CESAR AUGUSTO LINHARES DA FONSECA JR.

MODELOS ESTELARES NA TEORIA GRAVITACIONAL DE EINSTEIN-CARTAN

TESE DE MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO

1979

À Elisabeth

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar meu agradecimento às seguintes pessoas:

Carlos Augusto Pinto Galvão, que dirigiu e orientou este trabalho.

Jáder Benuzzi Martins pela assistência na etapa final.

Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira e Fernando de Felice pelas úteis discussões e sugestões.

Amigos e colegas do CBPF e da PUC-RJ pelo apoio e estima.

RESUMO.

Apresenta-se, nesta tese, a teoria gravitacional de Einstein-Cartan, a qual utiliza variedades espaço-temporais dotadas de métrica e torção. Discutem-se, neste contexto, o comportamento de trajetórias de partículas livres (em especial, a equação do desvio das curvas autoparalelas), o eletromagnetismo e a evolução da expansão, deformação e rotação de um fluido perfeito com spin. Além disso, são construídos dois modelos estelares com simetria esférica, para uma distribuição de fluido perfeito com spin: o primeiro é estático, enquanto que o segundo evolui no tempo e inclui radiação eletromagnética. As equações de campo são resolvidas de acordo com o método de Prasanna e são discutidos os problemas e as características das soluções obtidas.

NOTAÇÃO E CONVENÇÕES.

Índices gregos assumem valores de 0 a 3.

Índices latinos assumem valores de 1 a 3.

Índices repetidos são somados sobre todo o espectro de valores.

A assinatura da métrica é diag (+ - - -).

A conexão riemanniana (símbolos de Christoffel) é denotada por $\{^{\alpha}_{\beta\gamma}\}$, enquanto que a conexão de Riemann-Cartan por $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

Utilizam-se indistintamente as seguintes notações para equações diferenciais:

diferenciação parcial: $\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu}\phi \equiv \phi_{,\mu}$.

diferenciação covariante em espaço de Riemann:

$\overset{\{\}}{\nabla}_{\mu} A_{\nu} \equiv A_{\nu;\mu}$.

diferenciação covariante em espaço de Riemann-Cartan:

$\nabla_{\mu} A_{\nu} \equiv A_{\nu:\mu}$.

Simetrização de tensores: $A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$.

Antissimetrização de tensores: $A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$.

ÍNDICE

Introdução.

Após o surgimento da teoria da Relatividade Geral de Einstein em 1915, várias propostas de modificá-la foram apresentadas de forma a incluir a interação de outros campos físicos. Assim, numerosas tentativas de se alterar a geometria do espaço-tempo e as leis dinâmicas que regem a interação gravitacional foram introduzidas. Surgiram , deste modo, por exemplo, as teorias de unificação da gravitação e o eletromagnetismo (ver Tonnelat 1965).

Atualmente, acredita-se que uma teoria alternativa para a gravitação deve satisfazer alguns requisitos sintetizados por Camenzind (1978):

- apresentar acordo com todos os testes experimentais conhecidos na década de 1970, além das observações a nível cosmológico (expansão do universo);
- oferecer um "melhor" resultado para o estado final de um colapso;
- possuir simplicidade estrutural.

Entre estas, uma das mais estudadas nos últimos anos é a teoria gravitacional de Einstein-Cartan, que é tratada neste trabalho juntamente com algumas aplicações na construção de modelos estelares. Esta teoria caracteriza-se, sobretudo, por descrever o espaço-tempo através de uma variedade dotada de torção.

Historicamente, a torção foi introduzida em geometria diferencial como a parte antissimétrica de uma conexão afim assimétrica por Élie Cartan (1922, 1923, 1924, 1925), que sugeriu seu possível conteúdo físico ao supor sua correspondência com o momentum angular de spin. É importante observar que esta sugestão é anterior ao trabalho de Uhlenbeck e Goudsmit, realizado em 1926.

Esta idéia, entretanto, não foi desenvolvida nos anos subseqüentes até que Sciama (1962) e Kibble (1961), em abordagem do assunto através de teorias de gauge, chegaram a duas equações de campo: a primeira, relacionando os aspectos métricos da variedade espaço-temporal com a energia-momentum, e a segunda, explicitando as propriedades de torção desta variedade como conseqüência da presença de uma distribuição de momentum angular de spin.

Posteriormente, Hehl (1973, 1974) estabeleceu a teoria em sua forma geométrica, deduzindo as equações de Sciama-Kibble através do formalismo lagrangiano, pelo método variacional de Palatini-Hilbert. Também foram deduzidas as expressões para as leis de conservação da energia-momentum e do momentum angular, baseado nos trabalhos de simetrização do tensor canônico de energia-momentum por Belinfante (1939) e Rosenfeld (1940). Também foi explicitada a existência da interação repulsiva de contato spin-spin, característica da teoria.

Independentemente, Trautman (1972a, b, c, 1973a) formulou a teoria de Einstein-Cartan em termos do formalismo da geometria diferencial moderna, utilizando o cálculo exterior e formas diferenciais.

O grande interesse pela teoria ocorreu devido à possibilidade de que a interação de contato spin-spin poderia conter o colapso gravitacional, evitando singularidades no espaço-tempo. Trautman (1973b) foi o primeiro a chamar a atenção para este fato. Além disso, a teoria prevê a existência de torção somente no interior das distribuições de matéria, de modo que é experimentalmente indistingüível da relatividade geral, pelo menos em relação a medidas possíveis de serem realizadas atualmente.

A teoria de Einstein-Cartan tornou-se, desta forma, uma das teorias mais pesquisadas como uma alternativa viável perante a relatividade geral como teoria da gravitação, provocando o surgimento de vários desenvolvimentos teóricos, em amplas direções.

No Capítulo I desta tese, descreve-se com bastante detalhe a variedade espaço-temporal dotada de torção e deduzem-se as equações de campo e as leis de conservação da energia-momentum e do momentum angular.

O Capítulo II mostra como esta geometria influi no comportamento de sistemas físicos: trajetórias de partículas, eletromagnetismo, teoria do fluido perfeito com spin.

Os resultados destes capítulos são utilizados nos modelos de estrelas esféricas com spin que constituem o Capítulo III. Duas espécies de estrelas são consideradas:

a primeira, estática e a segunda, evolutiva no tempo, contendo, também, radiação eletromagnética.

CAPÍTULO I

A TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN

I.1 Breve descrição da teoria.

INTRODUÇÃO A EINSTEIN-CARTAN.

Acredita-se, atualmente, que a melhor descrição da interação gravitacional e de suas conseqüências é feita através da Teoria da Relatividade Geral, tal como formulada por Albert Einstein em 1915. Nesta teoria, as propriedades da gravitação resultam da influência da matéria sobre a geometria do espaço-tempo e os efeitos por ela previstos vêm sendo confirmados experimentalmente com grande precisão nas últimas décadas.

Entretanto, a relatividade geral foi concebida para grandes quantidades de matéria. Afinal, dentre as interações fundamentais, a gravitacional é a mais fraca; seus efeitos ficam mais evidentes quando as massas envolvidas atingem ordens de grandeza elevadas, tais como as que são encontradas em planetas, estrelas, galáxias, etc. Assim, a relatividade geral de Einstein descreve acuradamente a gravitação de corpos macroscópicos.

Em níveis microscópicos, a obtenção de dados experimentais sobre a interação gravitacional é extremamente difícil, devido à sua fraca intensidade. A tentativa de se usar os métodos de quantização de campos em relatividade geral não forneceu resultados completamente satisfatórios. Um enfoque diferente torna-se, portanto, necessário.

A teoria de Einstein-Cartan é proposta como uma alternativa no sentido exposto acima. Ela procura dar uma descrição coerente da gravitação no mundo microscópico, reduzindo-se à relatividade geral no limite macroscópico. Entretanto, trata-se de uma teoria clássica, na qual não foram introduzidos métodos de quantização de campos.

Em relatividade geral, diz-se que a matéria transporta energia-momentum; a energia-momentum está relacionada com as propriedades dinâmicas da matéria no que se refere a translações no espaço-tempo. A teoria de Einstein-Cartan, mais geral, inclui o momentum angular de spin como uma propriedade dinâmica adicional da matéria, associada a rotações no espaço-tempo.

Através das experiências realizadas sobre a física das partículas elementares, sabe-se que estas obedecem às leis da Mecânica Quântica e da Relatividade Especial. O grupo de covariância da Relatividade Especial é o grupo de Poincaré, cuja lei de transformação deixa invariante a métrica plana $\eta_{\mu\nu}$. Suas representações unitárias irredutíveis são caracterizadas por números reais m e s, sendo m um número positivo e s um número inteiro,ou semi-inteiro positivo,ou nulo. Na física das partículas elementares, as representações unitárias do grupo de Poincaré são usadas para classificar estas partículas, pois os espaços de representação deste grupo possuem a estrutura de espaços de Hilbert e são interpretados como os espaços de Hilbert de uma partícula relativista com massa m e spin s. As quantidades m e s estão relacionadas com as partes de translação e de rotação do grupo de Poincaré, respectivamente.

Com isto em mente, a hipótese que se faz é que tanto a massa quanto o spin são capazes de influenciar a geometria do espaço-tempo; passa-se a considerar também o spin como fonte de campo gravitacional. Não haveria nisto contradição alguma com os dados observacionais que apóiam a relatividade geral, pois, como já foi dito, estes dados foram obtidos para distribuições macroscópicas de matéria, em que o spin, devido a seu caráter dipolar, se cancelaria em média, tornando seus efeitos desprezíveis ou nulos. Restariam apenas os efeitos gravitacionais provocados pela massa da distribuição, já descritos pela teoria de Einstein. Entretanto, numa distribuição de matéria polarizada, com uma densidade média de spin não nula e significativa, as observações poderiam divergir da relatividade geral.

A analogia pode ser resumida da seguinte maneira:

massa - translações no espaço-tempo - energia-momentum

spin - rotações no espaço-tempo - momentum angular intrínseco.

Como se supõe que é a energia-momentum quem provoca a deformação do intervalo entre eventos do espaço-tempo (intervalo medido pela métrica) gerando, assim, uma curvatura no espaço-tempo, diz-se que a energia-momentum é acoplada à métrica. Esta deformação é do tipo translacional (isto é, conseqüência de variações na métrica). No sentido da analogia desenvolvida acima, procura-se descrever a possível influência do spin sobre a curvatura do espaço-tempo através de uma quantidade geométrica associada a graus de liberdade rotacionais do espaço-tempo.

Assim sendo, matematicamente, não se pode mais considerar o espaço-tempo como uma variedade riemanniana R_4, pois esta é insuficiente para descrever este tipo de grau de liberdade. É-se levado, desta forma, a uma variedade mais geral, a de Riemann Cartan U_4.

CONEXÃO AFIM, TORÇÃO, CONTORÇÃO E CURVATURA.

A maneira de se comparar, entre dois eventos próximos no espaço-tempo, os valores de campos vetoriais e tensoriais é realizar o transporte paralelo destes campos entre os eventos. Isto leva à definição do operador derivada covariante ou conexão afim ∇.

Como se sabe, ao se fazer o transporte paralelo de duas réguas (sobre qualquer curva do espaço-tempo), os comprimentos das réguas e o ângulo entre elas não são alterados. Matematicamente, isto significa que a métrica $g_{\mu\nu}$ é covariantemente constante (conexão "métrica" ou "rígida"):

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{1.1}$$

No sistema de coordenadas usado para escrever a equação (1.1), os coeficientes da conexão ∇ sobre uma base $\{e_\alpha\}$ do espaço dos vetores tangentes são dados por:

$$\nabla_{e_\alpha} e_\beta \equiv \nabla_\alpha e_\beta = \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\, e_\mu \; . \tag{1.2}$$

Em termos dos coeficientes de conexão Γ, a derivada covariante de um campo vetorial $U = U^\alpha e_\alpha$ fica escrita como:

$$\nabla_\alpha (U^\beta e_\beta) = (\partial_\alpha U^\beta + \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} U^\mu) e_\beta \tag{1.3a}$$

$$= U^\beta{}_{;\alpha}\, e_\beta \; . \tag{1.3b}$$

Se, além disso, se supõe que os coeficientes de conexão são simétricos:

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} \quad , \tag{1.4}$$

eles tomam a forma dos coeficientes de conexão do espaço-tempo riemanniano R_4, totalmente determinados pela métrica g, a partir de (1.1):

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \equiv \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \; , \tag{1.5}$$

e são os símbolos de Christoffel de segunda espécie. Isto define a derivada covariante nas variedades riemannianas utilizadas em relatividade geral.

Entretanto, se se descartar a condição de simetria (1.4), obtêm-se os coeficientes para o espaço-tempo mais geral de Riemann

Cartan U_4:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} - K_{\alpha\beta}{}^{\mu} \quad . \tag{1.6}$$

O objeto $K_{\alpha\beta}{}^{\mu}$ possui caráter tensorial, contrariamente a $\{{\mu \atop \alpha\beta}\}$, e é chamado de contorção.

Cartan definiu a torção deste espaço-tempo como sendo a parte antissimétrica dos coeficientes Γ:

$$\tau_{\alpha\beta}{}^{\mu} = \Gamma^{\mu}_{[\alpha\beta]} \quad , \tag{1.7}$$

de modo que, como conseqüência de (1.1), a contorção pode ser escrita em termos da torção como:

$$K_{\alpha\beta}{}^{\mu} = -\tau_{\alpha\beta}{}^{\mu} + g^{\mu\sigma} g_{\alpha\lambda} \tau_{\beta\sigma}{}^{\lambda} - g^{\mu\sigma} g_{\beta\lambda} \tau_{\sigma\alpha}{}^{\lambda} \quad . \tag{1.8}$$

Pela definição (1.7), a torção é antissimétrica nos dois primeiros índices e, por (1.8), vê-se que a contorção possui a mesma propriedade nos dois últimos:

$$\tau_{\alpha\beta}{}^{\mu} = -\tau_{\beta\alpha}{}^{\mu} \quad ; \tag{1.9}$$

$$K_{\alpha\beta}{}^{\mu} = -K_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta} \quad . \tag{1.10}$$

A curvatura do espaço-tempo U_4, através do tensor de Riemann, fica definida ao se tomar a diferença entre segundas derivadas covariantes de um campo vetorial arbitrário com componentes A_{α} :

$$A_{\alpha:\mu\nu} - A_{\alpha:\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha}{}^{\rho} A_{\rho} + 2\tau_{\mu\nu}{}^{\rho} A_{\alpha:\rho} \quad , \tag{1.11}$$

onde o tensor de Riemann $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\rho}$, em termos dos coeficientes Γ, se escreve:

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\rho} = 2\, \partial_{[\mu} \Gamma^{\rho}_{\nu]\alpha} + 2\, \Gamma^{\rho}_{[\mu|\sigma|} \Gamma^{\sigma}_{\nu]\alpha} \quad . \tag{1.12}$$

Observe-se, em (1.11), que, além da curvatura, a torção influi na não-comutatividade da operação de derivação covariante, isto é, a dependência do transporte paralelo na trajetória é determi nada por estes dois objetos.

AS EQUAÇÕES DE CAMPO.

Segundo Einstein, um referencial inercial em queda livre num campo gravitacional é indistingüível de um outro que sofre uma aceleração relativa a um referencial inercial. Baseado neste "princípio de equivalência", Einstein construiu a teoria da Relatividade Geral a partir da Relatividade Especial, culminando com a obtenção das equações para o campo gravitacional ("equações de campo de Einstein"):

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \,, \tag{1.13}$$

onde $G_{\mu\nu}$, o tensor de Einstein, é uma quantidade relacionada com a estrutura geométrica do espaço-tempo, G é a constante gravitacional de Newton, c é a velocidade da luz no vácuo e $T_{\mu\nu}$ representa o tensor de energia-momentum da matéria fonte do campo gravitacional.

Para se chegar às equações de campo na teoria de Einstein-Cartan, entretanto, esta abordagem do assunto não é conveniente. Há, porém, uma outra maneira de se chegar às equações de campo, imaginada por Hilbert e Palatini, que emprega métodos variacionais. E é adaptando-os que se obtêm as equações de campo no espaço-tempo U_4.

Embora sendo uma teoria válida em limites microscópicos e o spin um conceito essencialmente quântico, deve-se ressaltar que a teoria de Einstein-Cartan é uma teoria clássica, em que os métodos de quantização de campos ainda não foram introduzidos. Assim, uma distribuição de matéria será descrita por um campo clássico $\Psi(x^{\mu})$, cujos índices tensoriais estão omitidos.

A transição da relatividade especial para a teoria de Einstein-Cartan é igualmente realizada através do princípio de equivalência mencionado acima, formalmente descrito pelo "acoplamento mínimo entre a matéria e a gravitação": passa-se de uma variedade plana com métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ para uma variedade de Riemann-Cartan com métrica $g_{\mu\nu}$ e conexão afim ∇, fazendo-se as substituições de uma métrica pela outra e das derivadas parciais pelas covariantes segundo a conexão ∇:

$$\eta \rightarrow g$$
$$\partial \rightarrow \nabla .$$

Assim, partindo da densidade lagrangiana de matéria tal como é encontrada em relatividade especial,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial\psi, \eta) ,$$

onde Ψ representa o conjunto das componentes do campo de matéria e $\partial\Psi$ o conjunto de todas as suas derivadas primeiras com relação à posição no espaço-tempo, constrói-se a densidade lagrangiana em espaço-tempo de Riemann-Cartan, escrevendo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, g) , \tag{1.14}$$

em que $\nabla\Psi$ representa as derivadas covariantes do campo Ψ com relação à conexão afim ∇, cujos coeficientes são dados por (1.6).

De acordo com Hilbert, define-se dinamicamente o tensor (métrico) de energia-momentum como:

$$\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{1.15}$$

(Em relatividade geral, usa-se a mesma definição acima, embora, para esta teoria, o acoplamento mínimo implique numa densidade lagrangiana diferente, que depende das derivadas covariantes riemannianas dos campos Ψ).

Na teoria de Einstein-Cartan, como se trata a massa e o spin em condições de igualdade, é-se levado a procurar uma definição dinâmica para o spin, semelhante à (1.15).

Dentre as propriedades do tensor de momentum angular intrínseco ("tensor de spin") [ver , por exemplo, Soper (1976), Cap. 9] em espaços planos (onde a relatividade especial é válida), sabe-se que o tensor de spin, como um tensor de momentum angular, possui três índices. Será denotado, pois, por $S_{\mu\nu}{}^{\rho}$. Se este tensor estiver relacionado com algum outro tensor de caráter geométrico, este também deverá ser de ordem 3. Assim, um possível candidato seria o tensor de contorção $K_{\mu\nu}{}^{\rho}$ (e um outro o tensor de torção $\mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\rho}$), pois são objetos geométricos relacionados com os graus de liberdade rotacionais do espaço-tempo.

Sciama (1962) e Kibble (1961) propuseram a definição do tensor momentum angular de spin como:

$$\sqrt{-g}\; S_{\rho}{}^{\nu\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K_{\mu\nu}{}^{\rho}} \qquad . \tag{1.16}$$

Deve-se notar que, como a contorção é antissimétrica nos dois últimos índices e o spin nos dois primeiros, a ordem dos índices de S está consistente.

Em termos da densidade lagrangiana (1.14), o funcional de ação da matéria se escreve

$$I_m = \int \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, g)\, d^4x = \int \mathcal{L}(\psi, \partial\psi, g, \partial g, \mathcal{T})\, d^4x \ , \tag{1.17}$$

onde d^4x é o elemento de volume do espaço-tempo. Tal como em relatividade geral, a ação do campo gravitacional se escreve em termos da densidade escalar de curvatura $\mathcal{R}$. Entretanto, em U_4, $\mathcal{R}$ também contém uma nova variável independente: a torção e suas derivadas primeiras. Assim sendo, a ação total é:

$$I = \int [\mathcal{L}(\psi, \partial\psi, g, \partial g, \mathcal{T}) + \frac{1}{16\pi} \mathcal{R}(g, \partial g, \partial\partial g, \mathcal{T}, \partial\mathcal{T})]\, d^4x . \tag{1.18}$$

O princípio variacional de Hamilton impõe que:

$$\delta I = 0 \,, \tag{1.19}$$

quando os campos dos quais dependem as lagrangianas sofrem uma pequena variação. Devem ser variados, independentemente, o campo de matéria, a métrica e a torção. Isto leva às seguintes "equações do movimento":

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi} = 0 \quad ; \tag{1.20}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{16\pi} \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \quad ; \tag{1.21}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \tau_{\mu\nu}{}^{\rho}} + \frac{1}{16\pi} \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \tau_{\mu\nu}{}^{\rho}} = 0 \quad . \tag{1.22}$$

(1.20) é a equação de Euler-Lagrange usual para os campos Ψ . Esta equação inclui todos os campos de natureza não-gravitacional presentes no sistema.

Do estudo da variação da densidade escalar de curvatura em relação à métrica e à torção, (1.21) e (1.22) transformam-se nas "equações de campo da teoria de Einstein-Cartan":

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^{\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = G_{\mu\nu} = 8\pi\, t_{\mu\nu} \,, \tag{1.23}$$

$$\tau_{\mu\nu}{}^{\rho} + \delta_{\mu}^{\rho} \tau_{\nu\alpha}{}^{\alpha} - \delta_{\nu}^{\rho} \tau_{\mu\alpha}{}^{\alpha} = \mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\rho} = 8\pi S_{\mu\nu}{}^{\rho} \,. \tag{1.24}$$

(1.23) possui a forma da equação de campo de Einstein (1.13) da relatividade geral (com c=G=1), em que:

TENSOR DE EINSTEIN ≐ 8π. ENERGIA-MOMENTUM .

Entretanto, aqui, o tensor $G_{\mu\nu}$ é calculado a partir da conexão ∇ definida na variedade de Riemann-Cartan e, portanto, contém termos dependentes da torção. Além disso, a energia-momentum está representada em (1.23), não pelo tensor <u>métrico</u> de energia-momentum $T_{\mu\nu}$, mas pelo tensor <u>canônico</u> de energia-momentum $t_{\mu\nu}$*.

(1.24) é uma nova equação de campo, não existente em relatividade geral. Seu lado esquerdo forma o tensor de torção modificado $\mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\rho}$, que difere do tensor de torção em seu traço. Fica, assim, estabelecida uma nova relação entre entidades geométricas e físicas:

TENSOR DE TORÇÃO MODIFICADO = 8π. SPIN .

Observe-se que esta segunda equação de campo possui caráter algébrico, em contraste com a primeira, que é uma equação diferencial. Fisicamente, isto significa que, neste esquema, o espaço-tempo possui torção somente onde houver spin.

As duas equações de campo (1.23) e (1.24) podem ser combinadas numa só:

$$G^{\mu\nu}(\{\}) = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} + \left(\frac{8\pi G}{c^4}\right)^2 \Big[-4\, S^{\mu\rho}{}_{[\sigma}\, S^{\nu\sigma}{}_{\rho]} - 2\, S^{\mu\rho\sigma} S^{\nu}{}_{\rho\sigma} + S^{\rho\sigma\mu}\, S_{\rho\sigma}{}^{\nu} +$$
$$+ \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\left(4\, S_{\lambda}{}^{\rho}{}_{[\sigma}\, S^{\lambda\sigma}{}_{\rho]} + S^{\lambda\rho\sigma} S_{\lambda\rho\sigma}\right)\Big] \,, \quad (1.25)$$

onde $G^{\mu\nu}(\{\})$ representa o tensor de Einstein calculado a partir da conexão riemanniana. O lado direito de (1.25) contém, como primeiro termo, o que se deduz da teoria de Einstein, de modo que os termos dentro dos colchetes podem ser interpretados como uma "correção" à relatividade geral, mesmo porque, o primeiro termo vem precedido pela constante gravitacional G, enquanto que o segundo é proporcional a G^2, indicando uma ordem de grandeza muito menor.

*São considerados "canônicos" os tensores obtidos como quantidades conservadas, de acordo com o teorema de Noether.

LEIS DE CONSERVAÇÃO.

As leis de conservação em Einstein-Cartan são obtidas de maneira usual em teoria de campos, isto é, a partir do teorema de Noether. A conservação da energia-momentum é expressa por:

$$\overset{+}{\nabla}_\nu t_\mu{}^\nu \equiv S_{\nu\rho}{}^\sigma R_{\mu\sigma}{}^{\nu\rho} \quad . \tag{1.26}$$

Também é obtida uma outra identidade, que vem a ser interpretada como a lei de conservação do momentum angular:

$$\overset{*}{\nabla}_\rho S_{\mu\nu}{}^\rho - t_{[\mu\nu]} \equiv 0 \quad . \tag{1.27}$$

[Nestas fórmulas, fez-se uso das seguintes convenções simplificadoras para derivadas (Hehl 1973)

$$\overset{*}{\nabla}_\rho \equiv \nabla_\rho + 2\, S_{\rho\sigma}{}^\sigma \quad ,$$

$$\overset{+}{\nabla}_\nu t_\mu{}^\nu \equiv \overset{*}{\nabla}_\nu t_\mu{}^\nu + 2\, S_{\nu\mu}{}^\rho t_\rho{}^\nu \quad .]$$

Uma importante característica da teoria de Einstein - Cartan é o fato de que sua lagrangiana difere da lagrangiana da relatividade geral, em primeira ordem, pela quantidade:

$$\frac{1}{2} S_\rho{}^{\nu\mu} K_{\mu\nu}{}^\rho = \frac{8\pi G}{c^4}\left(-\frac{1}{2} S_{\mu\nu\rho} S^{\mu\nu\rho} + S_{\mu\nu\rho} S^{\nu\rho\mu} + S_{\mu\nu}{}^\nu S^{\mu\rho}{}_\rho\right) , \tag{1.28}$$

indicando a presença de uma interação de contato spin-spin universal. Note-se que ela é proporcional à constante gravitacional e, portanto, muito fraca. Esta interação tem alcance nulo, isto é, somente ocorre via contato da matéria.

I.2 A Variedade de Riemann-Cartan U_4.

Não se pretende fazer aqui uma descrição completa e detalhada de todos os aspectos da geometria U_4. Isto já foi amplamente discutido, por exemplo, por Galvão (1975, 1976) e em referências citadas nestes trabalhos . Serão fornecidos simplesmente os resultados principais para referências futuras e estabelecimento de notação.

TOPOLOGIA DIFERENCIAL.

