{Dip} no infinito, sem levar em conta o seu comportamento perto da superfície $D = 0$. Pelas mesmas razões alegadas na seção anterior, achamos que isto nos é suficiente para determinar a sua contribuição total.

6. CONCLUSÕES

Dado o papel dos instantons nas teorias de gauge, novas soluções deste tipo são sempre de interesse e, dentro deste espírito, analisamos aqui, utilizando o método de regularização analítica de Guelfand e Shilov [17], a classe de soluções tipo instanton, com parâmetro de extensão λ^2 negativo, das equações de Yang-Mills, apresentada por Bollandi, Giambiagi e Tiomno [16].

Primeiramente, na secção 5.1, demonstramos, fazendo uso do método de regularização analítica, que a solução tipo instanton propriamente dita (análoga à solução BPST) com λ^2 negativo, possui número topológico bem definido e igual à unidade, o que resulta do fato de que, devido o método de regularização empregado, as integrais que definem este número não são divergentes sobre a superfície $x^2 = |\lambda^2|$.

Na secção 5.2, demonstramos que a classe de soluções do tipo dipolo possui número topológico igual a zero, o que foi feito mostrando-se que a contribuição no infinito é nula bem como, da mesma forma que no caso precedente, as contribuições das regiões interior e exterior à superfície de singularidade $D = 0$.

Na secção 5.3, apresentamos uma outra solução, do tipo dipolo, obtida através da representação regular para o potencial de dois instantons, utilizando mais uma vez a idéia de λ^2 negativo, solução esta que demonstramos possuir número topológico nulo, fazendo uso de argumentos idênticos aos da secção anterior.

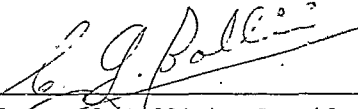
-24-

REFERÊNCIAS

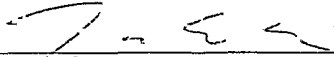
- [1] A.C.Scott, F.Y.F.Chu, D.W.McLaughlin, Proceedings of the I.E.E.E., 61, 1443 (1973);
- [2] W.Marciano and H. Pagels, Physics Reports C 36, 137 (1978);
- [3] D.Olive, S.Sciuto, R.J.Crewther, Revista del Nuovo Cimento, 2, nº 8 (1979);
- [4] A.M.Polyakov, Physics Letters, 59 B, 82 (1975);
- [5] A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.S.Schwartz, Yu.S.Tyupkin, Physics Letters 59 B, 85 (1975);
- [6] C.N.Yang, R.I.Mills, Physics Review 96, 191 (1954);
- [7] C.G.Bollini, II Simpósio Argentino de Física Teórica de Partículas y Campos, Bariloche, Argentina (1973);
- [8] E.C.Marino, J.A. Swieca, Nota científica PUC nº 7, (1978);
- [9] E.Witten, Physics Review Letters 38, 121 (1977);
- [10] G. 't Hooft, Deeper Pathways in High Energy Physics, Eds.: A. Perlmutter, L.F.Scott-Plenum, New York (1977);
- [11] F.Wilczek, Quark Confinement and Field Theory, Eds.: D.Stump, D.Weingarten, J.Wiley, New York (1977);
- [12] E.Corrigan, D.B. Fairlie, Physics Letters 67, 69 (1977);
- [13] V. de Alfaro, S.Fubini, G.Furlan, Physics Letters 65 E, 163 (1976);

- [14] R.Jackiw, C.Nohl, C.Rebbi, Physics Review 15 D, 1642 , (1977);
- [15] J.J.Giambiagi, K.D.Rothe, Nuclear Physics 129 B, 111, (1977);
- [16] C.G.Bollini, J.J.Giambiagi, J.Tiomno, Nota científica, PUC n° 22 (1978);
- [17] I.M. Gelfand, G.E. Shilov, Les Distributions, Dunod, Paris (1962).

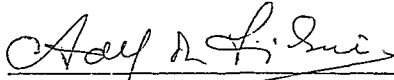
Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Carlos Guido Pollini - Presidente



Jorge André Swieca



Adel da Silveira

xxxxxxxxx

Juan José Giambiagi - Suplente

Rio de Janeiro, 29 de novembro de 1979.