Considera-se o espaço-tempo dotado de uma estrutura de "variedade diferenciável" V 4-dimensional: um conjunto de pontos ("eventos") ligados contínua e diferenciavelmente entre si. Em cada vizinhança em torno de cada um destes pontos, atribui-se um sistema de coordenadas $\{x^{\mu}\}$, $\mu = 0,1,2,3$, do qual a variedade não é dependente. Uma função definida sobre a variedade V será dita diferenciável se for diferenciável nas coordenadas dos pontos de V [ver Schouten (1954), Caps. II e III].

Nesta variedade diferenciável V podem ser definidos "objetos geométricos": vetores, formas diferenciais, tensores,... Dada uma curva C sobre V, cujos pontos são caracterizados por um parâmetro λ, define-se um vetor U, tangente a C (λ) no ponto P=C (λ_0), como o operador derivada direcional ao longo desta curva:

$$U \equiv \partial_U = \left[\frac{d}{d\lambda} \right]_{C(\lambda_0)} \tag{2.1}$$

O conjunto dos operadores derivadas direcionais definidos no ponto P formam um espaço vetorial abstrato chamado espaço tangente à variedade em P*. O conjunto de quatro vetores linearmente independentes $\{e_\alpha\}$ deste espaço tangente forma uma base sobre a qual podem ser expandidos todos os outros vetores em P (no sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$ introduzido na vizinhança de P):

$$U = U^\alpha e_\alpha$$

$$V = V^\alpha e_\alpha$$

*Ver Hicks (1965) ou Lovelock & Rund (1975).

O conjunto de vetores $\{\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\} \equiv \{\partial_{\alpha}\}$ é uma base para o espaço tangente induzida pelo sistema de coordenadas; será denominado base de coordenadas ou base canônica.

Uma troca na escolha de coordenadas não afeta a variedade nem seus vetores. Se se passar a novas coordenadas $\{x^{\bar{\alpha}}\}$, definindo uma nova base canônica $\{\partial_{\bar{\alpha}}\}$, somente se alteram as componentes do vetor:

$$U = U^{\alpha}\partial_{\alpha} = U^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}} \quad .$$

Fazendo U atuar em x^{μ}, obtém-se:

$$\begin{aligned} Ux^{\mu} &= U^{\alpha}\partial_{\alpha}x^{\mu} = U^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}x^{\mu} \\ &= U^{\alpha}\delta^{\mu}_{\alpha} = U^{\bar{\alpha}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\bar{\alpha}}} \end{aligned}$$

donde:

$$U^{\mu} = U^{\bar{\alpha}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\bar{\alpha}}} \quad . \tag{2.2}$$

Devido à regra de transformação (2.2), observa-se que os vetores do espaço tangente em P se identificam com os vetores contravariantes definidos neste ponto.

Uma 1-forma (ou forma diferencial de primeiro grau) é definida como um operador linear σ que atua sobre vetores do espaço tangente em P, produzindo um número real:

$$\sigma(U) \equiv \langle \sigma , U \rangle = \text{número real} . \tag{2.3}$$

O conjunto das 1-formas σ definidas em P também formam um espaço vetorial, chamado espaço dual do espaço tangente em P.

Dado um conjunto de vetores de base $\{e_{\alpha}\}$ no espaço tangente em P, pode-se construir univocamente uma base de 1-formas $\{\omega^{\beta}\}$ com a condição

$$\langle \omega^{\beta}, e_{\alpha} \rangle = \delta^{\beta}_{\alpha} \tag{2.4}$$

Relacionadas por (2.4), as bases $\{\omega^{\beta}\}$ e $\{e_{\alpha}\}$ são chamadas de duais. Num sistema de coordenadas, a aplicação de 1-forma σ sobre o campo vetorial U é dada como um "produto escalar":

$$\langle \sigma , U \rangle = \langle \sigma_\alpha \, \omega^\alpha , U^\beta e_\beta \rangle = \sigma_\alpha \, U^\beta \langle \omega^\alpha , e_\beta \rangle$$

$$= \sigma_\alpha \, U^\beta \, \delta^\alpha_\beta = \sigma_\alpha \, U^\alpha \, . \qquad (2.5)$$

A base dual da base canônica $\{\partial_\alpha\}$ será denotada por $\{dx^\beta\}$:

$$\langle dx^\beta , \partial_\alpha \rangle = \delta^\beta_\alpha \, . \qquad (2.6)$$

Nesta base,

$$\sigma = \sigma_\alpha \, dx^\alpha \, .$$

As 1-formas σ também não se alteram sob uma transformação de coordenadas $\{x^\mu\}$ para $\{x^{\bar{\mu}}\}$:

$$\sigma = \sigma_{\bar{\alpha}} \, dx^{\bar{\alpha}} = \sigma_\beta \, dx^\beta \quad ,$$

donde segue que:

$$\sigma_{\bar{\alpha}} = \sigma_\beta \, \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\bar{\alpha}}} \quad , \qquad (2.7)$$

isto é, as componentes das 1-formas transformam-se como as componentes covariantes de um campo vetorial.

Dados dois vetores U e V, define-se o <u>tensor de segunda ordem</u> $U \otimes V$ como uma aplicação bilinear sobre um par de 1-formas σ e λ :

$$(U \otimes V)(\sigma, \lambda) = \langle \sigma, U \rangle \langle \lambda , V \rangle \, . \qquad (2.8)$$

A operação $\otimes$ é denominada produto tensorial. As componentes de $T = U \otimes V$ são os produtos das componentes de U e V:

$$T^{\alpha\beta} = U^\alpha V^\beta \, . \qquad (2.9)$$

Podem ser criados tensores de várias ordens co e contravariantes, estendendo-se a definição acima. Por exemplo:

$$(U \otimes V \otimes \sigma \otimes W)(\alpha, \beta, \kappa, \gamma) = \langle \alpha, U \rangle \langle \beta, V \rangle \langle \sigma, \kappa \rangle \langle \gamma, W \rangle \qquad (2.10)$$

e este tensor possui componentes:

$$S^{\mu\nu}{}_{\rho}{}^{\lambda} = U^{\mu} V^{\nu} \sigma_{\rho} W^{\lambda} . \qquad (2.11)$$

DIFERENCIAÇÃO COVARIANTE EM VARIEDADES DE RIEMANN-CARTAN.

A necessidade de se saber como um dado tensor S varia de evento a evento sobre o espaço-tempo leva à procura de um método de comparação entre os valores do tensor em eventos próximos. Este método é o do transporte paralelo destes valores a um mesmo evento e dá origem ao gradiente do campo tensorial em questão, ∇S.

Em vista disso, define-se a derivada covariante $\nabla_U S$ do tensor S ao longo de uma certa curva C (λ), cujo vetor tangente é $U = \dfrac{d}{d\lambda}$ por:

$$\left(\nabla_U S\right)_{\substack{\text{em}\\ C(0)}} = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \frac{S[C(\epsilon)]_{\text{transportado a } C(0)} - S[C(0)]}{\epsilon} \right\} . \qquad (2.12)$$

Em linguagem abstrata, diz-se que o operador ∇_U, chamado de <u>conexão afim</u>, possui as seguintes propriedades:

(1)
$$\nabla_{(\alpha U + \beta V)} = \alpha \nabla_U + \beta \nabla_V , \qquad (2.13)$$

onde α, β são funções e U,V são campos vetoriais.

(2) Para uma função f:

$$\nabla_U f = U f ; \qquad (2.14)$$

(3) A atuação de ∇_U sobre produtos tensoriais é:

$$\nabla_U (V \otimes Z) = (\nabla_U V) \otimes Z + V \otimes (\nabla_U Z) . \qquad (2.15)$$

Estabelecendo uma base $\{e_\alpha\}$ e sua base dual $\{\omega^\beta\}$, se S for, por exemplo, um tensor de uma ordem contravariante e uma or dem covariante, ele se escreverá nestas bases como:

$$S = S^{\alpha}{}_{\beta}\, e_{\alpha} \otimes \omega^{\beta} \qquad ,$$

de modo que, ao se calcular sua derivada covariante:

$$\nabla S = \nabla\,(\, S^{\alpha}{}_{\beta}\, e_{\alpha} \otimes \omega^{\beta}) \;, \tag{2.16}$$

encontra-se o problema de expressar ∇e_{α} e $\nabla \omega^{\beta}$. A parte $\nabla S^{\alpha}{}_{\beta}$ sai de (2.14):

$$\nabla S^{\alpha}{}_{\beta} = S^{\alpha}{}_{\beta,\mu}\, \omega^{\mu} \quad . \tag{2.17}$$

A operação de ∇ sobre os vetores da base definem os <u>coeficientes de conexão</u> $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$:

$$\nabla_{\mu} e_{\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\, e_{\alpha} \;, \tag{2.18a}$$

isto é,

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \langle\, \omega^{\alpha} , \nabla_{\mu} e_{\nu} \rangle \;, \tag{2.18b}$$

e prova-se que:

$$\nabla_{\mu}\, \omega^{\alpha} = -\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\, \omega^{\nu} \quad . \tag{2.19}$$

Substituindo (2.17,18,19) em (2.16), obtêm-se as componentes do gradiente de S, denotadas por $S^{\alpha}{}_{\beta:\mu}$:

$$S^{\alpha}{}_{\beta:\mu} = S^{\alpha}{}_{\beta,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\, S^{\nu}{}_{\beta} - \Gamma^{\nu}_{\mu\beta}\, S^{\alpha}{}_{\nu} \; . \tag{2.20}$$

Para tensores de ordens co e contravariantes mais elevadas e não especificadas, suas derivadas covariantes serão escritas à maneira de Hehl (1974). Sendo Ψ^{A} um campo tensorial, em que A representa o conjunto de todos os índices de Ψ, tem-se:

$$\Psi^{A}{}_{:\mu} = \Psi^{A}{}_{,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\, f_{\alpha}{}^{\beta}{}_{B}{}^{A}\, \Psi^{B} \;, \tag{2.21}$$

em que os f's dependem somente de deltas de Kronecker, de acordo com o caráter de Ψ . Assim, por exemplo, para um campo vetorial Ψ^{δ} :

$$f_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\delta} = \delta^{\delta}_{\alpha}\, \delta^{\beta}_{\gamma} \tag{2.22}$$

para um tensor de duas ordens covariantes $\Psi_{\lambda\rho}$:

$$f_{\alpha}{}^{\beta\gamma\delta}{}_{\lambda\rho} = -\delta^{\gamma}_{\alpha}\,\delta^{\beta}_{\lambda}\,\delta^{\delta}_{\rho} - \delta^{\delta}_{\alpha}\,\delta^{\gamma}_{\lambda}\,\delta^{\beta}_{\rho} \quad ; \tag{2.23}$$

para um outro tensor $\Psi_{\mu\nu}{}^{\sigma}$:

$$f_{\alpha}{}^{\beta\gamma\delta}{}_{\epsilon\mu\nu}{}^{\sigma} = -\delta^{\gamma}_{\alpha}\,\delta^{\sigma}_{\epsilon}\,\delta^{\beta}_{\mu}\,\delta^{\delta}_{\nu} - \delta^{\delta}_{\alpha}\,\delta^{\sigma}_{\epsilon}\,\delta^{\gamma}_{\mu}\,\delta^{\beta}_{\nu} + \delta^{\sigma}_{\alpha}\,\delta^{\beta}_{\epsilon}\,\delta^{\gamma}_{\mu}\,\delta^{\delta}_{\nu} \,. \tag{2.24}$$

Para evitar um acúmulo de índices, serão omitidos os de letras latinas maiúsculas de (2.21) :

$$\Psi_{:\mu} = \Psi_{,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\, f_{\alpha}{}^{\beta}\,\Psi \quad . \tag{2.25}$$

Se Ψ vier a ser uma densidade tensorial, então tem-se:

$$\Psi_{:\mu} = \Psi_{,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\, f_{\alpha}{}^{\beta}\,\Psi - \Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\,\Psi \quad . \tag{2.26}$$

No caso de derivação covariante em direção diferente das direções dos eixos coordenados, designada por um vetor U, faz-se uma projeção ao longo deste vetor:

$$\nabla_U \Psi = \Psi_{:\mu}\, U^{\mu} \quad . \tag{2.27}$$

Se U for tangente a uma curva parametrizada C (λ), tem-se:

$$\frac{D\Psi}{d\lambda} \equiv \Psi_{:\mu}\, U^{\mu} = \Psi_{:\mu}\,\frac{d\,x^{\mu}}{d\,\lambda} \quad , \tag{2.28}$$

com $\Psi_{:\mu}$ dado por (2.25).

TORÇÃO.

Dados dois campos vetoriais U e V, define-se a <u>torção</u> associada à conexão ∇ como o campo vetorial resultante de:

$$2\,T(U,V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V] \quad . \tag{2.29}$$

A partir desta definição, vê-se que a torção possui as seguintes propriedades:

(1) $$T(U,V) = -T(V,U) \quad ; \tag{2.30a}$$

(2) $$T(U+V,Z) = T(U,Z) + T(V,Z) \quad , \tag{2.30b}$$

(3) $$T(fU,V) = f\,T(U,V) \quad , \tag{2.30c}$$

onde U,V,Z são campos vetoriais e f uma função.

Numa base coordenada:

$$U = U^{\alpha} e_{\alpha} \quad , \qquad V = V^{\beta} e_{\beta} \quad ,$$

$$T(U,V) = \mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, U^{\alpha} V^{\beta} e_{\gamma} \quad .$$

Assim:

$$\nabla_U V = V^{\gamma}{}_{;\alpha}\, U^{\alpha} e_{\gamma} \quad , \tag{2.31a}$$

$$\nabla_V U = U^{\gamma}{}_{;\alpha}\, V^{\alpha} e_{\gamma} \quad , \tag{2.31b}$$

$$[U,V] = (U^{\alpha} V^{\gamma}{}_{,\alpha} - V^{\alpha} U^{\gamma}{}_{,\alpha})\, e_{\gamma} \quad . \tag{2.31c}$$

Substituindo (2.31) em (2.29), vem:

$$\begin{aligned} 2\,\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} U^{\alpha} V^{\beta} &= V^{\gamma}{}_{;\alpha} U^{\alpha} - U^{\gamma}{}_{;\alpha} V^{\alpha} - U^{\alpha} V^{\gamma}{}_{,\alpha} - V^{\alpha} U^{\gamma}{}_{,\alpha} \\ &= (V^{\gamma}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} V^{\beta}) U^{\alpha} - (U^{\gamma}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} U^{\beta}) V^{\alpha} - \\ &\quad - U^{\alpha} V^{\gamma}{}_{,\alpha} + V^{\alpha} U^{\gamma}{}_{,\alpha} \\ &= (\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha})\, U^{\alpha} V^{\beta} \quad . \end{aligned}$$

Portanto, as componentes da torção são dadas pela parte antissimétrica dos coeficientes da conexão:

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \Gamma^{\gamma}{}_{[\alpha\beta]} \quad . \tag{2.32}$$

Em relatividade geral, considera-se sempre T(U,V) ≡ 0 e, nesse caso, por (2.29):

$$\nabla_U V - \nabla_V U = [U,V] \quad . \tag{2.33}$$

CURVATURA.

Uma outra regra pode vir a ser definida na variedade através da conexão ∇ : é o <u>operador de curvatura</u> $\mathcal{R}(U,V)$, linear em seus argumentos, e que age sobre vetores; é dado por:

$$\mathcal{R}(U,V) = [\nabla_U , \nabla_V] - \nabla_{[U,V]} \quad . \tag{2.34}$$

Da expressão acima, vê-se que possui as propriedades:

(1) $$\mathcal{R}(U,V)Z = -\mathcal{R}(V,U)Z \quad ; \tag{2.35a}$$

(2) $$\mathcal{R}(fU,V)Z = f\,\mathcal{R}(U,V)Z \quad ; \tag{2.35b}$$

(3) $$\mathcal{R}(U,V)fZ = f\,\mathcal{R}(U,V)Z \quad , \tag{2.35c}$$

sendo U,V,Z campos vetoriais. Ele está relacionado com o <u>tensor de curvatura de Riemann</u> R(U,V,Z) pela expressão:

$$R(U,V,Z) \equiv \mathcal{R}(U,V)Z \quad , \tag{2.36a}$$

isto é, $$R(U,V,Z,\sigma) \equiv \langle \sigma , \mathcal{R}(U,V)Z \rangle , \tag{2.36b}$$

onde σ é uma 1-forma.

Em termos de componentes em relação a uma base coordenada $\{ e_\alpha \}$ com dual $\{\omega^\beta\}$, tem-se:

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} \equiv R(e_\alpha , e_\beta , e_\gamma , \omega^\delta) \equiv \langle \omega^\delta , \mathcal{R}(e_\alpha,e_\beta)e_\gamma \rangle .$$

Se esta base coordenada for a base canônica $\{\partial_\alpha\}$, as componentes do tensor de Riemann ficam escritas em termos dos coeficientes de conexão como:

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = 2\,\partial_{[\alpha} \Gamma^{\delta}_{\beta]\gamma} + 2\,\Gamma^{\delta}_{[\alpha|\rho}\Gamma^{\rho}_{|\beta]\gamma} \quad . \tag{2.37}$$

A NÃO COMUTATIVIDADE DAS DERIVADAS COVARIANTES.

Tanto a torção como a curvatura foram definidas abstratamente, sem se apresentar uma motivação para tais definições.Es sa motivação fica aparente no cálculo do comutador das derivadas covariantes segundas das componentes covariantes de um campo vetorial A. Num cálculo direto com coordenadas, tem-se:

$$A_{\alpha:\mu\nu} = A_{\alpha:\mu,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} A_{\sigma:\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} A_{\alpha:\sigma}$$

$$= A_{\alpha,\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha,\nu} A_{\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha} A_{\rho,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} A_{\sigma,\mu} +$$

$$+ \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} A_{\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} A_{\alpha:\sigma} \quad .$$

Donde:

$$-A_{\alpha:\nu\mu} = -A_{\alpha,\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha,\mu} A_{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha} A_{\rho,\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} A_{\sigma,\nu} +$$

$$- \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} A_{\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} A_{\alpha:\sigma} \quad .$$

O comutador das derivadas covariantes de A_{α} fica, então:

$$\frac{1}{2}(A_{\alpha:\mu\nu} - A_{\alpha:\nu\mu}) = \frac{1}{2}\left\{ \partial_{\mu} \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha} - \partial_{\nu} \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} \right\} A_{\rho} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} \right) A_{\alpha:\sigma}$$

ou

$$A_{\alpha:[\mu\nu]} = \left\{ \partial_{[\mu} \Gamma^{\rho}_{\nu]\alpha} + \Gamma^{\rho}_{[\mu|\sigma} \Gamma^{\sigma}_{|\nu]\alpha} \right\} A_{\rho} + \Gamma^{\sigma}_{[\mu\nu]} A_{\alpha:\sigma} \quad .$$

Assim, por (2.37) e (2.31):

$$A_{\alpha:[\mu\nu]} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha}{}^{\rho} A_{\rho} + \mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\sigma} A_{\alpha:\sigma} \quad . \tag{2.38}$$

Logo, R e $\mathcal{T}$ medem a dependência de transporte paralelo de um vetor sobre a trajetória.

SIMETRIAS DO TENSOR DE CURVATURA.

De sua definição (2.37), podem ser extraídas identidades para o tensor de curvatura de Riemann que mostram as várias simetrias deste tensor:

I) Nota-se, imediatamente, a antissimetria nos dois primeiros índices :

$$R_{(\alpha\beta)\gamma}{}^{\delta} = 0 \quad . \tag{2.39}$$

II) Uma permutação cíclica dos índices inferiores $\alpha\beta\gamma$ resultam que:

$$R_{[\alpha\beta\gamma]}{}^{\delta} = \frac{1}{6}\left(R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + R_{\beta\gamma\alpha}{}^{\delta} + R_{\gamma\alpha\beta}{}^{\delta} - R_{\beta\alpha\gamma}{}^{\delta} - R_{\gamma\beta\alpha}{}^{\delta} - R_{\alpha\gamma\beta}{}^{\delta}\right)$$

Por (2.39):

$$R_{[\alpha\beta\gamma]}{}^{\delta} = \frac{1}{3}\left(R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + R_{\beta\gamma\alpha}{}^{\delta} + R_{\gamma\alpha\beta}{}^{\delta}\right)$$

Usando agora a definição (2.37):

$$\begin{aligned}
R_{[\alpha\beta\gamma]}{}^{\delta} &= \frac{2}{3}\Big\{\partial_{[\alpha}\Gamma_{\beta]\gamma}^{\delta} + \partial_{[\beta}\Gamma_{\gamma]\alpha}^{\delta} + \partial_{[\gamma}\Gamma_{\alpha]\beta}^{\delta} + \\
&\quad + \Gamma_{[\alpha|\rho}^{\delta}\Gamma_{|\beta]\gamma}^{\rho} + \Gamma_{[\beta|\rho}^{\delta}\Gamma_{|\gamma]\alpha}^{\rho} + \Gamma_{[\gamma|\rho}^{\delta}\Gamma_{|\alpha]\beta}^{\rho}\Big\} \\
&= \frac{1}{3}\Big\{\partial_{\alpha}\left(\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\delta}\right) + \partial_{\beta}\left(\Gamma_{\gamma\alpha}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}\right) + \partial_{\gamma}\left(\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\delta}\right) + \\
&\quad + \Gamma_{\alpha\rho}^{\delta}\left(\Gamma_{\beta\gamma}^{\rho} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\rho}\right) + \Gamma_{\beta\rho}^{\delta}\left(\Gamma_{\gamma\alpha}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho}\right) + \Gamma_{\gamma\rho}^{\delta}\left(\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\rho}\right)\Big\} \\
&= \frac{2}{3}\Big(\partial_{\alpha} S_{\beta\gamma}{}^{\delta} + \partial_{\beta} S_{\gamma\alpha}{}^{\delta} + \partial_{\gamma} S_{\alpha\beta}{}^{\delta} + \\
&\quad + \Gamma_{\alpha\rho}^{\delta} S_{\beta\gamma}{}^{\rho} + \Gamma_{\beta\rho}^{\delta} S_{\gamma\alpha}{}^{\rho} + \Gamma_{\gamma\rho}^{\delta} S_{\alpha\beta}{}^{\rho}\Big) .
\end{aligned}$$

A fórmula acima pode ser escrita em termos da derivada covariante da torção:

$$\begin{aligned}
R_{[\alpha\beta\gamma]}{}^{\delta} = \frac{2}{3}\Big\{& S_{\alpha\beta}{}^{\delta}{}_{:\gamma} + S_{\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{:\alpha} + S_{\gamma\alpha}{}^{\delta}{}_{:\beta} + \\
& - 2 S_{\alpha\beta}{}^{\rho} S_{\gamma\rho}{}^{\delta} - 2 S_{\beta\gamma}{}^{\rho} S_{\alpha\rho}{}^{\delta} - 2 S_{\gamma\alpha}{}^{\rho} S_{\beta\rho}{}^{\delta}\Big\} .
\end{aligned}$$

A antissimetria do tensor de torção permite compactar a equação anterior, resultando:

$$R_{[\alpha\beta\gamma]}{}^{\delta} = 2\, S_{[\alpha\beta}{}^{\delta}{}_{:\gamma]} - 4\, S_{[\alpha\beta}{}^{\rho} S_{\gamma]\rho}{}^{\delta} \quad . \qquad (2.40)$$

III) Tem-se, ainda, a expressão em U_4 para as identidades de Bianchi [ver Schouten (1954), Cap. III § 5]:

$$R_{[\alpha\beta|\rho}{}^{\sigma}{}_{:|\mu]} = 2\, S_{[\mu\alpha}{}^{\lambda} R_{\beta]\lambda\rho}{}^{\sigma} \quad . \qquad (2.41)$$

MÉTRICA.

A teoria da relatividade especial impõe restrições ao espaço-tempo. Dados quaisquer dois eventos próximos, pode ser definido o <u>intervalo</u> entre eles, independentemente das coordenadas e do referencial usados, sem o qual medidas locais de ângulos e distâncias não seriam possíveis.

Em termos de coordenadas, define-se como <u>métrica</u> do espaço-tempo o conjunto de dez funções da posição $g_{\mu\nu}(x^\rho)$ tais que o intervalo entre o evento x^α e o evento $x^\alpha + dx^\alpha$ vem dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\rho)\, dx^\mu dx^\nu \quad . \tag{2.42}$$

Em linguagem abstrata, a métrica g é uma aplicação bilinear e simétrica sobre pares de campos vetoriais, que produz um número real ("produto escalar entre dois vetores tangentes"):

$$g(U,V) \equiv U \cdot V \quad . \tag{2.43}$$

Numa base $\{\omega^\mu\}$, dual de $\{e_\nu\}$, expressa-se a métrica por:

$$g = g_{\mu\nu}\, \omega^\mu \otimes \omega^\nu \quad , \tag{2.44}$$

sendo os coeficientes $g_{\mu\nu}$ ("componentes covariantes da métrica") calculados por:

$$g(e_\rho, e_\lambda) = g_{\mu\nu} \langle \omega^\mu, e_\rho \rangle \langle \omega^\nu, e_\lambda \rangle = g_{\mu\nu}\, \delta^\mu_\rho\, \delta^\nu_\lambda = g_{\rho\lambda} \quad . \tag{2.45}$$

Ou seja, as componentes da métrica são obtidas tomando o produto escalar entre dois vetores da base.

A métrica fornece uma correspondência entre as 1-formas e os vetores do espaço tangente, através do produto escalar. Este foi definido em (2.5) como uma aplicação de uma 1-forma σ sobre um vetor U:

$$\langle \sigma, U \rangle = \sigma_\alpha U^\alpha \tag{2.46}$$

Denotando por $\bar{U}$ a 1-forma correspondente ao vetor U ("imagem co variante de U"), faz-se a identificação:

$$\langle \bar{U}, V \rangle \equiv g\,(U,V) \quad . \tag{2.47}$$

Assim, as componentes de $\bar{U}$, definidas por $\bar{U} = U_\beta \omega^\beta$, ficam dadas por:

$$\begin{aligned} U_\beta &\doteq \langle \bar{U}, e_\beta \rangle \equiv g\,(U, e_\beta) = g\,(U^\alpha e_\alpha, e_\beta) = g\,(e_\alpha, e_\beta)\, U^\alpha \\ &= g_{\alpha\beta}\, U^\alpha \quad . \end{aligned} \tag{2.48}$$

Na prática, diz-se que o índice contravariante do vetor U foi "abaixado" pelas componentes covariantes da métrica. Índices de tensores de ordens mais elevadas também podem ser abaixados desta maneira. Seja:

$$\begin{aligned} S\,(\bar{U}, \sigma, V) &= S\,(U, \sigma, V) \\ S_\alpha{}^\beta{}_\gamma = S(e_\alpha, \omega^\beta, e_\gamma) &\doteq S\,(\bar{e}_\alpha, \omega^\beta, e_\gamma) = S\,(g_{\alpha\nu}\, \omega^\nu, \omega^\beta, e_\gamma) \\ &= g_{\alpha\nu}\, S^{\nu\beta}{}_\gamma \,. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Também define-se o tensor métrico contravariante, cujas componentes $g^{\mu\nu}$ são as componentes da matriz inversa de $\| g_{\mu\nu} \|$. Desta forma,

$$g_{\mu\nu}\, g^{\nu\rho} = \delta_\mu{}^\rho \quad .$$

Pode-se usar estas componentes para se "levantar" índices tensoriais:

$$S^{\mu\beta}{}_\gamma = g^{\mu\nu}\, S_\nu{}^\beta{}_\gamma \quad . \tag{2.50}$$

Há, ainda, o tensor métrico misto, cujas componentes são idênticas às da matriz unidade:

$$g^\alpha{}_\beta \equiv g\,(\omega^\alpha, e_\beta) \equiv \langle \omega^\alpha, e_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta \quad . \tag{2.51}$$

CARÁTER LORENTZIANO LOCAL.

Deve ser exigido, via Princípio de Equivalência*, que, em cada evento do espaço-tempo, pode ser definido um conjunto ortonormal de vetores ("tetrada") $\{e_{\hat{\alpha}}\}$, tais que a métrica assume a forma da métrica de Minkowski do espaço plano da relatividade especial:

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = e_{\hat{\alpha}} \cdot e_{\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}\,(+1,-1,-1,-1) \;. \qquad (2.52)$$

Além disso, deve ser garantida a invariância de comprimentos e ângulos por transporte paralelo, tornando invariante o intervalo ds. Para isso, impõe-se que a métrica seja covariantemente constante em todo o espaço-tempo ("compatibilidade da conexão com a métrica").

$$\nabla g = 0. \qquad (2.53)$$

COEFICIENTES DE CONEXÃO EM TERMOS DA MÉTRICA.

Num sistema de coordenadas arbitrário, esta condição de compatibilidade se escreve:

$$g_{\alpha\beta:\gamma} = 0 \qquad (2.54a)$$

ou

$$g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\gamma\alpha}\, g_{\mu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\gamma\beta}\, g_{\alpha\mu} = 0 \quad , \qquad (2.54b)$$

ou ainda,

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma_{\gamma\beta\alpha} = 2\,\Gamma_{\gamma(\alpha\beta)} \quad .$$

Assim,

$$g_{\mu\beta,\gamma} = 2\,\Gamma_{\gamma(\mu\beta)}$$
$$g_{\mu\gamma,\beta} = 2\,\Gamma_{\beta(\mu\gamma)}$$
$$-g_{\beta\gamma,\mu} = -2\,\Gamma_{\mu(\beta\gamma)} \quad .$$

*O princípio da equivalência, tal como formulado por Einstein (1956), permanece válido na teoria de Einstein-Cartan. Ver von der Heyde (1975), von der Heyde e Hehl (1977).

De modo que:

$$\frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\gamma}+g_{\mu\gamma,\beta}-g_{\beta\gamma,\mu}\right)=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{\gamma\mu\beta}+\Gamma_{\gamma\beta\mu}+\Gamma_{\beta\mu\gamma}+\Gamma_{\beta\gamma\mu}-\Gamma_{\mu\beta\gamma}-\Gamma_{\mu\gamma\beta}\right)$$
$$=\Gamma_{\beta\gamma\mu}+\Gamma_{[\gamma\mu]\beta}+\Gamma_{[\beta\mu]\gamma}+\Gamma_{[\gamma\beta]\mu} \quad .$$

Explicitando $\Gamma_{\beta\gamma\mu}$, vem:

$$\Gamma_{\beta\gamma\mu}=\frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\gamma}+g_{\mu\gamma,\beta}+g_{\beta\gamma,\mu}\right)-\left\{\Gamma_{[\gamma\mu]\beta}+\Gamma_{[\beta\mu]\gamma}+\Gamma_{[\gamma\beta]\mu}\right\} \quad . \tag{2.55}$$

Por (2.31), a parte antissimétrica dos coeficientes de conexão é definida como a torção do espaço-tempo:

$$\tau_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=\Gamma^{\gamma}{}_{[\alpha\beta]} \quad ,$$

de modo que as componentes totalmente covariantes da torção vêm dadas por:

$$\tau_{\alpha\beta\gamma}=\Gamma_{[\alpha\beta]\gamma} \quad . \tag{2.56}$$

Substituindo (2.56) em (2.55), chega-se a:

$$\Gamma_{\beta\gamma\mu}=\frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\gamma}+g_{\mu\gamma,\beta}-g_{\beta\gamma,\mu}\right)+\tau_{\beta\gamma\mu}-\tau_{\gamma\mu\beta}+\tau_{\mu\beta\gamma} \quad .$$

Contraindo com $g^{\alpha\mu}$:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\left(g_{\mu\beta,\gamma}+g_{\mu\gamma,\beta}-g_{\beta\gamma,\mu}\right)+\tau_{\beta\gamma}{}^{\alpha}-\tau_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta}+\tau^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \tag{2.57a}$$

$$\equiv\left\{{\alpha \atop \beta\gamma}\right\}-K_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \quad . \tag{2.57b}$$

Esta é a expressão para os coeficientes de conexão numa base coordenada. Observa-se que são obtidos os símbolos de Christoffel $\left\{{\alpha \atop \beta\gamma}\right\}$, que fornecem os coeficientes de conexão em relatividade geral, subtraídos do tensor de contorção $K_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$. Este tensor, por ser antissimétrico nos dois últimos índices, possui 24 componentes independentes e é dependente da métrica e da torção. Ele compõe a parte não-riemanniana da conexão afim. No caso da torção ser zero, a contorção também se anula e é obtida a conexão riemanniana da relatividade geral.

NOVAS SIMETRIAS DO TENSOR DE RIEMANN.

Além das propriedades de simetria (2.39,40,41), a existência da métrica do espaço-tempo permite que o tensor de Riemann tenha, ainda, antissimetria no segundo par de índices:

$$R_{\alpha\beta(\gamma\delta)} = 0 \quad . \tag{2.58}$$

Entretanto, em U_4, o tensor de Riemann perde a simetria sob troca de pares de índices que possuía em R_4:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad . \tag{2.59}$$

CONTRAÇÕES DO TENSOR DE RIEMANN.

Com a métrica g, pode-se definir outros tensores de curvatura no espaço-tempo a partir do tensor de Riemann. Alguns são:

(1) Tensor de curvatura de Ricci:

$$R_{\alpha\beta} \equiv R_{\rho\alpha\beta}{}^{\rho} \quad ; \tag{2.60}$$

(2) Escalar de curvatura:

$$R \equiv R^{\alpha}{}_{\alpha} \quad ; \tag{2.61}$$

(3) Tensor de curvatura de Einstein:

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \quad . \tag{2.62}$$

Devido a (2.59), tanto o tensor de Ricci como o de Einstein perdem a simetria que possuíam em relatividade geral e são assimétricos em geral.

A antissimetrização do tensor de Einstein vem dada pela identidade:

$$G_{[\alpha\beta]} = \mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\rho}{}_{;\rho} + \zeta_{\rho\sigma}{}^{\sigma}\,\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\rho} \tag{2.63}$$

onde $\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ é o tensor de torção modificado, que difere do tensor de torção em seu traço:

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \equiv \zeta_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + 2\,\delta^{\gamma}_{[\alpha}\,\zeta_{\beta]\rho}{}^{\rho} \tag{2.64}$$

I.3- Obtenção das equações de campo.

Tendo sido estabelecida a geometria diferencial de um espaço-tempo provido de torção, deve-se procurar as causas físicas para que tal espaço-tempo venha a ter realidade.

Há duas maneiras principais de se abordar o assunto: (1) através da análise tensorial, tal como desenvolvido por Hehl (1973,1974) ou (2) aplicando os métodos da geometria diferencial moderna, expostos por Trautman (1972a). Ambos os métodos são inteiramente equivalentes, no sentido de que as equações de campo obtidas são as mesmas nos dois formalismos, bem como as leis de conservação. Estes dois formalismos, que utilizam processos variacionais serão descritos a seguir com todo o detalhe.

A. O MÉTODO TENSORIAL.

A idéia básica é utilizar o princípio variacional como formulado por Hilbert para se chegar às equações de campo. Seja, portanto, o escalar ("funcional de ação"):

$$I = \frac{1}{c}\int L \sqrt{-g}\, d^4x \quad , \tag{3.1}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e $\sqrt{-g}\, d^4x$ é o elemento de volume invariante do espaço-tempo, sendo g o determinante da métrica. L é a função lagrangiana, de modo que $\mathcal{L} = L \sqrt{-g}$ é uma densidade lagrangiana, a ser integrada em toda a variedade:

$$I = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}\, d^4x = \frac{1}{c}\int dx^0 \int \mathcal{L}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 \ . \tag{3.2}$$

A quantidade $\mathcal{L}$ deve ser construída a partir de tensores diretamente relacionados com a geometria apenas, quando se procura descrever o campo gravitacional em espaço vazio. Entretanto, no caso de haver a presença de outros campos, que também contribuem para a lagrangiana, separa-se a densidade lagrangiana em duas partes: uma descreve o campo gravitacional e a outra inclui as contribuições de quaisquer outros campos em interação com o gravitacional:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_c \quad . \tag{3.3}$$

A DENSIDADE LAGRANGIANA DE CAMPOS.

Para evitar uma particularização desnecessária da teoria, não serão especificados quais os campos a serem incluídos em $\mathcal{L}_c$. A distribuição de matéria e/ou de campos será descrita por um campo clássico $\Psi(x^\mu)$, função da posição. Em princípio, $\Psi(x^\mu)$ poderá ser um tensor (de ordem também não especificada) ou um espinor. Entretanto, campos espinoriais não serão levados em conta neste trabalho.

Pelo princípio de equivalência, as equações de movimento para os campos $\Psi(x^\mu)$ são de natureza covariante geral, reduzindo-se, em cada ponto, às expressões destas equações obtidas em relatividade especial. Assim, na lagrangiana de campos $\mathcal{L}_c$, que depende, na ausência de gravidade, dos campos Ψ e de suas derivadas parciais $\partial\Psi$, além da métrica do espaço plano $\eta_{\mu\nu}$, substituímos esta métrica por $g_{\mu\nu}(x^\rho)$ e as derivadas parciais por derivadas covariantes, de acordo com o acoplamento mínimo:

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_c(\Psi, \partial\Psi, \eta) \rightarrow \mathcal{L}_c = \mathcal{L}_c(\Psi, \nabla\Psi, g) \quad . \tag{3.4}$$

Pelo que foi deduzido no item anterior, a expressão das derivadas covariantes dos campos $\nabla\Psi$ deverá incluir as derivadas parciais destes campos $\partial\Psi$, além de derivadas parciais da métrica ∂g

e da torção $\mathcal{T}$. Isto é, a integral de ação para os campos,

$$I_c = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_c(\Psi, \partial\Psi, g, \partial g, \mathcal{T})\, d^4x \quad , \tag{3.5}$$

depende não só de Ψ, como das 10 componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ e das 24 componentes independentes da torção $\mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\rho}$.

VARIAÇÕES DA DENSIDADE LAGRANGIANA DE CAMPOS.

Há três variáveis independentes: o campo Ψ, a métrica g e a torção $\mathcal{T}$. Ao se tomar a variação da integral de ação dos campos δI_c, encontra-se:

$$\delta I_c = \frac{1}{c}\,\delta\int \mathcal{L}_c\, d^4x = \frac{1}{c}\int (\delta\mathcal{L}_c)\, d^4x$$

$$= \frac{1}{c}\int \Big[\Big(\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\Psi}\,\delta\Psi + \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\Psi_{,\alpha}}\,\delta\Psi_{,\alpha}\Big) + \Big(\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial g_{\alpha\beta}}\,\delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma}}\,\delta g_{\alpha\beta,\gamma}\Big) +$$

$$+ \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}}\,\delta\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\Big]\, d^4x \quad . \tag{3.6}$$

Realizando uma integração por partes, tem-se:

$$\int\Big(\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\Psi}\,\delta\Psi + \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\Psi_{,\alpha}}\,\delta\Psi_{,\alpha}\Big)\, d^4x = \int\Big[\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\Psi} - \Big(\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\Psi_{,\alpha}}\Big)_{,\alpha}\Big]\,\delta\Psi\, d^4x \tag{3.7a}$$

e

$$\int\Big(\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial g_{\alpha\beta}}\,\delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma}}\,\delta g_{\alpha\beta,\gamma}\Big)\, d^4x = \int\Big[\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial g_{\alpha\beta}} - \Big(\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma}}\Big)_{,\gamma}\Big]\,\delta g_{\alpha\beta}\, d^4x \quad . \tag{3.7b}$$

Introduzindo a notação de derivada funcional, escreve-se:

$$\frac{\delta\mathcal{L}_c}{\delta\Psi} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\Psi} - \Big(\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\Psi_{,\alpha}}\Big)_{,\alpha} \tag{3.8a}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_c}{\delta g_{\alpha\beta}} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial g_{\alpha\beta}} - \Big(\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma}}\Big)_{,\gamma} \tag{3.8b}$$

e, como $\mathcal{L}_c$ não depende das derivadas parciais da torção,

$$\frac{\delta\mathcal{L}_c}{\delta\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} = \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} \quad . \tag{3.9}$$

Em sua formulação da teoria da relatividade geral por este processo de variação, Hilbert foi levado a definir dinamicamente o tensor de energia-momentum como conseqüência da variação da métrica:

$$\sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta} \equiv 2\, \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta g_{\alpha\beta}} \quad . \tag{3.10}$$

Uma variação da métrica significa uma pequena alteração na distância mútua entre os eventos do espaço-tempo. Isto mostra, portanto, a relação entre energia-momentum e translações no espaço-tempo, através da definição (3.10).

Na teoria de Einstein-Cartan, exige-se, de uma maneira análoga, uma relação entre alguma quantidade física, característica da matéria, e uma quantidade geométrica, associada a rotações no espaço-tempo. No contexto da relatividade especial, observa-se que o momentum angular total é uma quantidade a ser conservada sob invariância da ação sob rotações*; separa-se o momentum angular total em duas partes: orbital e intrínseca. O momentum angular orbital aparece escrito em termos do tensor de energia-momentum. Assim, o tensor de momentum angular intrínseco (ou"spin") surge como a quantidade relacionada a rotações no espaço-tempo , independentemente da posição, apropriada para uma definição dinâmica nos moldes de (3.10).

Embora tenha sido escrito em (3.5) que a lagrangiana de campos $\mathcal{L}_c$ é dependente da torção, não é em termos de uma variação $\delta \mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ que será definido dinamicamente o momentum angular de spin. Pode-se considerar, ao invés da torção, uma dependência sobre a contorção, pois estas quantidades geométricas se relacionam por (1.8):

---

*Ver Soper (1976), § 9.3

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_c(\Psi, \partial\Psi, g, \partial g, K), \tag{3.11}$$

pois, na realidade, ao se fazer o acoplamento mínimo, é K quem aparece explicitamente.

Assim, a definição dinâmica do tensor momentum angular de spin, proposta por Sciama (1962), é:

$$\sqrt{-g}\; S_\gamma{}^{\beta\alpha} = \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}}, \tag{3.12}$$

enquanto que a variação da lagrangiana devido a uma variação da torção possui o sentido de uma "energia potencial" de spin(Belinfante 1939, Rosenfeld 1940):

$$\sqrt{-g}\; \mu_\gamma{}^{\beta\alpha} = \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta \tau_{\alpha\beta}{}^{\gamma}}. \tag{3.13}$$

O tensor $S_\gamma{}^{\beta\alpha}$ possui a antissimetria:

$$S_\gamma{}^{\beta\alpha} = -S^\beta{}_\gamma{}^\alpha, \tag{3.14}$$

pois $K_{\alpha\beta}{}^\gamma = -K_\alpha{}^\gamma{}_\beta$. Ele se relaciona com a energia potencial de spin da seguinte maneira:

$$\sqrt{-g}\; \mu^{\gamma\beta\alpha} = \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta \tau_{\alpha\beta\gamma}} = \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta K_{\mu\nu\rho}} \frac{\partial K_{\mu\nu\rho}}{\partial \tau_{\alpha\beta\gamma}};$$

como:

$$K_{\mu\nu\rho} = -\tau_{\mu\nu\rho} + \tau_{\nu\rho\mu} - \tau_{\rho\mu\nu},$$

então:

$$\frac{\partial K_{\mu\nu\rho}}{\partial \tau_{\alpha\beta\gamma}} = -\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \delta^\gamma_\rho + \delta^\beta_\mu \delta^\gamma_\nu \delta^\alpha_\rho - \delta^\gamma_\mu \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\rho .$$

Assim:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\; \mu^{\gamma\beta\alpha} &= -\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta K_{\alpha\beta\gamma}} + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta K_{\beta\gamma\alpha}} - \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta K_{\gamma\alpha\beta}} \\ &= \sqrt{-g}\,(-S^{\gamma\beta\alpha} + S^{\alpha\gamma\beta} - S^{\beta\alpha\gamma}).\end{aligned}$$

Isto é:

$$\begin{aligned}\mu^{\beta\alpha\gamma} &= -S^{\beta\alpha\gamma} + S^{\alpha\gamma\beta} - S^{\gamma\beta\alpha} \\ &= +S^{\alpha\beta\gamma} - S^{\gamma\alpha\beta} + S^{\beta\gamma\alpha},\end{aligned}$$

onde foi usada a propriedade (3.14). De forma que:

$$\mu^{\beta\alpha\gamma} - \mu^{\alpha\beta\gamma} = 2\, S^{\alpha\beta\gamma}$$

ou:
$$S^{\alpha\beta\gamma} = \mu^{[\beta\alpha]\gamma} \qquad (3.15)$$

A partir do tensor métrico de energia-momentum e do tensor de momentum angular de spin, pode ser definido o que será chamado tensor de energia-momentum total:

$$t^{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta} + \overset{*}{\nabla}_\gamma \left(S^{\alpha\beta\gamma} - S^{\beta\gamma\alpha} + S^{\gamma\alpha\beta}\right) \qquad (3.16a)$$
$$= T^{\alpha\beta} - \overset{*}{\nabla}_\gamma \mu^{\alpha\beta\gamma} \quad , \qquad (3.16b)$$

onde
$$\overset{*}{\nabla}_\gamma = \nabla_\gamma + 2\,\tau_{\gamma\lambda}{}^{\lambda} \quad . \qquad (3.17)$$

No item 1.4, mais adiante, será mostrado que $t^{\alpha\beta}$ e $S^{\alpha\beta\gamma}$ formam os tensores canônicos de energia-momentum e de momentum angular de spin, respectivamente, isto é, os tensores que são obtidos como identidades da densidade lagrangiana de campos através do teorema de Noether para a teoria de Einstein-Cartan.

VARIAÇÃO DA AÇÃO TOTAL.

Para se chegar às equações de campo da teoria, aplica-se o princípio variacional de Hamilton à integral de ação total, ou seja:

$$\delta I = \delta\left[\frac{1}{c}\int(\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_g)\, d^4x\right] = 0 \quad . \qquad (3.18)$$

Resta especificar a lagrangiana para o campo gravitacional $\mathcal{L}_g$. O mais natural seria adaptar para o U_4 a escolha feita por Hilbert ao usar este método para deduzir as equações de campo da relatividade geral (já que, no caso de torção nula, são estas as equações a serem obtidas):

$$\mathcal{L}_g = \frac{c^3}{16\pi G}\sqrt{-g}\, R \equiv \frac{c^3}{16\pi G}\mathcal{R} \quad , \qquad (3.19)$$

onde definimos a densidade de curvatura escalar $\mathcal{R} \equiv \sqrt{-g}\, R$. Devido à sua construção, $\mathcal{R}$ depende da métrica, de suas derivadas primeiras e segundas, da torção e de suas derivadas primeiras:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(g, \partial g, \partial\partial g, \mathcal{Z}, \partial\mathcal{Z}) \ . \qquad (3.20)$$

Adotemos a convenção de unidades em que c=G=1.

Assim, por (3.5) e (3.20), a ação total se escreve:

$$I = \int \mathcal{L}_c(\psi, \partial\psi, g, \partial g, \mathcal{Z})\, d^4x + \frac{1}{16\pi}\int \mathcal{R}(g, \partial g, \partial\partial g, \mathcal{Z}, \partial\mathcal{Z})\, d^4x \ . \qquad (3.21)$$

A geometria de um U_4 é descrita pelas 10+24 variáveis g e $\mathcal{Z}$. Portanto, na ação (3.21) acima, Ψ, g e $\mathcal{Z}$ são variáveis independentes. Fazendo a variação desta ação de acordo com (3.18), obtém-se:

$$\delta I = \int\left(\frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\psi_{,\alpha}}\delta\psi_{,\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial g_{\alpha\beta}}\delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma}}\delta g_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{\partial\mathcal{L}_c}{\partial\mathcal{Z}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}}\delta\mathcal{Z}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\right)d^4x +$$

$$+ \frac{1}{16\pi}\int\left(\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial g_{\alpha\beta}}\delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma}}\delta g_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathcal{Z}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}}\delta\mathcal{Z}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathcal{Z}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}{}_{,\lambda}}\delta\mathcal{Z}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}{}_{,\lambda}\right)d^4x$$

$$= \int\left[\frac{\delta\mathcal{L}_c}{\delta\psi}\delta\psi + \left(\frac{\delta\mathcal{L}_c}{\delta g_{\alpha\beta}} + \frac{1}{16\pi}\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta g_{\alpha\beta}}\right)\delta g_{\alpha\beta} + \left(\frac{\delta\mathcal{L}_c}{\delta\mathcal{Z}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} + \frac{1}{16\pi}\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\mathcal{Z}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}}\right)\delta\mathcal{Z}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\right]d^4x = 0 \ . \qquad (3.22)$$

Como as variações $\delta\Psi$, $\delta g_{\alpha\beta}$ e $\delta\mathcal{Z}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ são independentes, seus coeficientes se anulam separadamente:

$$\frac{\delta\mathcal{L}_c}{\delta\psi} = 0 \ ; \qquad (3.23a)$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_c}{\delta g_{\alpha\beta}} + \frac{1}{16\pi}\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta g_{\alpha\beta}} = 0 \ ; \qquad (3.23b)$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_c}{\delta\mathcal{Z}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} + \frac{1}{16\pi}\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\mathcal{Z}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} = 0 \ . \qquad (3.23c)$$

A primeira das equações de movimento resultantes do princípio variacional, (3.23a), traduz a lei dinâmica de movimento para os campos Ψ em interação com o campo gravitacional ("equações de Euler-Lagrange"). As equações restantes (3.23b,c) virão a formar as equações de campo da teoria de Einstein-Cartan.

De acordo com a definição dinâmica (3.10) do tensor métrico de energia-momentum, (3.23b) torna-se:

$$\frac{1}{16\pi}\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\frac{\delta\mathcal{L}_c}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T^{\alpha\beta}$$

isto é,

$$\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta g_{\alpha\beta}} = -8\pi\sqrt{-g}\,T^{\alpha\beta}\ . \tag{3.24}$$

Quanto a (2.23c), usando (3.13):

$$\frac{1}{16\pi}\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\tau_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} = -\frac{\delta\mathcal{L}_c}{\delta\tau_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} = -\sqrt{-g}\,\mu_{\gamma}{}^{\beta\alpha}\ ,$$

ou seja,

$$\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\tau_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} = -16\pi\sqrt{-g}\,\mu_{\gamma}{}^{\beta\alpha}\ . \tag{3.25}$$

Em termos dos tensores canônicos $t^{\alpha\beta}$ e $S_{\gamma}{}^{\beta\alpha}$, reescrevem-se as equações de campo (3,24,25) como:

(1) Primeira equação de campo (3.24):

$$\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta g_{\alpha\beta}} = -8\pi\sqrt{-g}\,T^{\alpha\beta} \underset{[\text{por (3.16b)}]}{=} -8\pi\sqrt{-g}\,(t^{\alpha\beta} + \overset{*}{\nabla}_{\gamma}\mu^{\alpha\beta\gamma})$$

$$\underset{[\text{por (3.25)}]}{=} -8\pi\sqrt{-g}\left[t^{\alpha\beta} + \overset{*}{\nabla}_{\gamma}\left(-\frac{1}{16\pi\sqrt{-g}}\,g^{\alpha\lambda}\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\tau_{\gamma\beta}{}^{\lambda}}\right)\right]$$

$$= -8\pi\sqrt{-g}\left[t^{\alpha\beta} - \frac{1}{16\pi}\,\frac{g^{\alpha\lambda}}{\sqrt{-g}}\,\overset{*}{\nabla}_{\gamma}\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\tau_{\gamma\beta}{}^{\lambda}}\right],$$

pois:

$$\nabla_{\gamma}\frac{g^{\alpha\lambda}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_{\gamma}g^{\alpha\lambda} + g^{\alpha\lambda}\nabla_{\gamma}\frac{1}{\sqrt{-g}} = g^{\alpha\lambda}\nabla_{\gamma}\frac{1}{\sqrt{-g}}$$

$$= g^{\alpha\lambda}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\right)_{,\gamma} + \Gamma^{\rho}_{\gamma\rho}\frac{1}{\sqrt{-g}}\right]$$

$$= g^{\alpha\lambda}\left[-\frac{(\sqrt{-g})_{,\gamma}}{\sqrt{-g}\sqrt{-g}} + \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g})_{,\gamma}\frac{1}{\sqrt{-g}}\right] = 0$$

Portanto:

$$\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta g_{\alpha\beta}} - \frac{g^{\alpha\lambda}}{2}\overset{*}{\nabla}_{\gamma}\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\tau_{\gamma\beta}{}^{\lambda}} = -8\pi\sqrt{-g}\,t^{\alpha\beta}\ . \tag{3.26}$$

(2) Segunda equação de campo (3.25):

$$g^{\lambda\gamma}\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\tau_{\alpha\beta}{}^{\lambda}} = -16\pi\sqrt{-g}\,\mu^{\gamma\beta\alpha}$$

Isto implica:

$$-16\pi\sqrt{-g}\,(\mu^{\beta\alpha\gamma}-\mu^{\alpha\beta\gamma}) = g^{\lambda\alpha}\,\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\tau_{\beta\gamma}{}^{\lambda}} - g^{\lambda\beta}\,\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\tau_{\alpha\gamma}{}^{\lambda}}\,,$$

isto é:

$$-16\pi\sqrt{-g}\,\mu^{[\beta\alpha]\gamma} = g^{\lambda[\alpha}\,\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\tau_{\beta]\gamma}{}^{\lambda}}\,,$$

ou, usando (3.15):

$$\frac{g^{\lambda[\alpha}}{2}\,\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\tau_{\beta]\gamma}{}^{\lambda}} = -8\pi\sqrt{-g}\;S^{\alpha\beta\gamma}\,. \tag{3.27}$$

O estudo das variações da densidade de escalar de curvatura devido a variações da métrica e da torção, expressas em termos de objetos geométricos conhecidos, tornará (3.26) e(3.27) nas equações de campo procuradas.

A DENSIDADE DE ESCALAR DE CURVATURA.

Pela definição (2.37) do tensor de curvatura de Riemann:

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\lambda} = 2\,\partial_{[\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\beta]\gamma} + 2\,\Gamma^{\lambda}_{[\alpha|\rho}\Gamma^{\rho}_{|\beta]\gamma}\,,$$

obtém-se, por contração, o tensor de Ricci $R_{\alpha\beta} \equiv R_{\lambda\alpha\beta}{}^{\lambda}$:

$$R_{\alpha\beta} = 2\,\partial_{[\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha]\beta} + 2\,\Gamma^{\lambda}_{[\lambda|\rho}\Gamma^{\rho}_{|\alpha]\beta}\,. \tag{3.28}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\\ &= \sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}(\partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\beta})\,.\end{aligned} \tag{3.29}$$

As parcelas de (3.29) que envolvem derivadas dos coeficientes de conexão podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}(\partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}) &= \partial_\lambda(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}) - \partial_\lambda(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta})\,\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} -\\ &\quad - \partial_\alpha(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}) + \partial_\alpha(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta})\,\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}\,.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Sendo $\sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta}$ uma densidade tensorial, o postulado métrico

$$\nabla_\lambda\,(\sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta}) = 0$$

implica que

$$\partial_\lambda(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}) + \sqrt{-g}\,g^{\rho\beta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\rho} + \sqrt{-g}\,g^{\alpha\rho}\Gamma^{\beta}_{\lambda\rho} - \sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} = 0\,.$$

Então:

$$\partial_\lambda(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}) = -\sqrt{-g}\, g^{\rho\beta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\rho} - \sqrt{-g}\, g^{\alpha\rho}\Gamma^{\beta}_{\lambda\rho} + \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} \tag{3.31a}$$

$$\partial_\alpha(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}) = -\sqrt{-g}\, g^{\rho\beta}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\rho} - \sqrt{-g}\, g^{\alpha\rho}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho} + \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho} \ . \tag{3.31b}$$

Substituindo (3.31) em (3.30), vem:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}(\partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}) &= \\ = \partial_\alpha(\sqrt{-g}\, g^{\lambda\beta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta} - \sqrt{-g}\, g^{\lambda\alpha}\Gamma^{\beta}_{\beta\lambda}) &+ \\ + \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\lambda\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\rho}_{\rho\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\rho}_{\rho\beta}) &.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Levando agora (3.32) em (3.29):

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \tilde{\mathcal{R}} + \partial_\alpha(\sqrt{-g}\, g^{\lambda\beta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} - \sqrt{-g}\, g^{\lambda\alpha}\Gamma^{\beta}_{\beta\lambda}) \\ &= \tilde{\mathcal{R}} + \partial_\alpha(2\sqrt{-g}\, g^{\lambda[\beta}\Gamma^{\alpha]}_{\beta\lambda}) \ ,\end{aligned} \tag{3.33}$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}} &= \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}[\Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} - (\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda})\Gamma^{\rho}_{\rho\beta}] \\ &= 2\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\lambda}_{\rho[\alpha}\Gamma^{\rho}_{\lambda]\beta} + \Gamma^{\rho}_{\rho\alpha}\, S_{\beta\lambda}{}^{\lambda}) \ .\end{aligned} \tag{3.34}$$

VARIAÇÃO DE $\mathcal{R}$.

A integração em todo o volume da variedade do segundo termo de (3.33), por ser uma divergência, é igual à integração sobre uma hiper superfície infinitamente distante da variação da quantidade entre parênteses. Como se toma, nesta hipersuperfície, variação nula,

$$\delta\mathcal{R} = \delta\tilde{\mathcal{R}} = R_{\alpha\beta}\,\delta(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}) + \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} \ . \tag{3.35}$$

Aplica-se, aqui, o processo variacional proposto por Palatini , em que são tomadas como variáveis independentes da mesma lagrangiana as componentes da métrica $g_{\alpha\beta}$ e da conexão afim $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ ao invés de considerar os Γ's como funções dos g's. A variação de (3.28), neste contexto, é:

$$\delta R_{\alpha\beta} = \delta(\partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}) - \delta(\partial_\alpha \Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}) + \delta(\Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}) - \delta(\Gamma^{\rho}_{\alpha\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\beta})$$
$$= \partial_\lambda \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\beta}\,\delta\Gamma^{\rho}_{\alpha\lambda} \quad (3.36)$$

Como:

$$\nabla_\lambda\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \partial_\lambda\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}\, \delta\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\alpha}\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\beta} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\beta}\, \Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho} \qquad (3.37a)$$

$$\nabla_\alpha\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta} = \partial_\alpha\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho}\, \delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\lambda}\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\beta} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}$$
$$= \partial_\alpha\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho} \quad , \qquad (3.37b)$$

(3.36) fica reescrita da seguinte maneira:

$$\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\lambda\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta} + (\Gamma^{\rho}_{\lambda\alpha} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\lambda})\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\beta}$$
$$= 2\, \nabla_{[\lambda}\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha]\beta} + 2\, \mathcal{T}_{\lambda\alpha}{}^{\rho}\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\beta} \quad . \qquad (3.38)$$

Assim,

$$\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\, \delta R_{\alpha\beta} = 2\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}(\nabla_{[\lambda}\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha]\beta} + \mathcal{T}_{\lambda\alpha}{}^{\rho}\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\beta}) . \qquad (3.39)$$

De acordo com a relação (Hehl 1974):

$$P\, \nabla\, \delta Q = -(\overset{*}{\nabla} P)\, \delta Q \quad , \qquad (3.40)$$

onde P, Q são campos tensoriais arbitrários, a primeira parcela de (3.39) se escreve:

$$\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}(\nabla_\lambda\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\, \Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}) = -\sqrt{-g}\,[(\overset{*}{\nabla}_\lambda\, g^{\alpha\beta})\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - (\overset{*}{\nabla}_\alpha\, g^{\alpha\beta})\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}]$$
$$= -2\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}(\mathcal{T}_{\lambda\sigma}{}^{\sigma}\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \mathcal{T}_{\alpha\sigma}{}^{\sigma}\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}) .$$

Substituindo esta expressão em (3.39), vem:

$$\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\, \delta R_{\alpha\beta} = 2\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}(\mathcal{T}_{\lambda\alpha}{}^{\rho} + \mathcal{T}_{\alpha\sigma}{}^{\sigma}\, \delta^{\rho}_{\lambda} - \mathcal{T}_{\lambda\sigma}{}^{\sigma}\, \delta^{\rho}_{\alpha})\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\beta}$$
$$= 2\sqrt{-g}\; g^{\rho\beta}\; \mathfrak{T}_{\lambda\rho}{}^{\alpha}\; \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \quad , \qquad (3.41)$$

onde foi introduzido o tensor de torção modificado, dado em (2.64).

Desta forma, (3.35) se transforma em:

$$\delta\mathcal{R} = R_{\alpha\beta}\; \delta(\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}) + 2\sqrt{-g}\, g^{\beta\rho}\, \mathfrak{T}_{\lambda\rho}{}^{\alpha}\, \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \; . \qquad (3.42)$$

Como:
$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}\;, \tag{3.43}$$

$$\delta(\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}) = \sqrt{-g}\,\left(\frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta} g^{\rho\lambda} - g^{\alpha\rho} g^{\lambda\beta}\right)\delta g_{\lambda\rho}\;.$$

Além disso, usando a definição do tensor de Einstein (2.62), tem-se:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}\,\delta(\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}) &= R_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,\left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\rho} - g^{\alpha\rho} g^{\lambda\beta}\right)\delta g_{\lambda\rho} \\ &= -\sqrt{-g}\;\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} R^{\rho}{}_{\rho}\right)\delta g_{\beta\alpha} \\ &= -\sqrt{-g}\;\; G^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}\;. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Ou seja:

$$\delta\mathcal{R} = -\sqrt{-g}\,G^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta} + 2\sqrt{-g}\;g^{\beta\rho}\,T_{\lambda\rho}{}^{\alpha}\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\;, \tag{3.45}$$

onde foi usado o postulado métrico $\nabla_\alpha\,(\sqrt{-g}\;g^{\alpha\beta}) = 0$.

Uma variação na métrica leva a uma variação na conexão, tal que o postulado métrico assume a forma:

$$\overset{\Gamma+\delta\Gamma}{\nabla_\rho}\;(g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}) = 0\;.$$

Desenvolvendo isto, tem-se:

$$(g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta})_{,\rho} - (\Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha})(g_{\lambda\beta} + \delta g_{\lambda\beta}) - (\Gamma^{\lambda}_{\rho\beta} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\beta})(g_{\alpha\lambda} + \delta g_{\alpha\lambda}) = 0\;,$$

o que, desprezando os termos quadráticos nas variações, reduz-se a:

$$\nabla_\rho\, g_{\alpha\beta} + \nabla_\rho\,\delta g_{\alpha\beta} - g_{\lambda\beta}\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha} - g_{\alpha\lambda}\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\beta} = 0\;.$$

Sendo o primeiro termo nulo e permutando ciclicamente os índices $\rho\alpha\beta$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \nabla_\rho\,\delta g_{\alpha\beta} &= g_{\lambda\beta}\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha} + g_{\alpha\lambda}\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\beta} \\ \nabla_\alpha\,\delta g_{\beta\rho} &= g_{\lambda\rho}\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} + g_{\beta\lambda}\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho} \\ -\nabla_\beta\,\delta g_{\rho\alpha} &= -g_{\lambda\alpha}\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\beta\rho} - g_{\rho\lambda}\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}\;, \end{aligned}$$

cuja soma membro a membro resulta em:

$$\begin{aligned} g_{\lambda\beta}\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho} &= \frac{1}{2}(\nabla_\rho\,\delta g_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha\,\delta g_{\beta\rho} - \nabla_\beta\,\delta g_{\rho\alpha}) - g_{\lambda\beta}\,\delta T_{\rho\alpha}{}^{\lambda} - g_{\lambda\rho}\,\delta T_{\alpha\beta}{}^{\lambda} + g_{\lambda\alpha}\,\delta T_{\beta\rho}{}^{\lambda} \\ &= \Delta^{\mu\nu\sigma}_{\rho\alpha\beta}\,\left(\frac{1}{2}\,\nabla_\mu\,\delta g_{\nu\sigma} - g_{\lambda\sigma}\,\delta T_{\mu\nu}{}^{\lambda}\right)\;, \end{aligned}$$

onde se definiu o tensor de permutação $\Delta^{\mu\nu\sigma}_{\rho\alpha\beta}$:

$$\Delta^{\mu\nu\sigma}_{\rho\alpha\beta} = \delta^{\mu}_{\rho}\,\delta^{\nu}_{\alpha}\,\delta^{\sigma}_{\beta} + \delta^{\mu}_{\alpha}\,\delta^{\nu}_{\beta}\,\delta^{\sigma}_{\rho} - \delta^{\mu}_{\beta}\,\delta^{\nu}_{\rho}\,\delta^{\sigma}_{\alpha} \quad . \tag{3.46}$$

Portanto,

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = g^{\rho\lambda}\,\Delta^{\mu\nu\sigma}_{\beta\alpha\rho}\left(\tfrac{1}{2}\,\nabla_{\mu}\,g_{\nu\sigma} - g_{\sigma\gamma}\,\delta\tau_{\mu\nu}{}^{\gamma}\right) \quad . \tag{3.47}$$

Assim, por (3.45) e (3.46):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta\mathcal{R} &= -G^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta} + 2\,\mathcal{T}_{\lambda}{}^{\beta\alpha}\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \\ &= -G^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta} + 2\left(\mathcal{T}^{\gamma\alpha\beta} + \mathcal{T}^{\beta\gamma\alpha} - \mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma}\right)\left(\tfrac{1}{2}\,\nabla_{\alpha}\,\delta g_{\beta\gamma} - g_{\gamma\lambda}\,\delta\tau_{\alpha\beta}{}^{\lambda}\right)\end{aligned} \tag{3.48}$$

Usando em (3.48) a relação (3.40), vem:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta\mathcal{R} = &-G^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta} - \overset{*}{\nabla}_{\gamma}\left(\mathcal{T}^{\beta\gamma\alpha} + \mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma} - \mathcal{T}^{\gamma\beta\alpha}\right)\delta g_{\alpha\beta} + \\ &- 2\left(\mathcal{T}_{\gamma}{}^{\alpha\beta} + \mathcal{T}^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\alpha} + \mathcal{T}^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\right)\delta\tau_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \quad .\end{aligned} \tag{3.49}$$

Arrumando os índices da seguinte forma:

$$\begin{aligned}-\overset{*}{\nabla}_{\gamma}\left(\mathcal{T}^{\beta\gamma\alpha} + \mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma} - \mathcal{T}^{\gamma\beta\alpha}\right)\delta g_{\alpha\beta} &= \\ = \overset{*}{\nabla}_{\gamma}\left(\mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma} - \mathcal{T}^{\beta\gamma\alpha} + \mathcal{T}^{\gamma\alpha\beta}\right)\delta g_{\alpha\beta} &\ ,\end{aligned}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta\mathcal{R} = &\left[-G^{\alpha\beta} + \overset{*}{\nabla}_{\gamma}\left(\mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma} - \mathcal{T}^{\beta\gamma\alpha} + \mathcal{T}^{\gamma\alpha\beta}\right)\right]\delta g_{\alpha\beta} - \\ &- 2\left(\mathcal{T}_{\gamma}{}^{\alpha\beta} + \mathcal{T}^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\alpha} - \mathcal{T}^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\right)\delta\tau_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \quad .\end{aligned} \tag{3.50}$$

Portanto, as derivadas funcionais da densidade da escalar de curvatura são:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta g_{\alpha\beta}} = -G^{\alpha\beta} + \overset{*}{\nabla}_{\gamma}\left(\mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma} - \mathcal{T}^{\beta\gamma\alpha} + \mathcal{T}^{\gamma\alpha\beta}\right) \tag{3.51}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\tau_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} = -2\left(\mathcal{T}_{\gamma}{}^{\alpha\beta} + \mathcal{T}^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\alpha} - \mathcal{T}^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\right) \quad . \tag{3.52}$$

Observe-se, ainda, que, em (3.50):

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{T}_{\gamma}{}^{\alpha\beta} - \mathcal{T}^{\alpha\beta}{}_{\gamma} + \mathcal{T}^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\alpha}\right) &= \mathcal{T}_{\gamma}{}^{\alpha\beta}\,\delta\left(\tau_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \tau^{\gamma}{}_{\alpha\beta} + \tau_{\beta}{}^{\gamma}{}_{\alpha}\right) \\ &= \mathcal{T}_{\gamma}{}^{\beta\alpha}\,\delta K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \quad ,\end{aligned} \tag{3.53}$$

e então:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} = -2\, T_{\gamma}{}^{\beta\alpha} \quad . \tag{3.54}$$

AS EQUAÇÕES DE CAMPO.

A primeira equação de campo obtida foi dada por (3.26):

$$\frac{\delta \mathcal{R}}{\delta g_{\alpha\beta}} + \frac{1}{2}\, g^{\alpha\lambda} \overset{*}{\nabla}_{\gamma} \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \tau_{\beta\gamma}{}^{\lambda}} = -8\pi \sqrt{-g}\; t^{\alpha\beta} \quad . \tag{3.55}$$

Substituindo (3.51) e (3.52), vem:

$$\sqrt{-g}\, G^{\alpha\beta} - \sqrt{-g}\, \overset{*}{\nabla}_{\gamma}\left(T^{\alpha\beta\gamma} - T^{\beta\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta}\right) + $$
$$+ g^{\alpha\lambda} \overset{*}{\nabla}_{\gamma}\left[\sqrt{-g}\left(T_{\lambda}{}^{\beta\gamma} + T^{\gamma}{}_{\lambda}{}^{\beta} - T^{\beta\gamma}{}_{\lambda}\right)\right] = 8\pi\sqrt{-g}\; t^{\alpha\beta} \; . \tag{3.56}$$

Como tem-se $\overset{*}{\nabla}_{\gamma} = \nabla_{\gamma} + 2\tau_{\gamma\rho}{}^{\rho}$, o lado esquerdo de (3.56) se trans- forma em:

$$\sqrt{-g}\; G^{\alpha\beta} - \sqrt{-g}\; \nabla_{\gamma}\left(T^{\alpha\beta\gamma} - T^{\beta\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta}\right) + $$
$$+ \nabla_{\gamma}\left[\sqrt{-g}\left(T^{\alpha\beta\gamma} + T^{\gamma\alpha\beta} - T^{\beta\gamma\alpha}\right)\right] = $$

$$= \sqrt{-g}\; G^{\alpha\beta} - \sqrt{-g}\; \nabla_{\gamma}\left(T^{\alpha\beta\gamma} - T^{\beta\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta}\right) + $$
$$+ \left(\sqrt{-g}\right)_{,\gamma}\left(T^{\alpha\beta\gamma} + T^{\gamma\alpha\beta} - T^{\beta\gamma\alpha}\right) + $$
$$+ \sqrt{-g}\, \nabla_{\gamma}\left(T^{\alpha\beta\gamma} + T^{\gamma\alpha\beta} - T^{\beta\gamma\alpha}\right) - $$
$$- \Gamma^{\rho}_{\gamma\rho} \sqrt{-g}\left(T^{\alpha\beta\gamma} + T^{\gamma\alpha\beta} - T^{\beta\gamma\alpha}\right) = $$

$$= \sqrt{-g}\; G^{\alpha\beta} \quad ;$$

pois $\quad \Gamma^{\rho}_{\gamma\rho} = \left\{ {\rho \atop \gamma\rho} \right\} = \dfrac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\right)_{,\gamma} \; .$

Assim, chega-se à primeira equação de campo da teoria de Einstein-Cartan:

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi t^{\alpha\beta} \quad . \tag{3.57}$$

Usando, agora, (3.52) em (3.27), vem:

$$-\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \tau_{\beta\gamma}{}^{\lambda}} + \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \tau_{\alpha\gamma}{}^{\lambda}} = 16\pi \sqrt{-g}\, S^{\alpha\beta\gamma}$$

ou:

$$g^{\alpha\lambda}\sqrt{-g}\,(T_\lambda{}^{\beta\gamma} - T^{\beta\gamma}{}_\lambda + T^\gamma{}_\lambda{}^\beta) - g^{\beta\lambda}\sqrt{-g}\,(T_\lambda{}^{\alpha\gamma} - T^{\alpha\gamma}{}_\lambda + T^\gamma{}_\lambda{}^\alpha) = 16\pi\sqrt{-g}\, S^{\alpha\beta\gamma}$$

Logo,

$$T^{\alpha\beta\gamma} - T^{\beta\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta} - T^{\beta\alpha\gamma} + T^{\alpha\gamma\beta} - T^{\gamma\beta\alpha} =$$

$$= T^{\alpha\beta\gamma} - T^{\gamma\beta\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta} + T^{\alpha\beta\gamma} - T^{\gamma\alpha\beta} - T^{\gamma\beta\alpha} =$$

$$= 2\, T^{\alpha\beta\gamma} = 16\pi S^{\alpha\beta\gamma}$$

e tem-se, enfim, a segunda equação de campo da teoria:

$$T^{\alpha\beta\gamma} = 8\pi S^{\alpha\beta\gamma} \quad . \tag{3.58}$$

(3.57) e (3.58) foram obtidas primeiramente por Kibble (1961) e formam o conjunto de equações que vêm a substituir a equação de Einstein (1.13) na descrição do campo gravitacional quando se permite que o momentum angular de spin tenha influência sobre a geometria do espaço-tempo. Deve-se notar que, embora (3.57) seja semelhante a (1.13), trata-se, na verdade, de uma generalização da equação da relatividade geral, onde o tensor $G^{\alpha\beta}$ foi construído a partir de coeficientes de conexão idênticos aos símbolos de Christoffel. Além disso, a equação (3.58), inexistente na teoria einsteiniana, mostra claramente a relação entre spin e geometria. Observe-se que (3.58) não é uma equação diferencial como (3.57) e sim algébrica. Algumas de suas implicações serão mostradas no capítulo II.

B. O MÉTODO DAS FORMAS DIFERENCIAIS

Um outro formalismo, que produz os mesmos resultados do tratamento tensorial mostrado anteriormente, é o que aplica o cálculo exterior de formas diferenciais, desenvolvido para a teoria de Einstein-Cartan por Trautman (1972a,b,c,1973a). Estes artigos, embora elegantes, são bastante compactos, merecendo uma exposição mais detalhada. Apesar de isto já ter sido realizado [Galvão (1975,1976)], este formalismo será aqui incluído por razões de completeza, pois os cálculos de aplicação da teoria em astrofísica do capítulo III serão realizados a partir de suas equações fundamentais.

CÁLCULO EXTERIOR*.

No item I.2 foram definidas as 1-formas (ou formas diferenciais de primeiro grau) como objetos do espaço dual ao espaço tangente a cada ponto da variedade, formado pelos chamados vetores tangentes. A aplicação de uma 1-forma sobre um vetor tangente resulta no produto escalar destes dois objetos.

Para se construir formas diferenciais de graus superiores (2-formas, 3-formas, etc.), necessita-se da definição do <u>produto exterior</u> de duas 1-formas α e β como o produto tensorial antissimetrizado. O resultado é uma <u>2-forma</u> $\alpha \wedge \beta$:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{2}\left(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha\right) \tag{3.59}$$

Este produto possui a propriedade de ser anticomutativo:

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha \tag{3.60}$$

---

*Várias obras recentes de relatividade vêm desenvolvendo o formalismo do cálculo exterior de formas diferenciais e suas aplicações em física. Flanders (1963), embora não sendo um livro de relatividade, possui a virtude de ser escrito com grande clareza, além de conter múltiplos exemplos e aplicações. No contexto relativista, ver Misner, Thorne & Wheeler (1973), Hawking & Ellis (1973), Ryan & Shepley (1975), Soares (1978) ou Galvão (1975), este último incluindo os objetos da variedade de Riemann-Cartan.

Em termos de coordenadas relacionadas a uma base de 1-formas $\{\omega^{\alpha}\}$:

$$\alpha \wedge \beta = \alpha_{\mu} \beta_{\nu} \; \omega^{\mu} \wedge \omega^{\nu}$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha_{\mu} \beta_{\nu} - \alpha_{\nu} \beta_{\mu}) \; \omega^{\mu} \wedge \omega^{\nu} \quad . \tag{3.61}$$

Em geral, uma <u>p-forma</u> se obtêm generalizando a defini - ção acima:

$$\alpha = \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_p} \; \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_p} \, , \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_p \, . \tag{3.62}$$

Observe-se que, numa variedade de dimensão n, somente pode-se definir, através do produto exterior, p-formas tais que $p < n$, devido à completa antissimetria do tensor que se obtêm a cada produto.

O produto exterior de uma p-forma α por uma q-forma β possui a propriedade:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \; \beta \wedge \alpha \quad . \tag{3.63}$$

Um operador diferencial sobre formas, chamado <u>diferenciação exterior</u>, denotado por d, é uma aplicação linear que produz uma (p+1) -forma a partir de uma p-forma. A atuação de d sobre 0-formas f (funções) resulta na 1-forma df. Esta 1-forma descreve a derivada de f numa direção não especificada. Para se obter a derivada de f na direção de um vetor U, usa-se (2.3), definindo:

$$\langle df, U \rangle \equiv \partial_U f \quad . \tag{3.64}$$

Isto justifica a notação de $\{dx^{\mu}\}$ para a base dual da base canônica $\{\partial_{\nu}\}$, pois, colocando em (3.64), $f \equiv x^{\mu}$ e $U \equiv \partial_{\nu}$:

$$\langle dx^{\mu}, \partial_{\nu} \rangle = \partial_{\nu} x^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad . \tag{3.65}$$

As componentes de df na base $\{dx^{\mu}\}$ são dadas por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \equiv f_{,\mu} \, dx^{\mu} \tag{3.66}$$

("diferencial" ou "gradiente" da função f).

Uma propriedade da diferenciação exterior é que a segunda da diferenciação é nula, para qualquer p-forma ω:

$$d^2\omega = d\,d\omega = 0 \quad . \tag{3.67}$$

A derivada exterior de um produto exterior de formas vem dada pela expressão:

$$d(\omega\wedge\Omega) = d\omega\wedge\Omega + (-1)^p\,\omega\wedge d\Omega \quad , \tag{3.68}$$

sendo ω uma p-forma.

A atuação do operador d sobre p-formas leva à determinação de algumas fórmulas que virão a ser usadas mais adiante. O efeito da derivação exterior sobre uma 0-forma f já foi dado em (3.66). Para uma 1-forma ω atuando sobre o par arbitrário de vetores U e V, tem-se:

$$d\omega(U,V) = \frac{1}{2}\left[U\langle\omega,V\rangle - V\langle\omega,U\rangle - \langle\omega,[U,V]\rangle\right] \quad . \tag{3.69}$$

Também pode-se considerar a derivada covariante de um vetor V numa direção não especificada. Será a atuação do operador <u>derivada exterior covariante</u> sobre V: $\mathbb{D}V$. Assim, a derivada covariante de V na direção de um outro vetor U é definida como:

$$\langle \mathbb{D}V, U\rangle \equiv \nabla_U V \quad . \tag{3.70}$$

Ao objeto $\mathbb{D}V$ dá-se o nome de "1-formas com valor vetorial". Nesta nomenclatura, df, dado por (3.64), é chamado "1-forma com valor escalar". Para um tensor de ordem contravariante arbitrária S ("0-forma de valor tensorial"), tem-se, numa base $\{\omega^\nu\}$, dual de $\{e_\nu\}$:

$$\mathbb{D}S = \omega^\nu \nabla_\nu S \quad . \tag{3.71}$$

A derivada exterior covariante aplicada a um produto de formas também segue a regra (3.68):

$$\mathbb{D}(\omega\wedge\Omega) = \mathbb{D}\omega\wedge\Omega + (-1)^p\,\omega\wedge\mathbb{D}\Omega \quad , \tag{3.72}$$

onde ω é uma p-forma. Esta fórmula também é válida para p-formas com valor tensorial.

As componentes da derivada exterior covariante de um campo vetorial V numa base coordenada vem dada da seguinte maneira. Se $V = V^\alpha e_\alpha$,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}V = \mathbb{D}(V^\alpha e_\alpha) &= (\mathbb{D}V^\alpha)\, e_\alpha + V^\alpha \wedge \mathbb{D}e_\alpha \\ &= (dV^\alpha)\, e_\alpha + V^\alpha \wedge \omega^\beta{}_\alpha\, e_\beta \\ &= (dV^\alpha + V^\beta \wedge \omega^\alpha{}_\beta)\, e_\alpha \quad , \end{aligned} \tag{3.73}$$

onde se definem as <u>1-formas de conexão</u> $\omega^\alpha{}_\beta$ ("componentes" da expansão de $\mathbb{D}e_\beta$). A relação destas 1-formas com os coeficientes de conexão Γ é obtida a partir de (3.70), usando (2.18):

$$\langle \mathbb{D}e_\beta, e_\alpha \rangle = \nabla_\alpha e_\beta = e_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$$

ou:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}e_\beta = e_\alpha\, \omega^\alpha{}_\beta = e_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\, \omega^\alpha \\ = e_\alpha \Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\, \omega^\lambda \ . \end{aligned}$$

Portanto

$$\omega^\alpha{}_\beta = \Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\, \omega^\lambda \ . \tag{3.74}$$

Enfim, a generalização para o caso de derivada exterior covariante de p-formas, cujos coeficientes são tensores n vezes contravariantes e p vezes covariantes é imediata. Por exemplo, seja a 2-forma $\Omega^\alpha{}_\beta$. Então*:

$$\mathbb{D}\Omega^\alpha{}_\beta = d\Omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\lambda \wedge \Omega^\lambda{}_\beta - \omega^\lambda{}_\beta \wedge \Omega^\alpha{}_\lambda \ . \tag{3.75}$$

2 - FORMA DE TORÇÃO - PRIMEIRA EQUAÇÃO DE ESTRUTURA.

Numa base arbitrária $\{e_\alpha\}$, com dual $\{\omega^\beta\}$, define-se a <u>2-forma de torção</u> (com valor vetorial) Θ^α como:

*Ver Lovelock & Rund (1975), pág. 140.

$$T(U,V) \quad = \quad \Theta^{\alpha}(U,V)\, e_{\alpha} \tag{3.76}$$

Por (2.29), portanto:

$$2\ \Theta^{\alpha}(U,V)\, e_{\alpha} = \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V] \quad . \tag{3.77}$$

Nesta base, tem-se:

$$U = U^{\alpha} e_{\alpha} = \langle \omega^{\alpha}, U \rangle e_{\alpha}$$

$$V = V^{\alpha} e_{\alpha} = \langle \omega^{\alpha}, V \rangle e_{\alpha}$$

$$[U,V] \quad = \langle \omega^{\alpha}, [U,V] \rangle e_{\alpha} \quad ,$$

de modo que:

$$\nabla_U V = \nabla_U \left(\langle \omega^{\alpha}, V \rangle e_{\alpha} \right) = \left(\nabla_U \langle \omega^{\alpha}, V \rangle \right) e_{\alpha} + \langle \omega^{\alpha}, V \rangle \nabla_U e_{\alpha}$$

e como:

$$\nabla_U e_{\alpha} = U^{\beta} \nabla_{\beta} e_{\alpha} = U^{\beta} \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} e_{\lambda}$$

$$= \langle \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} \omega^{\beta}, U \rangle e_{\lambda} = \langle \omega^{\lambda}{}_{\alpha}, U \rangle e_{\lambda} \quad , \tag{3.78}$$

$$\nabla_U V = (U \langle \omega^{\alpha}, V \rangle) e_{\alpha} + \langle \omega^{\beta}, V \rangle \langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, U \rangle e_{\alpha}$$

$$\nabla_V U = (V \langle \omega^{\alpha}, U \rangle) e_{\alpha} + \langle \omega^{\beta}, U \rangle \langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, V \rangle e_{\alpha} \quad ,$$

onde foram usadas as propriedades da derivada covariante. Assim, por (3.76):

$$\Theta^{\alpha}(U,V) = \frac{1}{2}\left[U\langle \omega^{\alpha}, V \rangle - V\langle \omega^{\alpha}, U \rangle - \langle \omega^{\alpha}, [U,V] \rangle \right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\langle \omega^{\beta}, V \rangle \langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, U \rangle - \langle \omega^{\beta}, U \rangle \langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, V \rangle \right] . \tag{3.79}$$

A primeira parcela entre colchetes de (3.79) dá a derivada exterior da 1-forma de base $d\omega^{\alpha}$ [compare com (3.69)], enquanto que a segunda parcela pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2}\left[\langle \omega^{\beta}, V \rangle \langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, U \rangle - \langle \omega^{\beta}, U \rangle \langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, V \rangle \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\omega^{\alpha}{}_{\beta}(U)\, \omega^{\beta}(V) - \omega^{\beta}(U)\, \omega^{\alpha}{}_{\beta}(V) \right]$$

$$= \left(\omega^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} \right)(U,V) \quad .$$

Assim, obtém-se a relação:

$$\Theta^{\alpha} = d\omega^{\alpha} + \omega^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} \quad , \tag{3.80a}$$

chamada <u>primeira equação de estrutura de Cartan</u>, que, em termos da derivada exterior covariante, se escreve:

$$\Theta^{\alpha} = \mathbb{D}\,\omega^{\alpha} \quad . \tag{3.80b}$$

2 - FORMA DE CURVATURA - SEGUNDA EQUAÇÃO DE ESTRUTURA

De uma maneira análoga, pode ser definida uma <u>2-forma de curvatura</u> relacionada com o tensor de Riemann através do operador de curvatura $\mathcal{R}$ (U,V):

$$\mathcal{R}(U,V)\, e_{\beta} = \frac{1}{2}\, \Omega^{\alpha}{}_{\beta}\, (U,V)\, e_{\beta} \quad , \tag{3.81}$$

que foi definido em termos da derivada covariante em (2.34). Deste modo:

$$2\,\Omega^{\alpha}{}_{\beta}\,(U,V)\, e_{\alpha} = [\nabla_U \, , \nabla_V]\, e_{\beta} - \nabla_{[U,V]}\, e_{\beta} \quad . \tag{3.82}$$

Por (3.78):

$$\nabla_U\, e_{\beta} = \langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, U \rangle\, e_{\alpha}$$

$$\nabla_V\, e_{\beta} = \langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, V \rangle\, e_{\alpha}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \nabla_U \nabla_V\, e_{\beta} &= \nabla_U\, [\langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, V \rangle\, e_{\alpha}] \\ &= (\nabla_U \langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, V \rangle)\, e_{\alpha} + \langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, V \rangle\, \nabla_U\, e_{\alpha} \\ &= \{ U \langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, V \rangle + \langle \omega^{\alpha}{}_{\lambda}, U \rangle \langle \omega^{\lambda}{}_{\beta}, V \rangle \}\, e_{\alpha} \quad . \end{aligned} \tag{3.83}$$

Trocando U com V em (3.83), vem:

$$\nabla_V \nabla_U\, e_{\beta} = \{ V \langle \omega^{\alpha}{}_{\beta}, U \rangle + \langle \omega^{\lambda}{}_{\beta}, U \rangle \langle \omega^{\alpha}{}_{\lambda}, V \rangle \}\, e_{\alpha} \quad . \tag{3.84}$$

e, conseqüentemente,

$$[\nabla_U, \nabla_V]\, e_\beta = \nabla_U \nabla_V e_\beta - \nabla_V \nabla_U e_\beta$$

$$= \{ U\langle \omega^\alpha{}_\beta, V\rangle - V\langle \omega^\alpha{}_\beta, U\rangle +$$

$$+ \langle \omega^\alpha{}_\lambda, U\rangle \langle \omega^\lambda{}_\beta, V\rangle - \langle \omega^\lambda{}_\beta, U\rangle \langle \omega^\alpha{}_\lambda, V\rangle \}\, e_\alpha \quad (3.85)$$

E como ainda tem-se:

$$\nabla_{[U,V]}\, e_\beta = \langle \omega^\alpha{}_\beta, [U,V]\rangle\, e_\alpha \quad , \qquad (3.86)$$

a expressão para (3.82) se torna:

$$\Omega^\alpha{}_\beta (U,V)\, e_\alpha = \frac{1}{2}\{ U\langle \omega^\alpha{}_\beta, V\rangle - V\langle \omega^\alpha{}_\beta, U\rangle - \langle \omega^\alpha{}_\beta, [U,V]\rangle +$$

$$+ \langle \omega^\alpha{}_\lambda, U\rangle \langle \omega^\lambda{}_\beta, V\rangle - \langle \omega^\lambda{}_\beta, U\rangle \langle \omega^\alpha{}_\lambda, V\rangle \}\, e_\alpha \ . \quad (3.87)$$

As três primeiras parcelas do lado direito de (3.87) formam, devido a (3.69), a derivada exterior da 1-forma de conexão, enquanto que as parcelas restantes fornecem o produto exterior entre $\omega^\alpha{}_\lambda$ e $\omega^\lambda{}_\beta$ [ver equações (2.8) e (3.59)]. Assim, a 2-forma de curvatura se escreve:

$$\Omega^\alpha{}_\beta = d\omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\lambda \wedge \omega^\lambda{}_\beta \qquad (3.88a)$$

e esta expressão é denominada <u>segunda equação de estrutura de Cartan</u>. Tal como a primeira equação de estrutura, esta também pode ser escrita em termos da derivada exterior covariante:

$$\Omega^\alpha{}_\beta = \mathbb{D}\omega^\alpha{}_\beta + \omega^\lambda{}_\beta \wedge \omega^\alpha{}_\lambda \ . \qquad (3.88b)$$

IDENTIDADES DE BIANCHI.

Ao se tomar a derivada exterior das equações de estrutura (3.80) e (3.88), são extraídas as chamadas <u>identidades de Bianchi</u>. Para (3.80), obtém-se:

$$d\Theta^\alpha = \underbrace{d^2\omega^\alpha}_{[=0,\ \text{por } (3.67)]} + d\omega^\alpha{}_\beta \wedge \omega^\beta - \omega^\alpha{}_\beta \wedge d\omega^\beta$$

e, usando (3.88) na segunda parcela e (3.80) na terceira, vem:

$$d\Theta^\alpha = (\Omega^\alpha{}_\beta - \omega^\alpha{}_\lambda \wedge \omega^\lambda{}_\beta) \wedge \omega^\beta -$$
$$- \omega^\alpha{}_\beta \wedge (\Theta^\beta - \omega^\beta{}_\lambda \wedge \omega^\lambda)$$
$$= \Omega^\alpha{}_\beta \wedge \omega^\beta - \omega^\alpha{}_\beta \wedge \Theta^\beta$$

e como

$$d\Theta^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta \wedge \Theta^\beta = \mathbb{D}\Theta^\alpha ,$$

chega-se à primeira identidade de Bianchi:

$$\mathbb{D}\Theta^\alpha = \Omega^\alpha{}_\beta \wedge \omega^\beta \qquad (3.89)$$

Quanto a (3.88), sua derivada exterior é:

$$d\Omega^\alpha{}_\beta = d^2\omega^\alpha{}_\beta + d\omega^\alpha{}_\lambda \wedge \omega^\lambda{}_\beta - \omega^\alpha{}_\lambda \wedge d\omega^\lambda{}_\beta$$

e substituindo, analogamente à dedução anterior, as equações de estrutura originais, tem-se:

$$d\Omega^\alpha{}_\beta = (\Omega^\alpha{}_\lambda - \omega^\alpha{}_\gamma \wedge \omega^\gamma{}_\lambda) \wedge \omega^\lambda{}_\beta - \omega^\alpha{}_\lambda \wedge (\Omega^\lambda{}_\beta - \omega^\lambda{}_\gamma \wedge \omega^\gamma{}_\beta)$$
$$= \Omega^\alpha{}_\lambda \wedge \omega^\lambda{}_\beta - \omega^\alpha{}_\lambda \wedge \Omega^\lambda{}_\beta$$

Ou seja:

$$\mathbb{D}\Omega^\alpha{}_\beta = 0 \qquad (3.90)$$

e esta é a segunda identidade de Bianchi.

Ao expressar as 2-formas de torção e curvatura numa base $\{\omega^\alpha \wedge \omega^\beta\}$, obtêm-se uma relação com as componentes dos tensores de torção e curvatura:

$$\Theta^\alpha = \mathcal{T}_{\beta\gamma}{}^\alpha \, \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \qquad (3.91)$$

$$\Omega^\alpha{}_\beta = \frac{1}{2} R_{\gamma\delta\beta}{}^\alpha \, \omega^\gamma \wedge \omega^\delta \qquad (3.92)$$

Assim, em termos de componentes, as identidades (3.89,90) resultam nas fórmulas apresentadas anteriormente em (2.40,41).

CARACTERÍSTICAS DA VARIEDADE DE RIEMANN-CARTAN EM TERMOS DE FORMAS DIFERENCIAIS E CÁLCULO EXTERIOR.

Evidentemente, as características da variedade de Riemann Cartan, que é considerada para descrever o espaço-tempo, já foram desenvolvidas no item I.2. Entretanto, para se chegar ao formalismo lagrangiano em termos de formas diferenciais, alguns pontos deste tópico devem ser reescritos nesta outra linguagem.

Como já exposto, o espaço-tempo deve ser dotado de uma métrica g, de assinatura hiperbólica. Em termos de um conjunto de 1-formas linearmente independentes $\{\omega^{\alpha}\}$, definido localmente, a métrica fica decomposta em componentes

$$g = g_{\alpha\beta}\ \omega^{\alpha} \otimes \omega^{\beta} \quad . \tag{3.93}$$

Aos coeficientes $g_{\alpha\beta}$ impõe-se o chamado "postulado métrico", agora descrito pela derivada exterior covariante:

$$\mathbb{D} g_{\alpha\beta} = \omega^{\lambda} \nabla_{\lambda} g_{\alpha\beta} = 0 \quad , \tag{3.94}$$

permitindo a preservação do produto escalar por transporte paralelo.

Uma base geral para formas diferenciais pode ser construída a partir de $\{\omega^{\alpha}\}$:

$$\{\mathbb{1},\ \omega^{\alpha},\ \omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta},\ \omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma},\ \omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\delta}\} \tag{3.95}$$

cuja base dual é:

$$\{\eta\ ,\ \eta_{\alpha}\ ,\ \eta_{\alpha\beta\gamma}\ ,\ \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\} \quad , \tag{3.96}$$

onde se define:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g}\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{3.97a}$$

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \omega^{\delta}\ \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{3.97b}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\omega^{\gamma}\wedge\eta_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\ \omega^{\gamma}\wedge\omega^{\delta}\wedge\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{3.97c}$$

$$\eta_\alpha = \frac{1}{3}\,\omega^\beta \wedge \eta_{\alpha\beta}$$
$$= \frac{1}{3!}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma \wedge \omega^\delta\,\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad (3.97d)$$

$$\eta = \frac{1}{4}\,\omega^\alpha \wedge \eta_\alpha$$
$$= \frac{1}{4!}\,\omega^\alpha \wedge \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \wedge \omega^\delta\,\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\,, \qquad (3.97e)$$

onde $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é o símbolo completamente antissimétrico de Levi-Civita, para o qual adota-se a convenção:

$$\epsilon_{0123} = +1 \qquad (3.97f)$$

Observe-se que η fornece o elemento de 4-volume do espaço-tempo.

Pela definição do símbolo de Levi-Civita, são válidas as seguintes relações:

$$\omega^\rho\,\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \delta^\rho_\delta\,\eta_{\alpha\beta\gamma} - \delta^\rho_\gamma\,\eta_{\delta\alpha\beta} + \delta^\rho_\beta\,\eta_{\gamma\delta\alpha} - \delta^\rho_\alpha\,\eta_{\beta\gamma\delta} \qquad (3.98a)$$

$$\omega^\rho \wedge \eta_{\alpha\beta\gamma} = \delta^\rho_\gamma\,\eta_{\alpha\beta} + \delta^\rho_\beta\,\eta_{\gamma\alpha} + \delta^\rho_\alpha\,\eta_{\beta\gamma} \qquad (3.98b)$$

$$\omega^\rho \wedge \eta_{\alpha\beta} = \delta^\rho_\beta\,\eta_\alpha - \delta^\rho_\alpha\,\eta_\beta \qquad (3.98c)$$

$$\omega^\rho \wedge \eta_\alpha = \delta^\rho_\alpha\,\eta \qquad (3.98d)$$

Voltando ao postulado métrico (3.94), em termos de objetos do cálculo exterior, esta relação de compatibilidade entre a métrica e a conexão afim se escreve:

$$\mathbb{D} g_{\alpha\beta} = 0$$
$$= \omega^\lambda(\partial_\lambda g_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho_{\lambda\beta}\,g_{\alpha\rho} - \Gamma^\rho_{\lambda\alpha}\,g_{\rho\beta})$$
$$= dg_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta} - \omega_{\beta\alpha} \qquad (3.99)$$

Assim,

$$dg_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} \qquad (3.100)$$

onde foi usada a definição da 1-forma de conexão (3.74).

Seja, agora, a derivada exterior covariante da equação

(3.99):

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathbb{D}(\mathbb{D}g_{\alpha\beta}) \\
&= d(\mathbb{D}g_{\alpha\beta}) - \omega^{\lambda}{}_{\alpha} \wedge \mathbb{D}g_{\lambda\beta} - \omega^{\lambda}{}_{\beta} \wedge \mathbb{D}g_{\alpha\lambda}
\end{aligned}
$$

Acontece que:

$$
\begin{aligned}
0 = \mathbb{D}(\mathbb{D}g_{\alpha\beta}) &= d(dg_{\alpha\beta} - \omega^{\rho}{}_{\beta}\, g_{\alpha\rho} - \omega^{\rho}{}_{\alpha}\, g_{\rho\beta}) + \\
&\quad - \omega^{\lambda}{}_{\alpha} \wedge (dg_{\lambda\beta} - \omega_{\lambda\beta} - \omega_{\beta\lambda}) + \\
&\quad - \omega^{\lambda}{}_{\beta} \wedge (dg_{\alpha\lambda} - \omega_{\alpha\lambda} - \omega_{\lambda\alpha}) \\
&= - g_{\alpha\lambda}\, d\omega^{\lambda}{}_{\beta} + \omega^{\lambda}{}_{\beta} \wedge dg_{\alpha\lambda} - g_{\lambda\beta}\, d\omega^{\lambda}{}_{\alpha} + \omega^{\lambda}{}_{\alpha} \wedge dg_{\lambda\beta} + \\
&\quad - \omega^{\lambda}{}_{\alpha} \wedge dg_{\lambda\beta} + \omega^{\lambda}{}_{\alpha} \wedge \omega_{\lambda\beta} + \omega^{\lambda}{}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta\lambda} + \\
&\quad - \omega^{\lambda}{}_{\beta} \wedge dg_{\alpha\lambda} + \omega^{\lambda}{}_{\beta} \wedge \omega_{\alpha\lambda} + \omega^{\lambda}{}_{\beta} \wedge \omega_{\lambda\alpha} \\
&= - (d\omega^{\rho}{}_{\beta} + \omega^{\rho}{}_{\lambda} \wedge \omega^{\lambda}{}_{\beta})\, g_{\alpha\rho} + \\
&\quad - (d\omega^{\rho}{}_{\alpha} + \omega^{\rho}{}_{\lambda} \wedge \omega^{\lambda}{}_{\alpha})\, g_{\rho\beta} \\
&= - \Omega^{\rho}{}_{\beta}\, g_{\alpha\rho} - \Omega^{\rho}{}_{\alpha}\, g_{\rho\beta} \\
&= - \Omega_{\alpha\beta} - \Omega_{\beta\alpha} \qquad ,
\end{aligned}
$$

onde foi usada a segunda equação de estrutura (3.88a) para introdutir a 2-forma de curvatura $\Omega^{\alpha}{}_{\beta}$. Então:

$$
\Omega_{\alpha\beta} + \Omega_{\beta\alpha} = 0 \tag{3.101}
$$

numa variedade de Riemann-Cartan.

Como foi visto no item I.2, a conexão afim da variedade de Riemann-Cartan pode ser separada em partes riemanniana e não riemanniana. Seus coeficientes se escrevem:

$$
\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} - K_{\alpha\beta}{}^{\mu} \qquad .
$$

Assim sendo, as 1-formas de conexão $\omega^{\alpha}{}_{\beta}$ também ficam separadas:

$$\begin{aligned}\omega^{\alpha}{}_{\beta} &= \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}\,\omega^{\lambda}\\ &= \left\{{}^{\alpha}_{\lambda\beta}\right\}\omega^{\lambda} - K_{\lambda\beta}{}^{\alpha}\,\omega^{\lambda}\\ &\equiv \gamma^{\alpha}{}_{\beta} + \lambda^{\alpha}{}_{\beta}\end{aligned} \qquad , \qquad (3.102)$$

onde definiu-se a 1-forma de conexão riemanniana $\gamma^{\alpha}{}_{\beta}$ e a 1-forma de "correção" $\lambda^{\alpha}{}_{\beta}$, relacionada com o tensor de torção.

Substituindo (3.102) em (3.100), vem:

$$dg_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\alpha} + \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\alpha} \quad . \qquad (3.103)$$

Numa variedade riemanniana, é válida a conexão métrica e, portanto,

$$dg_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\alpha} \quad . \qquad (3.104)$$

Assim, (3.103) implica que:

$$\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\alpha} = 0 \quad . \qquad (3.105)$$

Por outro lado, a primeira equação de estrutura em variedade riemanniana se escreve:

$$d\omega^{\alpha} + \gamma^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} = 0 \qquad (3.106)$$

de modo que, ao substituir (3.102) em (3.80a), encontra-se:

$$\begin{aligned}\Theta^{\alpha} &= d\omega^{\alpha} + \omega^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}\\ &= d\omega^{\alpha} + \gamma^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} + \lambda^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}\end{aligned} \quad ,$$

ou seja,

$$\Theta^{\alpha} = \lambda^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} \quad . \qquad (3.107)$$

Finalmente, será descrita a atuação da derivada exterior covariante sobre os objetos dados em (3.96). Como $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -4!$, tem-se, por (3.97a),

$$\mathbb{D}(\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0 \quad , \qquad (3.108)$$

o que implica:

$$\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad . \tag{3.109}$$

Por (3.97b), vem:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta\gamma} &= \mathbb{D}(\omega^{\delta}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}) = (\mathbb{D}\omega^{\delta})\,\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \Theta^{\delta}\,\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad ,\end{aligned} \tag{3.110}$$

onde foi usada a primeira equação de estrutura (3.80b). Aplicando, agora, $\mathbb{D}$ à equação (3.97c), tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\,\mathbb{D}\left[\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\delta}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(\mathbb{D}\omega^{\gamma})\wedge\omega^{\delta}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} - \omega^{\gamma}\wedge\mathbb{D}(\omega^{\delta}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\Theta^{\gamma}\wedge\eta_{\alpha\beta\gamma} - \Theta^{\delta}\wedge\omega^{\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\right] \quad .\end{aligned} \tag{3.111}$$

Tomando a seguinte contração da relação (3.98a):

$$\omega^{\rho}\eta_{\alpha\beta\rho\delta} = -\eta_{\alpha\beta\delta} \quad ,$$

(3.111) fica escrita:

$$\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta} = \Theta^{\rho}\wedge\eta_{\alpha\beta\rho} \quad . \tag{3.112}$$

Introduzindo, na fórmula acima, a expansão em componentes da 2-forma de torção, dada em (3.91), vem:

$$\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta} = \mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\rho}\,\omega^{\mu}\wedge\omega^{\nu}\wedge\eta_{\alpha\beta\rho} \quad . \tag{3.113}$$

Substituindo a relação (3.98b) no último produto exterior da fórmula acima, esta torna-se:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta} &= \mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\rho}\,\omega^{\mu}\wedge(\delta^{\nu}_{\rho}\eta_{\alpha\beta} + \delta^{\nu}_{\beta}\eta_{\rho\alpha} + \delta^{\nu}_{\alpha}\eta_{\beta\rho}) \\ &= \mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\rho}\,(\delta^{\nu}_{\rho}\,\omega^{\mu}\wedge\eta_{\alpha\beta} + \delta^{\nu}_{\beta}\,\omega^{\mu}\wedge\eta_{\rho\alpha} + \delta^{\nu}_{\alpha}\,\omega^{\mu}\wedge\eta_{\beta\rho})\end{aligned}$$

e, usando, agora, (3.98c):

$$\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta} = (\tau_{\alpha\beta}{}^{\rho} - \tau_{\beta\alpha}{}^{\rho})\eta_{\rho} + (\tau_{\beta\rho}{}^{\rho} - \tau_{\rho\beta}{}^{\rho})\eta_{\alpha} + (\tau_{\rho\alpha}{}^{\rho} - \tau_{\alpha\rho}{}^{\rho})\eta_{\beta}$$

$$= 2\,(\tau_{\alpha\beta}{}^{\rho} + \delta^{\rho}_{\alpha}\,\tau_{\beta\lambda}{}^{\lambda} - \delta^{\rho}_{\beta}\,\tau_{\alpha\lambda}{}^{\lambda})\,\eta_{\rho}$$

ou:

$$\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta} = 2\,\Upsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho}\,\eta_{\rho} \qquad (3.114)$$

expressando em termos da torção modificada $\Upsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho}$. Tomando agora $\mathbb{D}\eta_{\alpha}$, tem-se, por (3.97d,98b,112):

$$\mathbb{D}\eta_{\alpha} = \frac{1}{3}\left(\mathbb{D}\omega^{\beta}\wedge\eta_{\alpha\beta} + \mathbb{D}\eta_{\alpha\beta}\wedge\omega^{\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\Theta^{\beta}\wedge\eta_{\alpha\beta} + \Theta^{\rho}\wedge\eta_{\alpha\beta\rho}\wedge\omega^{\beta}\right) .$$

Como:

$$\omega^{\beta}\wedge\eta_{\alpha\beta\rho} = \delta^{\beta}_{\rho}\,\eta_{\alpha\beta} + \delta^{\beta}_{\beta}\,\eta_{\rho\alpha} + \delta^{\beta}_{\alpha}\,\eta_{\beta\rho}$$

$$= \eta_{\alpha\rho} + 4\,\eta_{\rho\alpha} + \eta_{\alpha\rho} = -2\,\eta_{\alpha\rho} \quad ,$$

tem-se:

$$\mathbb{D}\eta_{\alpha} = \frac{1}{3}\left(\Theta^{\beta}\wedge\eta_{\alpha\beta} + 2\,\Theta^{\rho}\wedge\eta_{\alpha\rho}\right)$$

$$= \Theta^{\rho}\wedge\eta_{\alpha\rho} \quad . \qquad (3.115)$$

Introduzindo em (3.115) as componentes do tensor de torção, escreve-se:

$$\mathbb{D}\eta_{\alpha} = \tau_{\mu\nu}{}^{\rho}\,\omega^{\mu}\wedge\omega^{\nu}\wedge\eta_{\alpha\rho}$$

$$\underset{\text{[por (3.98c)]}}{=} \tau_{\mu\nu}{}^{\rho}\left(\delta^{\nu}_{\rho}\,\omega^{\mu}\wedge\eta_{\alpha} - \delta^{\nu}_{\alpha}\,\omega^{\mu}\wedge\eta_{\rho}\right)$$

$$\underset{\text{[(por (3.98d)]}}{=} (\tau_{\alpha\rho}{}^{\rho} - \tau_{\rho\alpha}{}^{\rho})\,\eta \quad ,$$

isto é,

$$\mathbb{D}\eta_{\alpha} = 2\,\tau_{\alpha\rho}{}^{\rho}\,\eta \quad . \qquad (3.116)$$

4- FORMA LAGRANGIANA.

Para se chegar às equações de campo usando o formalismo das formas diferenciais, usa-se tal como na parte A, o princípio variacional de Hamilton, em que a variação da ação se anula:

$$\delta \int \mathbb{L} = 0 \quad , \tag{3.117}$$

sendo que agora se agrega à densidade lagrangiana o elemento de 4-volume no espaço-tempo, surgindo a 4-forma lagrangiana $\mathbb{L}$. ($\mathbb{L} = \mathcal{L}\eta$). Da mesma maneira com que foi tratado este problema anteriormente, separa-se em duas partes: uma descrevendo as propriedades geométricas do espaço-tempo ($\mathbb{L}g$), que é a lagrangiana do campo gravitacional, e outra descrevendo um dado campo clássico Ψ_A (de ordem tensorial não especificada e onde a letra A indica o conjunto de índices tensoriais de Ψ) em interação com o campo gravitacional. Esta lagrangiana será denotada $\mathbb{L}c$. A lagrangiana total $\mathbb{L}$ se escreve, então:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_g + \mathbb{L}_c \quad . \tag{3.118}$$

O campo Ψ_A interage com o campo gravitacional via o acoplamento mínimo, que é feito agora através da derivada exterior covariante. Assim, a 4-forma lagrangiana de campo $\mathbb{L}_c$ depende (localmente) dos campos Ψ_A e suas derivadas $\mathbb{D}\Psi_A$, além da métrica $g_{\alpha\beta}$ e das 1-formas de base ω^α:

$$\mathbb{L}_c = \mathbb{L}_c \left(\Psi_A , \mathbb{D}\Psi_A , g_{\alpha\beta} , \omega^\alpha \right) , \tag{3.119}$$

o que permite variações de $\mathbb{L}_c$ com relação às variáveis Ψ_A, $\omega^\alpha{}_\beta$, $g_{\alpha\beta}$, ω^α. Observe-se que as variações $\delta g_{\alpha\beta}$ e $\delta\omega^\alpha$ não são independentes, pela própria definição de métrica. Portanto, é equivalente calcular (3.117) fazendo a variação de 4-forma $\mathbb{L}$ com relação aos seguintes conjuntos de variáveis: (Ψ_A, $\omega^\alpha{}_\beta$, ω^α) ou (Ψ_A, $\omega^\alpha{}_\beta$, $g_{\alpha\beta}$).

Considerando o primeiro grupo acima e designando por $\mathbb{L}^A$ a 4-forma decorrente da variação de $\mathbb{L}_c$ com relação a Ψ_A, tem-se:

$$\delta \mathbb{L}_c = \mathbb{L}^A \wedge \delta \Psi_A - \mathbb{t}_\alpha \wedge \delta \omega^\alpha + \mathbb{S}^\alpha{}_\beta \wedge \delta \omega^\alpha{}_\beta \quad , \qquad (3.120)$$

onde se definem as 3-formas $\mathbb{t}_\alpha$ e $\mathbb{S}^\alpha{}_\beta$. Estas quantidades serão interpretadas mais tarde.

Por outro lado, a lagrangiana gravitacional $\mathbb{L}_g$ deve ser a expressão em termos de formas diferenciais equivalente à lagrangiana de Hilbert (3.19). Assim, escreve-se:

$$\mathbb{L}_g = \frac{1}{16\pi} \eta_{\alpha\beta} \wedge \Omega^{\alpha\beta} \quad , \qquad (3.121)$$

pois, usando (3.92,98c,d), vem:

$$\mathbb{L}_g = \frac{1}{16\pi} \eta_{\alpha\beta} \wedge \left(\frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^{\beta\alpha} \omega^\mu \wedge \omega^\nu \right)$$

$$= \frac{1}{32\pi} R_{\mu\nu}{}^{\beta\alpha} \omega^\mu \wedge \left(\delta^\nu_\beta \eta_\alpha - \delta^\nu_\alpha \eta_\beta \right)$$

$$= \frac{1}{32\pi} \left(R_{\mu\beta}{}^{\beta\alpha} \delta^\mu_\alpha \eta + R_{\alpha\mu}{}^{\beta\alpha} \delta^\mu_\beta \eta \right)$$

$$= \frac{1}{16\pi} R_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} \eta$$

$$= \frac{1}{16\pi} R \eta \quad ,$$

justificando a escolha da 4-forma lagrangiana (3.121).

$\mathbb{L}_g$ é dependente da 1-forma de conexão e da métrica. Assim, suas variações com relação a estas variáveis resultam em:

(1) Com relação a $\omega^\alpha{}_\beta$:

$$16\pi \, \delta \mathbb{L}_{g \, (\omega^\alpha{}_\beta)} = \delta \left[\eta_\alpha{}^\beta \wedge \left(d\omega_\alpha{}^\beta + \omega^\alpha{}_\lambda \wedge \omega^\lambda{}_\beta \right) \right]$$

$$= \eta_\alpha{}^\beta \wedge \delta d\omega^\alpha{}_\beta + \eta_\alpha{}^\beta \wedge \delta\omega^\alpha{}_\lambda \wedge \omega^\lambda{}_\beta + \eta_\alpha{}^\beta \wedge \omega^\alpha{}_\lambda \wedge \delta\omega^\lambda{}_\beta$$

$$= \eta_\alpha{}^\beta \wedge d\,\delta\omega^\alpha{}_\beta - \eta_\alpha{}^\beta \wedge \omega^\lambda{}_\beta \wedge \delta\omega^\alpha{}_\lambda + \eta_\alpha{}^\beta \wedge \omega^\alpha{}_\lambda \wedge \delta\omega^\lambda{}_\beta$$

$$= \eta_\alpha{}^\beta \wedge d\,\delta\omega^\alpha{}_\beta + (\eta_\alpha{}^\beta \wedge \omega^\alpha{}_\lambda - \eta_\lambda{}^\alpha \wedge \omega^\beta{}_\alpha) \wedge \delta\omega^\lambda{}_\beta \quad .$$

Mas:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\eta_\lambda{}^\beta &= d\eta_\lambda{}^\beta - \omega^\alpha{}_\lambda \wedge \eta_\alpha{}^\beta + \omega^\beta{}_\alpha \wedge \eta_\lambda{}^\alpha \\ &= d\eta_\lambda{}^\beta - \eta_\alpha{}^\beta \wedge \omega^\alpha{}_\lambda + \eta_\lambda{}^\alpha \wedge \omega^\beta{}_\alpha \quad . \end{aligned}$$

Donde:

$$\eta_\alpha{}^\beta \wedge \omega^\alpha{}_\lambda - \eta_\lambda{}^\alpha \wedge \omega^\beta{}_\alpha = -(\mathbb{D}\eta_\lambda{}^\beta - d\eta_\lambda{}^\beta)$$

e portanto:

$$\begin{aligned} 16\pi\, \underset{(\omega^\alpha{}_\beta)}{\delta \mathbb{L}_g} &= \eta_\alpha{}^\beta \wedge d\,\delta\omega^\alpha{}_\beta - (\mathbb{D}\eta_\lambda{}^\beta - d\eta_\lambda{}^\beta) \wedge \delta\omega^\lambda{}_\beta \\ &= -\mathbb{D}\eta_\lambda{}^\beta \wedge \delta\omega^\lambda{}_\beta + d(\eta_\lambda{}^\beta \wedge \delta\omega^\lambda{}_\beta) \quad . \end{aligned} \qquad (3.122)$$

O último termo da equação acima é o que se chama uma forma exata. Ao se tomar a integração deste termo, pelo teorema de Gauss , o resultado dependerá das variações da conexão na hipersuperfície fronteira do 4-volume onde se calcula a ação. Nesta hipersuperfície, as variações são consideradas nulas e, portanto, o último termo não contribui para a integral de ação e será omitido nos cálculos que se seguirão. Assim,

$$16\pi\, \underset{(\omega^\alpha{}_\beta)}{\delta \mathbb{L}_g} = -\mathbb{D}\eta_\alpha{}^\beta \wedge \delta\omega^\alpha{}_\beta \quad . \qquad (3.123)$$

(2) Com relação a ω^α:

$$16\pi \, \underset{(\omega^\alpha)}{\delta \mathbb{L}_g} = \frac{1}{2}\, \delta\omega^\gamma \wedge \omega^\delta \eta_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} \wedge \Omega^\alpha{}_\beta + \frac{1}{2}\omega^\gamma \wedge \delta\omega^\delta \eta_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} \wedge \Omega^\alpha{}_\beta$$

$$= - \eta_{\alpha\beta\gamma} \wedge \Omega^{\alpha\beta} \wedge d\omega^\gamma \quad . \qquad (3.124)$$

Portanto, a variação total de $\mathbb{L}g$ se escreve:

$$16\pi \, \delta \mathbb{L}_g = \mathbb{C}_\alpha{}^\beta \wedge \delta\omega^\alpha{}_\beta - 2\, \mathbb{G}_\alpha \wedge \delta\omega^\alpha \quad , \qquad (3.125)$$

onde se definem as formas

$$\mathbb{C}_\alpha{}^\beta = - \mathbb{D}\, \eta_\alpha{}^\beta \qquad (3.125a)$$

$$\mathbb{G}_\alpha = \frac{1}{2}\, \eta_{\alpha\mu\nu} \wedge \Omega^{\mu\nu} \quad . \qquad (3.125b)$$

EQUAÇÕES DE CAMPO.

A variação da ação total é, então:

$$0 = \int \left[\mathbb{L}^A \wedge \delta\Psi_A - \left(\frac{1}{8\pi}\, \mathbb{G}_\alpha + \mathbb{t}_\alpha \right) \wedge \delta\omega^\alpha + \left(\mathbb{S}^\alpha{}_\beta + \frac{1}{16\pi}\, \mathbb{C}^\alpha{}_\beta \right) \wedge \delta\omega^\alpha{}_\beta \right] , \qquad (3.126)$$

conduzindo às equações:

$$\mathbb{L}^A = 0 \qquad (3.127a)$$

$$\mathbb{G}_\alpha = - 8\pi\, \mathbb{t}_\alpha \qquad (3.127b)$$

$$\mathbb{C}^\alpha{}_\beta = - 16\pi\, \mathbb{S}^\alpha{}_\beta \quad , \qquad (3.127c)$$

que formam as equações de campo em termos de formas diferenciais.

A quantidade $\mathbb{S}^\alpha{}_\beta$ foi relacionada com a variação da lagrangiana de campos devido a uma variação na conexão afim do espaço-tempo. Desta forma, identifica-se $\mathbb{S}^\alpha{}_\beta$ como a densidade de spin. Por outro lado, a 3-forma $\mathbb{t}_\alpha$ foi introduzida de modo a dar conta da variação de $\mathbb{L}c$ com relação a variação da métrica. Assim, $\mathbb{t}_\alpha$ representa uma 3-forma com valor vetorial de energia-momentum canônica.

$\mathbb{S}^\alpha{}_\beta$ é antissimétrica, pois por (3.125a, 127c):

$$\mathbb{D}\, \eta_{\alpha\beta} = 16\pi\, \mathbb{S}_{\alpha\beta} \quad ;$$

logo,

$$\mathbb{D}\eta_{(\alpha\beta)} = 16\pi\, \$_{(\alpha\beta)} \quad .$$

Por (3.114) e a propriedade de antissimetria de torção modificada, $\mathbb{D}\eta_{(\alpha\beta)} = 0$ e então

$$\$_{(\alpha\beta)} = 0 \quad . \tag{3.128}$$

Para se obter as equações de campo de Einstein- Cartan na forma de componentes tensoriais a partir de (3.127), basta usar (3.125) e a notação

$$\mathbb{t}_\alpha = \eta_\beta \; t_\alpha{}^\beta \tag{3.129}$$

$$\$_{\alpha\beta} = \eta_\rho \, S_{\alpha\beta}{}^\rho \quad . \tag{3.130}$$

(1) Primeira equação de campo:

$$\frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\beta\gamma} \wedge \Omega^{\beta\gamma} = -8\pi\, \mathbb{t}_\alpha = -8\pi\, \eta_\beta\, t_\alpha{}^\beta$$

ou, usando (3.92):

$$-8\pi\, \eta_\beta\, t_\alpha{}^\beta = \frac{1}{4}\, R_{\rho\sigma}{}^{\gamma\beta}\, \eta_{\alpha\beta\gamma} \wedge \omega^\rho \wedge \omega^\sigma$$

e como:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} \wedge \omega^\rho \wedge \omega^\sigma = -[\delta^\rho_\gamma\,(\delta^\sigma_\beta\,\eta_\alpha - \delta^\sigma_\alpha\,\eta_\beta) + \delta^\rho_\beta\,(\delta^\sigma_\alpha\,\eta_\gamma - \delta^\sigma_\gamma\,\eta_\alpha) +$$

$$+ \delta^\rho_\alpha(\delta^\sigma_\gamma\,\eta_\beta - \delta^\sigma_\beta\,\eta_\gamma)] \;,$$

vem:

$$-8\pi\, \eta_\beta\, t_\alpha{}^\beta = -\frac{1}{4}\,(R_{\rho\sigma}{}^{\rho\sigma}\,\eta_\alpha - R_{\rho\alpha}{}^{\rho\beta}\,\eta_\beta + R_{\rho\alpha}{}^{\gamma\rho}\,\eta_\gamma - R_{\rho\sigma}{}^{\sigma\rho}\,\eta_\alpha +$$

$$+ R_{\alpha\sigma}{}^{\sigma\beta}\,\eta_\beta - R_{\alpha\sigma}{}^{\gamma\sigma}\,\eta_\gamma\,)$$

$$= -\,(R_\alpha{}^\beta\,\eta_\beta - \frac{1}{2}\, R\,\eta_\alpha\,)$$

ou seja,
$$R_\alpha{}^\beta - \frac{1}{2}\, R\,\delta_\alpha{}^\beta = 8\pi\, t_\alpha{}^\beta$$

que é exatamente a equação (3.57).

(2) Segunda equação de campo.

$$\mathbb{D}\eta_{\alpha\beta} = 16\pi\, \mathbb{S}_{\alpha\beta}$$

ou

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\rho}\,\eta_{\rho} = 8\pi\, S_{\alpha\beta}{}^{\rho}\,\eta_{\rho} \quad ,$$

isto é,

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\rho} = 8\pi\, S_{\alpha\beta}{}^{\rho}$$

e recobramos a equação (3.58).

I.4 - Leis de Conservação em Einstein-Cartan.

Em teorias de campo deduzidas a partir de princípios variacionais, um dos principais problemas que se enfrenta é o de como se definir energia. Normalmente, sob este ponto de vista, introduz-se o chamado tensor canônico de energia-momentum, através do teorema de Noether, como uma quantidade a ser globalmente conservada*. O nome "canônico", neste contexto, significa que a definição do tensor não envolve o tensor métrico. Este não é o caso do tensor simétrico de energia-momentum $T^{\alpha\beta}$, introduzido em (3.10), ao se variar a lagrangiana com relação à métrica.

O objetivo deste parágrafo é definir, na teoria de Einstein-Cartan, quais as quantidades a serem conservadas e estabelecer suas leis de conservação.

TEOREMA DE NOETHER E IDENTIDADES DE ROSENFELD.

Voltando a usar o formalismo tensorial de I.3.A, considere-se a integral de ação para os campos (3.5):

$$I_c = \int \mathcal{L}_c(Q\,,\partial Q)\, d^4x \quad , \qquad (4.1)$$

*Ver, p.ex., Galvão (1977).

onde Q é qualquer uma das variáveis Ψ, g, τ. Impõe-se que esta integral seja invariante segundo transformações gerais de coordenadas. Seja, portanto, uma transformação infinitesimal de coordenadas inversível:

$$x^{\alpha} \longrightarrow x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \delta x^{\alpha} \quad . \tag{4.2}$$

Seja esta transformação descrita em termos de um vetor ξ:

$$\delta x^{\alpha} = x'^{\alpha} - x^{\alpha} = \xi^{\alpha}(x) \quad . \tag{4.3}$$

A variação local das variáveis Q (isto é, tanto em forma funcional quanto em argumentos) será denotada por:

$$\bar{\delta} Q \equiv Q'(x') - Q(x) = \xi^{\alpha}{}_{,\beta} f_{\alpha}{}^{\beta} Q \quad , \tag{4.4}$$

com $f_{\alpha}{}^{\beta}$ definidos em (2.21). Por outro lado, uma variação somente na forma funcional de Q será:

$$\begin{aligned} \delta Q &\equiv Q'(x) - Q(x) \\ &= Q'(x') - Q(x) - [Q'(x') - Q'(x)] \\ &= \bar{\delta} Q - \xi^{\alpha} Q_{,\alpha} \\ &= \xi^{\alpha}{}_{,\beta} f_{\alpha}{}^{\beta} Q - \xi^{\alpha} Q_{,\alpha} \quad . \end{aligned} \tag{4.5}$$

A invariância da integral de ação impõe que:

$$\bar{\delta} I_c \equiv 0 \quad . \tag{4.6}$$

Por outro lado,

$$\bar{\delta} I_c = I[Q', \Omega'] - I[Q, \Omega] \quad , \tag{4.7}$$

onde Ω é a região de integração. Reescrevendo (4.7), vem:

$$\begin{aligned} \bar{\delta} I_c = I[Q', \Omega'] - I[Q, \Omega'] + \\ + I[Q, \Omega'] - I[Q, \Omega] \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega'} (\delta \mathcal{L}_c)\, d^4x' + \int_{\Omega'} \mathcal{L}_c\, (Q(x'))\, d^4x' - \int_{\Omega} \mathcal{L}_c\, (Q(x))\, d^4x \tag{4.8}$$

Sendo $\mathcal{J}$ o jacobiano da transformação de coordenadas, isto é,

$$d^4x' = \mathcal{J}\, d^4x \quad ,$$

por (4.3), pode-se escrever $\mathcal{J}$, em primeira ordem, como:

$$\mathcal{J} \cong 1 + \xi^{\rho}{}_{,\rho} \quad ,$$

de modo que

$$d^4x' = (1 + \xi^{\rho}{}_{,\rho})\, d^4x \quad .$$

Assim, a primeira integral de (4.8) passa a ser escrita:

$$\int_{\Omega'} (\delta \mathcal{L}_c)\, d^4x' \cong \int_{\Omega} (\delta \mathcal{L}_c)(1 + \xi^{\rho}{}_{,\rho})\, d^4x \cong \int_{\Omega} (\delta \mathcal{L}_c)\, d^4x \quad . \tag{4.9}$$

Quanto à segunda integral de (4.8), tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} \mathcal{L}_c\, (Q(x'))\, d^4x' &\cong \int_{\Omega} \mathcal{L}_c\, (Q(x'))(1 + \xi^{\rho}{}_{,\rho})\, d^4x \\
&\cong \int_{\Omega} \mathcal{L}_c\, (Q(x^{\alpha} + \xi^{\alpha}))\, (1 + \xi^{\rho}{}_{,\rho})\, d^4x \\
&\cong \int_{\Omega} \Big[\mathcal{L}_c\, (Q(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial x^{\alpha}}\, \xi^{\alpha}\Big]\, (1 + \xi^{\rho}{}_{,\rho})\, d^4x \\
&\cong \int_{\Omega} [\mathcal{L}_c\, (Q(x)) + (\mathcal{L}_c\, \xi^{\rho})_{,\rho}]\, d^4x
\end{aligned}$$

de modo que (4.8) se torna:

$$\tilde{\delta} I_c = \int_{\Omega} [\delta \mathcal{L}_c + (\mathcal{L}_c\, \xi^{\rho})_{,\rho}]\, d^4x \equiv 0 \quad , \tag{4.10}$$

devido a (4.6).

Além disso, como:

$$\delta \mathcal{L}_c = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} \delta Q_{,\rho} \tag{4.11}$$

por (4.6), tem-se:

$$\bar{\delta} I_c = \int [\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q} \xi^{\alpha}{}_{,\beta} f_{\alpha}{}^{\beta} Q - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} \xi^{\alpha} Q_{,\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} (\delta Q)_{,\rho} + $$

$$+ \mathcal{L}_{c,\alpha} \xi^{\alpha} + \mathcal{L}_c \xi^{\alpha}{}_{,\alpha}] d^4x$$

$$= \int [\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q} \xi^{\alpha}{}_{,\beta} f_{\alpha}{}^{\beta} Q - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q} \xi^{\alpha} Q_{,\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} \xi^{\alpha}{}_{,\beta\rho} f_{\alpha}{}^{\beta} Q + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} \xi^{\alpha}{}_{,\beta} (f_{\alpha}{}^{\beta} Q)_{,\rho} +$$

$$- \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} \xi^{\alpha}{}_{,\rho} Q_{,\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} \xi^{\alpha} Q_{,\alpha\rho} + \mathcal{L}_{c,\alpha} \xi^{\alpha} + \mathcal{L}_c \xi^{\alpha}{}_{,\alpha}] d^4x .$$

É necessário supor que seja válida a equação de Euler-Lagrange para Q:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q} = \partial_{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} \right) . \tag{4.12}$$

Então,

$$\bar{\delta} I_c = \int \{ [\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q} f_{\alpha}{}^{\beta} Q + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} (f_{\alpha}{}^{\beta} Q)_{,\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} Q_{,\alpha} + \mathcal{L}_c \delta_{\alpha}{}^{\beta}] \xi^{\alpha}{}_{,\beta} +$$

$$+ (\mathcal{L}_c \delta_{\alpha}{}^{\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} Q_{,\alpha})_{,\rho} \xi^{\alpha} + \frac{1}{2} (\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} f_{\alpha}{}^{\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} f_{\alpha}{}^{\rho}) Q \xi^{\alpha}{}_{,\beta\rho} \} d^4x = 0$$

Como ξ^{α} e suas derivadas são arbitrárias, seus coeficientes anulam-se separadamente:

$$(\mathcal{L}_c \delta_{\alpha}{}^{\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} Q_{,\alpha})_{,\rho} \equiv 0 , \tag{4.13a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q} f_{\alpha}{}^{\beta} Q + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} (f_{\alpha}{}^{\beta} Q)_{,\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} Q_{,\alpha} + \mathcal{L}_c \delta_{\alpha}{}^{\beta} \equiv 0 \tag{4.13b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} f_{\alpha}{}^{\beta} Q + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} f_{\alpha}{}^{\rho} Q = \mathcal{U}_{\alpha}{}^{(\beta\rho)} \equiv 0 , \tag{4.13c}$$

onde se definiu:

$$\mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} f_\alpha{}^\beta Q \tag{4.14}$$

e de onde vê-se que:

$$\mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho}{}_{,\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} (f_\alpha{}^\beta Q)_{,\rho} + \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} \right) f_\alpha{}^\beta Q \quad ,$$

ou seja:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} (f_\alpha{}^\beta Q)_{,\rho} = \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho}{}_{,\rho} - \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} \right) f_\alpha{}^\beta Q \quad ,$$

de maneira que (4.13b) torna-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q} f_\alpha{}^\beta Q + \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho}{}_{,\rho} - \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} \right) f_\alpha{}^\beta Q - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} Q_{,\alpha} + \mathcal{L}_c \, \delta_\alpha{}^\beta \equiv 0$$

ou:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q + \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho}{}_{,\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} Q_{,\alpha} + \mathcal{L}_c \, \delta_\alpha{}^\beta \equiv 0 \quad . \tag{4.15}$$

Esta equação será chamada de <u>Primeira identidade de Rosenfeld</u>, enquanto que (4.13c) será a <u>Segunda identidade de Rosenfeld</u> (Rosenfeld 1940):

$$\mathcal{U}_\alpha{}^{(\beta\rho)} \equiv 0 \quad . \tag{4.16}$$

Quanto a (4.13a), esta equação não traz nenhuma informação adicional sobre os campos em questão, pois seu lado esquerdo é identicamente nulo:

$$\left(\mathcal{L}_c \, \delta_\alpha{}^\rho - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} Q_{,\alpha} \right)_{,\rho} = \mathcal{L}_{c,\alpha} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} Q_{,\alpha} \right)_{,\rho}$$

sendo

$$\mathcal{L}_{c,\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q} Q_{,\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} Q_{,\rho\alpha} \quad , \tag{4.17}$$

e

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} Q_{,\alpha} \right)_{,\rho} = \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} \right) Q_{,\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} Q_{,\alpha\rho} \quad ,$$

então (4.13a) fica escrita na forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q} Q_{,\alpha} - \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} \right) Q_{,\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} Q_{,\rho\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} Q_{,\alpha\rho} \equiv 0 \quad ,$$

pois os dois últimos termos cancelam-se trivialmente e os dois primeiros são anulados,já que se considera válida a equação de movimento (4.12).

Pode-se obter, ainda, uma terceira identidade ao se diferenciar (4.15):

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q\right)_{,\beta} + \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho}{}_{,\rho\beta} - \partial_\beta\left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}}\right) Q_{,\alpha} + \\ - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} Q_{,\alpha\beta} + \mathcal{L}_{c,\beta}\, \delta_\alpha{}^\beta \equiv 0 \quad . \tag{4.18}$$

Ocorre que:

$$\mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho}{}_{,\rho\beta} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho}{}_{,\rho\beta} + \mathcal{U}_\alpha{}^{\rho\beta}{}_{,\rho\beta}\right)$$

$$= \mathcal{U}_\alpha{}^{(\beta\rho)}{}_{,\rho\beta} \equiv 0$$

por (4.16). Além disso, por (4.17), tem-se:

$$\mathcal{L}_{c,\alpha} - \partial_\beta\left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}}\right) Q_{,\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} Q_{,\alpha\beta} =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q} Q_{,\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} Q_{,\beta\alpha} - \partial_\beta\left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}}\right) Q_{,\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} Q_{,\alpha\beta}$$

$$= \left[\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q} - \partial_\beta\left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}}\right)\right] Q_{,\alpha} = \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} Q_{,\alpha} \quad .$$

Substituindo estes resultados em (4.18), vem:

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q\right)_{,\beta} + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} Q_{,\alpha} \equiv 0 \quad , \tag{4.19}$$

sendo assim obtida a <u>terceira identidade de Rosenfeld</u>.

Pela maneira como foram deduzidas,as três identidades de Rosenfeld são válidas para qualquer variedade diferenciável. No espaço-tempo descrito em I.2, podem ser definidas derivadas - covariantes e estas serão introduzidas nas identidades de Rosenfeld. Para a primeira, tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} Q_{,\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} \nabla_\alpha Q - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} \Gamma^{\rho\cdot}_{\alpha\lambda} f_\rho{}^\lambda Q$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} \nabla_\alpha Q - \Gamma^\rho_{\alpha\lambda} \mathcal{U}_\rho{}^{\lambda\beta} \qquad . \tag{4.20}$$

Além disso, como $\mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho}$ é uma densidade tensorial,

$$\nabla_\rho \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} = \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho}{}_{,\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\alpha} \mathcal{U}_\lambda{}^{\beta\rho} + \Gamma^\beta_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\lambda\rho} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\lambda} - \Gamma^\lambda_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} \tag{4.21}$$

donde, juntando (4.20,21):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} Q_{,\alpha} - \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho}{}_{,\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} \nabla_\alpha Q - \Gamma^\rho_{\alpha\lambda} \mathcal{U}_\rho{}^{\lambda\beta} - \nabla_\rho \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\alpha} \mathcal{U}_\lambda{}^{\beta\rho} +$$

$$+ \Gamma^\beta_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\lambda\rho} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\lambda} - \Gamma^\lambda_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} \nabla_\alpha Q - \nabla_\rho \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} - \left(\Gamma^\rho_{\alpha\lambda} \mathcal{U}_\rho{}^{\lambda\beta} + \Gamma^\lambda_{\rho\alpha} \mathcal{U}_\lambda{}^{\beta\rho}\right) - \left(\Gamma^\lambda_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} - \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\lambda}\right) + \Gamma^\beta_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\lambda\rho} . \tag{4.22}$$

Mas

$$\Gamma^\rho_{\alpha\lambda} \mathcal{U}_\rho{}^{\lambda\beta} + \Gamma^\lambda_{\rho\alpha} \mathcal{U}_\lambda{}^{\beta\rho} = \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \mathcal{U}_\lambda{}^{\rho\beta} + \Gamma^\lambda_{\rho\alpha} \mathcal{U}_\lambda{}^{\beta\rho} = \Gamma^\lambda_{\rho\alpha} \mathcal{U}_\lambda{}^{\beta\rho} - \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \mathcal{U}_\lambda{}^{\beta\rho} =$$

$$= \left(\Gamma^\lambda_{\rho\alpha} - \Gamma^\lambda_{\alpha\rho}\right) \mathcal{U}_\lambda{}^{\beta\rho} = 2\, \mathcal{T}_{\rho\alpha}{}^\lambda \mathcal{U}_\lambda{}^{\beta\rho} \qquad ; \tag{4.23}$$

$$\Gamma^\lambda_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} - \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\lambda} = \Gamma^\lambda_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} - \Gamma^\lambda_{\lambda\rho} \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} =$$

$$= \left(\Gamma^\lambda_{\rho\lambda} - \Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\right) \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} = 2\, \mathcal{T}_{\rho\lambda}{}^\lambda \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} \qquad ; \tag{4.24}$$

$$\Gamma^\beta_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\beta_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\lambda\rho} + \Gamma^\beta_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\lambda\rho}\right) = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\beta_{\lambda\rho} \mathcal{U}_\alpha{}^{\rho\lambda} + \Gamma^\beta_{\rho\lambda} \mathcal{U}_\alpha{}^{\lambda\rho}\right)$$

$$= \mathcal{T}_{\lambda\rho}{}^\beta \mathcal{U}_\alpha{}^{\rho\lambda} = - \mathcal{T}_{\rho\lambda}{}^\beta \mathcal{U}_\alpha{}^{\rho\lambda} \qquad . \tag{4.25}$$

Levando (4.23,24,25) em (4.22), tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} Q_{,\alpha} - \mathcal{M}_\alpha{}^{\beta\rho}{}_{,\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} \nabla_\alpha Q - (\nabla_\rho \mathcal{M}_\alpha{}^{\beta\rho} + 2\, \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda \mathcal{M}_\alpha{}^{\beta\rho}) - 2\, \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda \mathcal{M}_\lambda{}^{\beta\rho} +$$

$$- \tau_{\rho\lambda}{}^\beta \mathcal{M}_\alpha{}^{\rho\lambda}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} \nabla_\alpha Q - (\overset{*}{\nabla}_\rho \mathcal{M}_\alpha{}^{\beta\rho} + 2\, \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda \mathcal{M}_\lambda{}^{\beta\rho}) - \tau_{\rho\lambda}{}^\beta \mathcal{M}_\alpha{}^{\rho\lambda}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} \nabla_\alpha Q - \overset{+}{\nabla}_\rho \mathcal{M}_\alpha{}^{\beta\rho} - \tau_{\rho\lambda}{}^\beta \mathcal{M}_\alpha{}^{\rho\lambda} \quad , \tag{4.26}$$

onde usou-se a notação

$$\overset{*}{\nabla}_\rho = \nabla_\rho + 2\, \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda \tag{4.27}$$

e

$$\overset{+}{\nabla}_\rho \mathcal{M}_\alpha{}^{\beta\rho} = \overset{*}{\nabla}_\rho \mathcal{M}_\alpha{}^{\beta\rho} + 2\, \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda \mathcal{M}_\lambda{}^{\beta\rho} \ . \tag{4.28}$$

Portanto, a primeira identidade de Rosenfeld fica reescrita na forma:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} \nabla_\alpha Q - \mathcal{L}_c\, \delta_\alpha{}^\beta - \overset{+}{\nabla}_\rho \mathcal{M}_\alpha{}^{\beta\rho} - \tau_{\rho\lambda}{}^\beta \mathcal{M}_\alpha{}^{\rho\lambda} \ . \tag{4.29}$$

A segunda identidade permanece inalterada:

$$\mathcal{M}_\alpha{}^{(\beta\rho)} \equiv 0 \ .$$

E, para a terceira identidade, tem-se:

$$\nabla_\beta \left(\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q \right) = \left(\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q \right)_{,\beta} - \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} f_\lambda{}^\beta Q +$$

$$+ \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} \Gamma^\beta_{\beta\lambda} f_\alpha{}^\lambda Q - \Gamma^\rho_{\beta\rho} f_\alpha{}^\beta Q \tag{4.30}$$

e também:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} \nabla_\alpha Q = \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} \left(Q_{,\alpha} + \Gamma^\rho_{\alpha\beta} f_\rho{}^\beta Q \right) = \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} Q_{,\alpha} + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} \Gamma^\rho_{\alpha\beta} f_\rho{}^\beta Q \ . \tag{4.31}$$

Assim, por (4.19), usando (4.30,31):

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q \right)_{,\beta} + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} Q_{,\alpha} =$$

$$= \nabla_\beta \left(\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q \right) + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} \left(\Gamma^\rho_{\beta\alpha} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \right) f_\rho{}^\beta Q + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} \left(\Gamma^\rho_{\beta\rho} f_\alpha{}^\beta - \Gamma^\beta_{\beta\rho} f_\alpha{}^\rho \right) Q + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} \nabla_\alpha Q$$

$$= \nabla_\beta\left(\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q\right) + 2\, \mathcal{T}_{\beta\rho}{}^\rho \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q + 2\, \mathcal{T}_{\beta\alpha}{}^\rho \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\rho{}^\beta Q + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} \nabla_\alpha Q$$

$$= \overset{*}{\nabla}_\beta\left(\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q\right) + 2\, \mathcal{T}_{\beta\alpha}{}^\rho \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\rho{}^\beta Q + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} \nabla_\alpha Q$$

$$= \overset{+}{\nabla}_\beta\left(\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q\right) + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} \nabla_\alpha Q \equiv 0 \quad . \tag{4.32}$$

Em resumo, as três identidades de Rosenfeld, em termos das derivadas covariantes dos campos Q se tornam:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} \nabla_\alpha Q - \mathcal{L}_c\, \delta_\alpha{}^\beta - \overset{+}{\nabla}_\rho\, \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} - \mathcal{T}_{\rho\lambda}{}^\beta\, \mathcal{U}_\alpha{}^{\lambda\rho} \tag{4.33a}$$

$$\mathcal{U}_\alpha{}^{(\beta\rho)} \equiv 0 \tag{4.33b}$$

$$\overset{+}{\nabla}_\beta\left(\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q\right) + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} \nabla_\alpha Q \equiv 0 \quad . \tag{4.33c}$$

IDENTIDADES PARA A DENSIDADE LAGRANGIANA DE CAMPOS.

A partir das identidades de Rosenfeld escritas na forma (4.33) acima, serão obtidas expressões,envolvendo a densidade lagrangiana de campos $\mathcal{L}_c$, que, segundo o teorema de Noether, representam quantidades a serem conservadas no espaço-tempo da teoria de Einstein-Cartan. Para isso, Q é substituído nas equações(4.33) por Ψ, g e $\mathcal{T}$ sucessivamente. Deve ser lembrado que estes campos estão sujeitos às seguintes condições:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta \Psi} = 0 \tag{4.34a}$$

$$\nabla g = 0 \tag{4.34b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial(\partial \mathcal{T})} = 0 \tag{4.34c}$$

(4.34a) representa, como se sabe, a equação de movimento ("Euler-Lagrange") para os campos Ψ, enquanto que (4.34b) é a condição pa ra espaço-tempo métrico. (4.34c) surge devido ao fato de que, através do acoplamento mínimo, $\mathcal{L}_c$ dependerá da conexão afim de uma variedade de Riemann-Cartan, que inclui termos de torção, mas não de suas derivadas.

Seja a primeira identidade (4.33a):

$$\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} \nabla_\alpha Q - \mathcal{L}_c \, \delta_\alpha{}^\beta - \overset{*}{\nabla}_\rho \mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho} - 2 \mathcal{T}_{\rho\alpha}{}^\lambda \mathcal{U}_\lambda{}^{\beta\rho} - \mathcal{T}_{\rho\lambda}{}^\beta \mathcal{U}_\alpha{}^{\rho\lambda}$$

ou, pela definição de $\mathcal{U}_\alpha{}^{\beta\rho}$, (4.14),

$$\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta Q} f_\alpha{}^\beta Q \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\beta}} \nabla_\alpha Q - \mathcal{L}_c \, \delta_\alpha{}^\beta - \overset{*}{\nabla}_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} f_\alpha{}^\beta Q\right) - 2 \mathcal{T}_{\rho\alpha}{}^\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\rho}} f_\lambda{}^\beta Q\right) + $$
$$- \mathcal{T}_{\rho\lambda}{}^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\lambda}} f_\alpha{}^\rho Q\right) \quad . \tag{4.35}$$

Substituindo Q por Ψ, g e $\mathcal{T}$, obtém-se, usando as condições (4.34):

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\beta}} \nabla_\alpha \Psi - \mathcal{L}_c \, \delta_\alpha{}^\beta - \overset{*}{\nabla}_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\rho}} f_\alpha{}^\beta \Psi\right) - 2 \mathcal{T}_{\rho\alpha}{}^\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\rho}} f_\lambda{}^\beta \Psi\right) - \mathcal{T}_{\rho\lambda}{}^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\lambda}} f_\alpha{}^\rho \Psi\right) \tag{4.36a}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta g} f_\alpha{}^\beta g = - \mathcal{L}_c \, \delta_\alpha{}^\beta - \overset{*}{\nabla}_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f_\alpha{}^\beta g\right) - 2 \mathcal{T}_{\rho\alpha}{}^\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f_\lambda{}^\beta g\right) - \mathcal{T}_{\rho\lambda}{}^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\lambda}} f_\alpha{}^\rho g\right) \tag{4.36b}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta \mathcal{T}} f_\alpha{}^\beta \mathcal{T} = - \mathcal{L}_c \, \delta_\alpha{}^\beta \quad . \tag{4.36c}$$

Acontece que

$$\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta g} f_\alpha{}^\beta g = \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta g_{\rho\sigma}} f_\alpha{}^{\beta\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \, g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} \, T^{\rho\sigma} \left(\delta_\alpha^\mu \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\nu + \delta_\alpha^\nu \delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\mu\right) g_{\mu\nu}$$
$$= - \sqrt{-g} \; T_\alpha{}^\beta \tag{4.37}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta \mathcal{T}} f_\alpha{}^\beta \mathcal{T} = \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta \mathcal{T}_{\rho\sigma}{}^\gamma} f_\alpha{}^{\beta\mu\nu}{}_{\lambda\rho\sigma}{}^\gamma \, \mathcal{T}_{\mu\nu}{}^\lambda$$

$$= - \sqrt{-g} \, \mu_\gamma{}^{\sigma\rho} \left(\delta_\alpha^\mu \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\nu \delta_\lambda^\gamma + \delta_\alpha^\nu \delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\mu \delta_\lambda^\gamma - \delta_\alpha^\gamma \delta_\lambda^\beta \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu\right) \mathcal{T}_{\mu\nu}{}^\lambda$$

$$= - \sqrt{-g} \left(2 \mu_\gamma{}^{\beta\rho} \mathcal{T}_{\rho\alpha}{}^\gamma + \mu_\alpha{}^{\rho\sigma} \mathcal{T}_{\rho\sigma}{}^\beta\right) \quad . \tag{4.38}$$

Levando (4.37,38) em (4.36), vem:

$$0 = \mathcal{L}_c \delta_\alpha{}^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\beta}} \nabla_\alpha \Psi + \overset{*}{\nabla}_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\rho}} f_\alpha{}^\beta \Psi \right) + 2 \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\rho}} f_\lambda{}^\beta \Psi \right) + \tau_{\rho\lambda}{}^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\lambda}} f_\alpha{}^\rho \Psi \right) \tag{4.39a}$$

$$\sqrt{-g}\, T_\alpha{}^\beta = \mathcal{L}_c \delta_\alpha{}^\beta + \overset{*}{\nabla}_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f_\alpha{}^\beta g \right) + 2 \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f_\lambda{}^\beta g \right) + \tau_{\rho\lambda}{}^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\lambda}} f_\alpha{}^\rho g \right) \tag{4.39b}$$

$$\sqrt{-g} \left(2 \mu_\gamma{}^{\beta\rho} \tau_{\rho\alpha}{}^\gamma + \mu_\alpha{}^{\rho\sigma} \tau_{\rho\sigma}{}^\beta \right) = \mathcal{L}_c \delta_\alpha{}^\beta \quad . \tag{4.39c}$$

Somando membro a membro as equações (4.39), encontra-se:

$$\sqrt{-g} \left(T_\alpha{}^\beta + 2 \mu_\gamma{}^{\beta\rho} \tau_{\rho\alpha}{}^\gamma + \mu_\alpha{}^{\rho\sigma} \tau_{\rho\sigma}{}^\beta \right) =$$

$$= \mathcal{L}_c \delta_\alpha{}^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\beta}} \nabla_\alpha \Psi + \overset{*}{\nabla}_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\rho}} f_\alpha{}^\beta \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f_\alpha{}^\beta g \right) +$$

$$+ 2 \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\rho}} f_\lambda{}^\beta \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f_\lambda{}^\beta g \right) + \tau_{\rho\lambda}{}^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\lambda}} f_\alpha{}^\rho \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\lambda}} f_\alpha{}^\rho g \right) \tag{4.40}$$

e isto implica que:

$$\sqrt{-g}\, T_\alpha{}^\beta = \mathcal{L}_c \delta_\alpha{}^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\beta}} \nabla_\alpha \Psi + \overset{*}{\nabla}_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\rho}} f_\alpha{}^\beta \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f_\alpha{}^\beta g \right) \tag{4.41a}$$

$$\sqrt{-g}\, \mu_\gamma{}^{\beta\rho} \tau_{\rho\alpha}{}^\gamma = \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\rho}} f_\lambda{}^\beta \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f_\lambda{}^\beta g \right) \tag{4.41b}$$

$$\sqrt{-g}\, \mu_\alpha{}^{\rho\sigma} \tau_{\rho\sigma}{}^\beta = \tau_{\rho\lambda}{}^\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\lambda}} f_\alpha{}^\rho \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\lambda}} f_\alpha{}^\rho g \right) \quad . \tag{4.41c}$$

(4.41) pode ser reescrita como:

$$\sqrt{-g}\, T_\alpha{}^\beta = \mathcal{L}_c \delta_\alpha{}^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\beta}} \nabla_\alpha \Psi + \sqrt{-g}\, \overset{*}{\nabla}_\rho \mu_\alpha{}^{\beta\rho}$$

ou seja

$$\sqrt{-g} \left(T_\alpha{}^\beta - \overset{*}{\nabla}_\rho \mu_\alpha{}^{\beta\rho} \right) = \mathcal{L}_c \delta_\alpha{}^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\beta}} \nabla_\alpha \Psi \quad . \tag{4.42}$$

Observe-se que o lado direito da expressão acima reproduz uma generalização da definição dinâmica do tensor canônico de energia -

momentum via teorema de Noether em relatividade especial. Isto justifica, portanto, a definição introduzida em (3.16b) e escreve-se:

$$\sqrt{-g}\; t_\alpha{}^\beta = \mathcal{L}_c\, \delta_\alpha{}^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\beta}} \nabla_\alpha \Psi \quad . \tag{4.43}$$

Além disso, (4.41b,c) levam ambas à expressão seguinte:

$$\sqrt{-g}\; \mu_\alpha{}^{\rho\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\lambda}} f_\alpha{}^\rho \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\lambda}} f_\alpha{}^\rho g \quad . \tag{4.44}$$

Como os dois termos do lado direito de (4.44) são da forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial Q_{,\lambda}} f_\alpha{}^\rho Q = \mathcal{U}_\alpha{}^{\rho\lambda}$$

a segunda identidade de Rosenfeld, $\mathcal{U}_\alpha{}^{(\rho\lambda)} = 0$, indica antissimetria nos índices superiores de $\mu_\alpha{}^{\beta\lambda}$, também requerida por sua definição dinâmica $\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta \mathcal{T}_{\lambda\rho}{}^\alpha}$ (pois $\mathcal{T}_{(\lambda\rho)}{}^\alpha = 0$).

A fórmula (3.15) relaciona o tensor de momentum angular de spin com $\mu_\alpha{}^{\rho\lambda}$:

$$S^{\alpha\beta\rho} = \mu^{[\beta\alpha]\rho} \quad .$$

Assim, por (4.44),

$$\sqrt{-g}\; S^{\alpha\beta\rho} = \sqrt{-g}\; \mu^{[\beta\alpha]\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \Psi_{,\rho}} f^{[\beta\alpha]} \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f^{[\beta\alpha]} g \quad . \tag{4.45}$$

Desenvolvendo o último termo, tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f_\alpha{}^\beta g = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{\lambda\sigma,\rho}} f_\alpha{}^{\beta\mu\nu}{}_{\lambda\sigma}\, g_{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{\lambda\sigma,\rho}} \left(\delta_\alpha^\mu \delta_\lambda^\beta \delta_\sigma^\nu + \delta_\alpha^\nu \delta_\sigma^\beta \delta_\lambda^\mu\right) g_{\mu\nu}$$

$$= -\left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{\beta\sigma,\rho}} g_{\alpha\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{\lambda\beta,\rho}} g_{\lambda\alpha}\right) = -2\, \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{\beta\sigma,\rho}} g_{\alpha\sigma} \quad .$$

Portanto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f^{\alpha\beta} g = -2\, \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{\beta\sigma,\rho}} \delta^\alpha{}_\sigma = -2\, \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{\beta\alpha,\rho}}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f^{\beta\alpha} g = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{\alpha\beta,\rho}} \quad .$$

Logo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial g_{,\rho}} f^{[\beta\alpha]} g = 0$$

pela simetria de $g_{\alpha\beta}$. Usando este resultado em (4.45), vem:

$$\sqrt{-g}\ S^{\alpha\beta\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \psi_{,\rho}} f^{[\beta\alpha]} \psi \quad . \tag{4.46}$$

CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM ANGULAR.

Como foi visto,

$$t_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \overset{*}{\nabla}_\rho \mu_{\alpha\beta}{}^{\rho} \quad .$$

Tomando a parte antissimétrica desta equação, pode-se introduzir o tensor de momentum angular de spin:

$$\begin{aligned} t_{[\alpha\beta]} &= - \overset{*}{\nabla}_\rho \mu_{[\alpha\beta]}{}^{\rho} \\ &= - \overset{*}{\nabla}_\rho S_{\beta\alpha}{}^{\rho} = \overset{*}{\nabla}_\rho S_{\alpha\beta}{}^{\rho} \quad , \end{aligned}$$

resultando a lei de conservação do momentum angular na teoria de Einstein-Cartan:

$$\overset{*}{\nabla}_\rho S_{\alpha\beta}{}^{\rho} - t_{[\alpha\beta]} \equiv 0 \quad . \tag{4.47}$$

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA-MOMENTUM.

Manipulando a terceira identidade de Rosenfeld, (4.33c), chega-se a nova lei de conservação, para a energia-momentum. Novamente, substitui-se Q por ψ, g e $\mathcal{T}$, com as condições (4.34).

A substituição por ψ é identicamente nula e não fornece informações. Substituindo por g e $\mathcal{T}$ e somando membro a membro, ob têm-se:

$$\overset{+}{\nabla}_\beta \left(\frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta g} f_\alpha{}^\beta g + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta \tau} f_\alpha{}^\beta \tau \right) + \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta \tau_{\beta\rho}{}^\lambda} \nabla_\alpha \tau_\beta{}^{\rho\lambda} = 0 \quad .$$

Usando as expressões (4.37,38), vem:

$$\overset{+}{\nabla}_\beta \left(T_\alpha{}^\beta + 2\mu_\gamma{}^{\beta\rho}\tau_{\rho\alpha}{}^\gamma + \mu_\alpha{}^{\rho\sigma}\tau_{\rho\sigma}{}^\beta \right) - \mu_\lambda{}^{\rho\beta}\nabla_\alpha \tau_{\beta\rho}{}^\lambda = 0$$

$$\overset{+}{\nabla}_\beta \left(t_\alpha{}^\beta + \overset{*}{\nabla}_\rho \mu_\alpha{}^{\beta\rho} + 2\mu_\lambda{}^{\beta\rho}\tau_{\rho\alpha}{}^\lambda + \mu_\alpha{}^{\rho\lambda}\tau_{\rho\lambda}{}^\beta \right) - \mu_\lambda{}^{\rho\beta}\nabla_\alpha\tau_{\beta\rho}{}^\lambda = 0$$

$$\overset{+}{\nabla}_\beta \left(t_\alpha{}^\beta + \overset{+}{\nabla}_\rho \mu_\alpha{}^{\beta\rho} + \mu_\alpha{}^{\rho\lambda}\tau_{\rho\lambda}{}^\beta \right) - \mu_\lambda{}^{\rho\beta}\nabla_\alpha\tau_{\beta\rho}{}^\lambda = 0$$

e, enfim,

$$\overset{+}{\nabla}_\beta t_\alpha{}^\beta = \mu_\lambda{}^{\rho\beta}\nabla_\alpha\tau_{\beta\rho}{}^\lambda - \overset{+}{\nabla}_\beta \left(\overset{+}{\nabla}_\rho\mu_\alpha{}^{\beta\rho} + \mu_\alpha{}^{\rho\lambda}\tau_{\rho\lambda}{}^\beta \right) \quad . \tag{4.48}$$

Desenvolvendo o último termo de (4.48), tem-se, primeiramente,

$$\begin{aligned}
\overset{+}{\nabla}_\beta\overset{+}{\nabla}_\rho \mu_\alpha{}^{\beta\rho} &= \overset{+}{\nabla}_\beta \left[\nabla_\rho\mu_\alpha{}^{\beta\rho} + 4\tau_{\rho(\alpha}{}^\lambda\mu_{\lambda)}{}^{\beta\rho} \right] \\
&= \nabla_\beta\nabla_\rho\mu_\alpha{}^{\beta\rho} + 4\tau_{\beta(\alpha|}{}^\lambda \nabla_\rho|\mu_{\lambda)}{}^{\beta\rho} + \\
&\quad + 2\left[\nabla_\beta\tau_{\rho\alpha}{}^\lambda\mu_\lambda{}^{\beta\rho} + 4\tau_{\beta(\alpha|}{}^\sigma\tau_{\rho|\sigma)}{}^\lambda\mu_\lambda{}^{\beta\rho} \right. + \\
&\quad \left. + 2\left[\nabla_\beta\tau_{\rho\lambda}{}^\lambda\mu_\alpha{}^{\beta\rho} + 4\tau_{\beta(\alpha|}{}^\sigma\tau_{\rho\lambda}{}^\lambda\mu_{|\sigma)}{}^{\beta\rho} \right] \right. \\
&= \nabla_{[\beta}\nabla_{\rho]}\mu_\alpha{}^{\beta\rho} + 2\tau_{\beta\alpha}{}^\lambda\nabla_\rho\mu_\lambda{}^{\beta\rho} + 2\tau_{\beta\lambda}{}^\lambda\nabla_\rho\mu_\alpha{}^{\beta\rho} + \\
&\quad + 2\nabla_\beta\tau_{\rho\alpha}{}^\lambda\mu_\lambda{}^{\beta\rho} + 2\nabla_\beta\tau_{\rho\lambda}{}^\lambda\mu_\alpha{}^{\beta\rho} + 4\tau_{\beta\alpha}{}^\sigma\tau_{\rho\sigma}{}^\lambda\mu_\lambda{}^{\beta\rho} + \\
&\quad + 4\tau_{\beta\sigma}{}^\sigma\tau_{\rho\alpha}{}^\lambda\mu_\lambda{}^{\beta\rho} + 4\tau_{\beta\alpha}{}^\sigma\tau_{\rho\lambda}{}^\lambda\mu_\sigma{}^{\beta\rho} + 4\tau_{\beta\sigma}{}^\sigma\tau_{\rho\lambda}{}^\lambda\mu_\alpha{}^{\beta\rho} \; ,
\end{aligned} \tag{4.49}$$

e, também,

$$\begin{aligned}
\overset{+}{\nabla}_\beta\mu_\alpha{}^{\rho\lambda}\tau_{\rho\lambda}{}^\beta &= \nabla_\beta\mu_\alpha{}^{\rho\lambda}\tau_{\rho\lambda}{}^\beta + 4\tau_{\beta(\alpha|}{}^\sigma\mu_{|\sigma)}{}^{\rho\lambda}\tau_{\rho\lambda}{}^\beta \\
&= \nabla_\beta\mu_\alpha{}^{\rho\lambda}\tau_{\rho\lambda}{}^\beta + 2\tau_{\beta\alpha}{}^\sigma\tau_{\rho\lambda}{}^\beta\mu_\sigma{}^{\rho\lambda} + 2\tau_{\beta\sigma}{}^\sigma\tau_{\rho\lambda}{}^\beta\mu_\alpha{}^{\rho\lambda} \; .
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Substituindo (4.49,50) em (4.48), vem:

$$\overset{+}{\nabla}_\beta t_\alpha{}^\beta = \mu_\lambda{}^{\rho\beta}\nabla_\alpha \tau_{\beta\rho}{}^\lambda - \nabla_{[\beta}\nabla_{\rho]}\mu_\alpha{}^{\beta\rho} - 2\tau_{\beta\alpha}{}^\lambda \nabla_\rho \mu_\lambda{}^{\beta\rho} - 2\tau_{\beta\lambda}{}^\lambda \nabla_\rho \mu_\alpha{}^{\beta\rho} +$$
$$- 2\nabla_\beta \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda \mu_\lambda{}^{\beta\rho} - 2\nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda \mu_\alpha{}^{\beta\rho} - 4\tau_{\beta\alpha}{}^\sigma \tau_{\rho\sigma}{}^\lambda \mu_\lambda{}^{\beta\rho} - 4\tau_{\beta\sigma}{}^\sigma \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda \mu_\lambda{}^{\beta\rho} +$$
$$- 4\tau_{\beta\alpha}{}^\sigma \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda \mu_\sigma{}^{\beta\rho} - 4\tau_{\beta\sigma}{}^\sigma \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda \mu_\alpha{}^{\beta\rho} - \nabla_\beta \mu_\alpha{}^{\rho\lambda} \tau_{\rho\lambda}{}^\beta +$$
$$- 2\tau_{\beta\alpha}{}^\sigma \tau_{\rho\lambda}{}^\beta \mu_\sigma{}^{\rho\lambda} - 2\tau_{\beta\sigma}{}^\sigma \tau_{\rho\lambda}{}^\beta \mu_\alpha{}^{\rho\lambda} \quad . \tag{4.51}$$

Usando a relação:

$$\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]}\Psi = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\rho}{}^\lambda f_\lambda{}^\rho \Psi - \tau_{\alpha\beta}{}^\rho \nabla_\rho \Psi \tag{4.52}$$

(generalização da equação (2.38) para um tensor de ordem arbitrária), calcula-se o segundo termo do lado direito de (4.51):

$$\nabla_{[\beta}\nabla_{\rho]}\mu_\alpha{}^{\beta\rho} = \frac{1}{2} R_{\beta\rho\lambda}{}^\nu f_\nu{}^{\lambda\sigma}{}_{\gamma\chi\alpha}{}^{\beta\rho} \mu_\sigma{}^{\gamma\chi} - \tau_{\beta\rho}{}^\lambda \nabla_\lambda \mu_\alpha{}^{\beta\rho} \quad . \tag{4.53}$$

Como:

$$f_\nu{}^{\lambda\sigma}{}_{\gamma\chi\alpha}{}^{\beta\rho} = -\delta_\nu^\sigma \delta_\alpha^\lambda \delta_\gamma^\beta \delta_\chi^\rho + \delta_\nu^\beta \delta_\gamma^\lambda \delta_\alpha^\sigma \delta_\chi^\rho + \delta_\nu^\rho \delta_\chi^\lambda \delta_\alpha^\sigma \delta_\gamma^\beta \tag{4.54}$$

tem-se:

$$\frac{1}{2} R_{\beta\rho\lambda}{}^\nu f_\nu{}^{\lambda\sigma}{}_{\gamma\chi\alpha}{}^{\beta\rho} \mu_\sigma{}^{\gamma\chi} = \frac{1}{2}\left(- R_{\beta\rho\alpha}{}^\lambda \mu_\lambda{}^{\beta\rho} + R_{\beta\rho\lambda}{}^\beta \mu_\alpha{}^{\lambda\rho} + R_{\beta\rho\lambda}{}^\rho \mu_\alpha{}^{\beta\lambda}\right)$$
$$= -\frac{1}{2} R_{\beta\rho\alpha}{}^\lambda \mu_\lambda{}^{\beta\rho} + R_{\beta\rho\lambda}{}^\rho \mu_\alpha{}^{\beta\lambda} \tag{4.55}$$

e assim, a equação (4.53) fica escrita:

$$\nabla_{[\beta}\nabla_{\rho]}\mu_\alpha{}^{\beta\rho} = -\frac{1}{2} R_{\beta\rho\alpha}{}^\lambda \mu_\lambda{}^{\beta\rho} + R_{\beta\rho\lambda}{}^\rho \mu_\alpha{}^{\beta\lambda} - \tau_{\beta\rho}{}^\lambda \nabla_\lambda \mu_\alpha{}^{\beta\rho} \quad . \tag{4.56}$$

Outros termos de (4.51) podem ser desenvolvidos da seguinte maneira:

$$\nabla_\beta \tau_{\rho\alpha}{}^{\lambda} \mu_\lambda{}^{\beta\rho} = \tau_{\rho\alpha}{}^{\lambda} \nabla_\beta \mu_\lambda{}^{\beta\rho} + \mu_\lambda{}^{\beta\rho} \nabla_\beta \tau_{\rho\alpha}{}^{\lambda}$$

$$\nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^{\lambda} \mu_\alpha{}^{\beta\rho} = \tau_{\rho\lambda}{}^{\lambda} \nabla_\beta \mu_\alpha{}^{\beta\rho} + \mu_\alpha{}^{\beta\rho} \nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^{\lambda}$$

$$\nabla_\beta \mu_\alpha{}^{\rho\lambda} \tau_{\rho\lambda}{}^{\beta} = \tau_{\rho\lambda}{}^{\beta} \nabla_\beta \mu_\alpha{}^{\rho\lambda} + \mu_\alpha{}^{\rho\lambda} \nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^{\beta} \quad .$$

Mas

$$\tau_{\rho\alpha}{}^{\lambda} \nabla_\beta \mu_\lambda{}^{\beta\rho} = \tau_{\beta\alpha}{}^{\lambda} \nabla_\rho \mu_\lambda{}^{\rho\beta} = -\tau_{\beta\alpha}{}^{\lambda} \nabla_\rho \mu_\lambda{}^{\beta\rho}$$

$$\tau_{\rho\lambda}{}^{\lambda} \nabla_\beta \mu_\alpha{}^{\beta\rho} = \tau_{\beta\lambda}{}^{\lambda} \nabla_\rho \mu_\alpha{}^{\rho\beta} = -\tau_{\beta\lambda}{}^{\lambda} \nabla_\rho \mu_\alpha{}^{\beta\rho}$$

$$\tau_{\rho\lambda}{}^{\beta} \nabla_\beta \mu_\alpha{}^{\rho\lambda} = \tau_{\rho\beta}{}^{\lambda} \nabla_\lambda \mu_\alpha{}^{\rho\beta} = \tau_{\beta\rho}{}^{\lambda} \nabla_\lambda \mu_\alpha{}^{\beta\rho} \quad ,$$

de modo que:

$$\nabla_\beta \tau_{\rho\alpha}{}^{\lambda} \mu_\lambda{}^{\beta\rho} = \mu_\lambda{}^{\beta\rho} \nabla_\beta \tau_{\rho\alpha}{}^{\lambda} - \tau_{\beta\alpha}{}^{\lambda} \nabla_\rho \mu_\lambda{}^{\beta\rho}$$

$$\nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^{\lambda} \mu_\alpha{}^{\beta\rho} = \mu_\alpha{}^{\beta\rho} \nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^{\lambda} - \tau_{\beta\lambda}{}^{\lambda} \nabla_\rho \mu_\alpha{}^{\beta\rho}$$

$$\nabla_\beta \mu_\alpha{}^{\rho\lambda} \tau_{\rho\lambda}{}^{\beta} = \mu_\alpha{}^{\rho\lambda} \nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^{\beta} + \tau_{\beta\rho}{}^{\lambda} \nabla_\lambda \mu_\alpha{}^{\beta\rho}$$

e, enfim, substituindo em (4.51) e simplificando, tem-se:

$$\begin{aligned}\overset{+}{\nabla}_\beta\, t_\alpha{}^{\beta} = {} & \tfrac{1}{2} R_{\beta\rho\alpha}{}^{\lambda} \mu_\lambda{}^{\beta\rho} - R_{\beta\rho\lambda}{}^{\rho} \mu_\alpha{}^{\beta\lambda} + \\ & + \mu_\lambda{}^{\rho\beta} \nabla_\alpha \tau_{\beta\rho}{}^{\lambda} - 2\mu_\lambda{}^{\beta\rho} \nabla_\beta \tau_{\rho\alpha}{}^{\lambda} - 2\mu_\alpha{}^{\beta\rho} \nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^{\lambda} - \mu_\alpha{}^{\beta\lambda} \nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^{\beta} + \\ & - 4\tau_{\beta\alpha}{}^{\sigma} \tau_{\rho\sigma}{}^{\lambda} \mu_\lambda{}^{\beta\rho} - 4\tau_{\beta\sigma}{}^{\sigma} \tau_{\rho\alpha}{}^{\lambda} \mu_\lambda{}^{\beta\rho} - 4\tau_{\beta\alpha}{}^{\sigma} \tau_{\rho\lambda}{}^{\lambda} \mu_\sigma{}^{\beta\rho} + \\ & - 4\tau_{\beta\sigma}{}^{\sigma} \tau_{\rho\lambda}{}^{\lambda} \mu_\alpha{}^{\beta\rho} - 2\tau_{\beta\alpha}{}^{\sigma} \tau_{\rho\lambda}{}^{\beta} \mu_\sigma{}^{\rho\lambda} - 2\tau_{\beta\sigma}{}^{\sigma} \tau_{\rho\lambda}{}^{\beta} \mu_\alpha{}^{\rho\lambda} \quad . \end{aligned} \tag{4.57}$$

E as seguintes expressões podem ainda ser desenvolvidas:

$$\mu_\lambda{}^{\rho\beta} \nabla_\alpha \tau_{\beta\rho}{}^{\lambda} - 2\mu_\lambda{}^{\beta\rho} \nabla_\beta \tau_{\rho\alpha}{}^{\lambda} - 2\mu_\alpha{}^{\beta\rho} \nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^{\lambda} - \mu_\alpha{}^{\rho\lambda} \nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^{\beta} =$$

$$= -\left(\mu_\lambda{}^{\beta\rho} \nabla_\alpha \tau_{\beta\rho}{}^{\lambda} + \mu_\lambda{}^{\beta\rho} \nabla_\beta \tau_{\rho\alpha}{}^{\lambda} + \mu_\lambda{}^{\rho\beta} \nabla_\rho \tau_{\beta\alpha}{}^{\lambda} \right) +$$

$$- (\mu_\alpha{}^{\beta\rho} \nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda + \mu_\alpha{}^{\rho\beta} \nabla_\rho \tau_{\beta\lambda}{}^\lambda + \mu_\alpha{}^{\beta\rho} \nabla_\lambda \tau_{\beta\rho}{}^\lambda)$$

$$= - \mu_\lambda{}^{\beta\rho} (\nabla_\alpha \tau_{\beta\rho}{}^\lambda + \nabla_\beta \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda + \nabla_\rho \tau_{\alpha\beta}{}^\lambda) +$$

$$- \mu_\alpha{}^{\beta\rho} (\nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda + \nabla_\rho \tau_{\lambda\beta}{}^\lambda + \nabla_\lambda \tau_{\beta\rho}{}^\lambda) \qquad (4.58)$$

$$4 \tau_{\beta\alpha}{}^\sigma \tau_{\rho\sigma}{}^\lambda \mu_\lambda{}^{\beta\rho} + 4 \tau_{\beta\sigma}{}^\sigma \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda \mu_\lambda{}^{\beta\rho} + 4 \tau_{\beta\alpha}{}^\sigma \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda \mu_\sigma{}^{\beta\rho} +$$

$$+ 4 \tau_{\beta\sigma}{}^\sigma \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda \mu_\alpha{}^{\beta\rho} + 2 \tau_{\beta\alpha}{}^\sigma \tau_{\rho\lambda}{}^\beta \mu_\sigma{}^{\rho\lambda} + 2 \tau_{\beta\sigma}{}^\sigma \tau_{\rho\lambda}{}^\beta \mu_\alpha{}^{\rho\beta} =$$

$$= \mu_\lambda{}^{\beta\rho} (4 \tau_{\beta\alpha}{}^\sigma \tau_{\rho\sigma}{}^\lambda + 4 \tau_{\beta\sigma}{}^\sigma \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda + 4 \tau_{\beta\alpha}{}^\lambda \tau_{\rho\sigma}{}^\sigma + 2 \tau_{\sigma\alpha}{}^\lambda \tau_{\beta\rho}{}^\sigma) +$$

$$+ \mu_\alpha{}^{\beta\rho} (4 \tau_{\beta\sigma}{}^\sigma \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda + 2 \tau_{\lambda\sigma}{}^\sigma \tau_{\beta\rho}{}^\lambda)$$

$$= - 2 \mu_\lambda{}^{\beta\rho} (\tau_{\alpha\beta}{}^\sigma \tau_{\rho\sigma}{}^\lambda + \tau_{\rho\alpha}{}^\sigma \tau_{\beta\sigma}{}^\lambda + \tau_{\beta\rho}{}^\sigma \tau_{\alpha\sigma}{}^\lambda) +$$

$$- 2 \mu_\alpha{}^{\beta\rho} (\tau_{\beta\rho}{}^\sigma \tau_{\lambda\sigma}{}^\lambda + \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda \tau_{\beta\sigma}{}^\sigma + \tau_{\lambda\beta}{}^\lambda \tau_{\rho\sigma}{}^\sigma) \quad . \qquad (4.59)$$

Levando (4.58, 59) em (4.57), chega-se a:

$$\overset{+}{\nabla}_\beta t_\alpha{}^\beta = \frac{1}{2} R_{\beta\rho\alpha}{}^\lambda \mu_\lambda{}^{\beta\rho} - R_{\beta\rho\lambda}{}^\rho \mu_\alpha{}^{\beta\rho} +$$

$$- \mu_\lambda{}^{\beta\rho} [\nabla_\alpha \tau_{\beta\rho}{}^\lambda + \nabla_\beta \tau_{\rho\alpha}{}^\lambda + \nabla_\rho \tau_{\alpha\beta}{}^\lambda - 2 (\tau_{\alpha\beta}{}^\sigma \tau_{\rho\sigma}{}^\lambda + \tau_{\rho\alpha}{}^\sigma \tau_{\beta\sigma}{}^\lambda + \tau_{\beta\rho}{}^\sigma \tau_{\alpha\sigma}{}^\lambda)] +$$

$$- \mu_\alpha{}^{\beta\rho} [\nabla_\beta \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda + \nabla_\rho \tau_{\lambda\beta}{}^\lambda + \nabla_\lambda \tau_{\beta\rho}{}^\lambda - 2 (\tau_{\beta\rho}{}^\sigma \tau_{\lambda\sigma}{}^\lambda + \tau_{\rho\lambda}{}^\lambda \tau_{\beta\sigma}{}^\sigma + \tau_{\lambda\beta}{}^\lambda \tau_{\rho\sigma}{}^\sigma)] \; .$$

(4.60)

Observando-se que:

$$R_{[\alpha\beta\rho]}{}^\lambda = 2 \nabla_{[\alpha} \tau_{\beta\rho]}{}^\lambda - 4 \tau_{[\alpha\beta}{}^\sigma \tau_{\rho]\sigma}{}^\lambda \qquad ,$$

onde

$$3! \; R_{[\alpha\beta\rho]}{}^\lambda = 2 (R_{\alpha\beta\rho}{}^\lambda + R_{\beta\rho\alpha}{}^\lambda + R_{\rho\alpha\beta}{}^\lambda)$$

$$3!\,\nabla_{[\alpha}\tau_{\beta\rho]}{}^{\lambda} = 2\left(\nabla_{\alpha}\tau_{\beta\rho}{}^{\lambda} + \nabla_{\beta}\tau_{\rho\alpha}{}^{\lambda} + \nabla_{\rho}\tau_{\alpha\beta}{}^{\lambda}\right)$$

$$3!\,\tau_{[\alpha\beta}{}^{\sigma}\tau_{\rho]\sigma}{}^{\lambda} = 2\left(\tau_{\alpha\beta}{}^{\sigma}\tau_{\rho\sigma}{}^{\lambda} + \tau_{\beta\rho}{}^{\sigma}\tau_{\alpha\sigma}{}^{\lambda} + \tau_{\rho\alpha}{}^{\sigma}\tau_{\beta\sigma}{}^{\lambda}\right) \quad ,$$

encontra-se:

$$R_{\alpha\beta\rho}{}^{\lambda} + R_{\beta\rho\alpha}{}^{\lambda} + R_{\rho\alpha\beta}{}^{\lambda} = 2\left(\nabla_{\alpha}\tau_{\beta\rho}{}^{\lambda} + \nabla_{\beta}\tau_{\rho\alpha}{}^{\lambda} + \nabla_{\rho}\tau_{\alpha\beta}{}^{\lambda}\right) +$$

$$- 4\left(\tau_{\alpha\beta}{}^{\sigma}\tau_{\rho\sigma}{}^{\lambda} + \tau_{\beta\rho}{}^{\sigma}\tau_{\alpha\sigma}{}^{\lambda} + \tau_{\rho\alpha}{}^{\sigma}\tau_{\beta\sigma}{}^{\lambda}\right)$$

e, enfim, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\overset{+}{\nabla}_{\beta} t_{\alpha}{}^{\beta} &= \tfrac{1}{2} R_{\beta\rho\alpha}{}^{\lambda}\mu_{\lambda}{}^{\beta\rho} - R_{\beta\rho\lambda}{}^{\rho}\mu_{\alpha}{}^{\beta\lambda} + \\
&\quad - \mu_{\lambda}{}^{\beta\rho}\left[\tfrac{1}{2}\left(R_{\alpha\beta\rho}{}^{\lambda} + R_{\beta\rho\alpha}{}^{\lambda} + R_{\rho\alpha\beta}{}^{\lambda}\right)\right] + \\
&\quad - \mu_{\alpha}{}^{\beta\rho}\left[\tfrac{1}{2}\left(R_{\rho\lambda\beta}{}^{\lambda} + R_{\lambda\beta\rho}{}^{\lambda}\right)\right] \\
&= - \tfrac{1}{2}\left(\mu_{\lambda}{}^{\beta\rho} R_{\alpha\beta\rho}{}^{\lambda} - \mu_{\lambda}{}^{\rho\beta} R_{\alpha\beta\rho}{}^{\lambda}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\mu_{\alpha}{}^{\beta\rho} R_{\rho\lambda\beta}{}^{\lambda} + \mu_{\alpha}{}^{\rho\beta} R_{\rho\lambda\beta}{}^{\lambda}\right) \\
&= - \mu_{\lambda}{}^{\beta\rho} R_{\alpha\beta\rho}{}^{\lambda} = - \mu^{\beta\rho\lambda} R_{\alpha\lambda\beta\rho} \\
&= \mu^{[\rho\beta]\lambda} R_{\alpha\lambda\beta\rho} \quad ,
\end{aligned}$$

ou, enfim, por (3.15),

$$\overset{+}{\nabla}_{\beta} t_{\alpha}{}^{\beta} = S_{\beta\rho}{}^{\lambda} R_{\alpha\lambda}{}^{\beta\rho} \quad .$$

CAPÍTULO II

FÍSICA EM ESPAÇO-TEMPO DE EINSTEIN-CARTAN.

II.1 - A interação de contato spin-spin.

A NÃO PROPAGAÇÃO DA TORÇÃO.

As equações de campo da teoria gravitacional de Einstein-Cartan foram calculadas no capítulo anterior [Eqs. (I.3.57, 58)], obtendo-se:

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} t^{\alpha\beta} , \qquad (1.1)$$

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{8\pi G}{c^4} S^{\alpha\beta\gamma} . \qquad (1.2)$$

Há um grande contraste, já assinalado, na estrutura destas fórmulas. (1.1) é uma equação diferencial de segunda ordem para o tensor métrico, pela definição do tensor de Einstein. Entretanto, (1.2) relaciona algebricamente a torção (modificada) do espaço-tempo com o tensor canônico de spin. Conseqüentemente, o espaço-tempo possuirá torção somente no interior da distribuição de matéria, pois, fora desta distribuição, $S^{\alpha\beta\gamma} = 0$ e (1.2) implica $\mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma} = 0$.

Portanto, a torção não pode se propagar pelo vácuo. Seus efeitos, no exterior da distribuição de matéria, só se fazem sentir através de sua influência sobre o tensor métrico. Isto fica aparente ao se escrever a "equação de campo combinada" (Hehl et al 1976), que pode ser obtida separando, em (1.1), o tensor de Einstein em partes riemanniana $G^{\alpha\beta}(\{\})$ e não-riemanniana, onde, por intermédio de

(1.2), é introduzido o tensor de spin. O resultado é o seguinte:

$$G^{\alpha\beta}(\{\}) = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta} + \left(\frac{8\pi G}{c^4}\right)^2 \Big[-4 S^{\alpha\rho}{}_{[\sigma} S^{\beta\sigma}{}_{\rho]} - 2 S^{\alpha\rho\sigma} S^{\beta}{}_{\rho\sigma} +$$

$$+ S^{\rho\sigma\alpha} S_{\rho\sigma}{}^{\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(4 S_{\lambda}{}^{\rho}{}_{[\sigma} S^{\lambda\sigma}{}_{\rho]} + S^{\lambda\rho\sigma} S_{\lambda\rho\sigma}\right) \tag{1.3a}$$

$$\equiv \frac{8\pi G}{c^4} \tilde{T}^{\alpha\beta} , \tag{1.3b}$$

onde foi definido o tensor de energia-momentum combinado $\tilde{T}^{\alpha\beta}$*. Observe-se, no entanto, que os termos de influência do spin são proporcionais a G^2, enquanto que o termo de influência da massa é proporcional a G. Isto mostra que o segundo termo do lado direito de (1.3a) pode ser considerado como uma correção de segunda ordem nas equações de Einstein.

COMPARAÇÃO ENTRE AS DENSIDADES LAGRANGIANAS DE EINSTEIN E EINSTEIN-CARTAN.

No capítulo I, as equações de campo da teoria de Einstein-Cartan foram obtidas a partir da densidade lagrangiana de campos $\mathcal{L}_C$, definida por acoplamento mínimo em (I.3.4):

---

* Como se tem, no lado esquerdo de (1.3), o tensor de Einstein riemanniano, que é simétrico e com divergência nula, $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ também possui estas propriedades.

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_c(\Psi, \nabla g, g) = \mathcal{L}_c(\Psi, \partial\Psi, g, \partial g, K), \quad (1.4)$$

onde passa-se a considerar a contorção K como variável independente. Decompondo (1.4) em partes riemanniana e não-riemanniana, pode-se escrever, levando em conta a definição (I.3.12):

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_c(\{\}) + \sqrt{-g}\, S_\gamma{}^{\beta\alpha} K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \sqrt{-g}\, Z(\Psi, \partial\Psi, g, \partial g, K), \quad (1.5)$$

onde Z é uma função desconhecida tal que forneça o limite $\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_c(\{\})$ para K = 0.

A variação de (1.5) é dada por:

$$\sqrt{-g}\, S_\gamma{}^{\beta\alpha} = \frac{\delta \mathcal{L}_c}{\delta K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} = \sqrt{-g}\,\frac{\delta S_\rho{}^{\nu\mu}}{\delta K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} + \sqrt{-g}\, S_\gamma{}^{\beta\alpha} + \sqrt{-g}\,\frac{\delta Z}{\delta K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}},$$

isto é,

$$0 = \frac{\delta S_\rho{}^{\nu\mu}}{\delta K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} K_{\mu\nu}{}^{\rho} + \frac{\delta Z}{\delta K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}}.$$

Como as funções S e Z não dependem de derivadas da contorção, tem-se a seguinte equação diferencial para Z:

$$\frac{\partial Z}{\partial K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} = -\frac{\partial S_\rho{}^{\nu\mu}}{\partial K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}} K_{\mu\nu}{}^{\rho}, \quad (1.6)$$

que está sujeita à condição de contorno Z(K = 0) = 0.

Por outro lado, usando (I.3.33, 54), a decomposição da densidade de escalar de curvatura se escreve:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\{\}) - \sqrt{-g}\, T_\gamma{}^{\beta\alpha} K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \partial_\alpha\left(2\sqrt{-g}\, K_\beta{}^{\alpha\beta}\right). \quad (1.7)$$

Portanto, a ação total se escreve:

$$I = \int \left[\frac{R(\{\})}{16\pi} - \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \mathcal{J}_\gamma{}^{\beta\alpha} K_{\alpha\beta}{}^\gamma + \frac{1}{16\pi} \partial_\alpha (2\sqrt{-g}\, K_{\beta\alpha}{}^\beta) \right] d^4x +$$

$$+ \int \left[\mathcal{L}_c(\{\}) + \sqrt{-g}\, S_\gamma{}^{\beta\alpha} K_{\alpha\beta}{}^\gamma + \sqrt{-g}\, Z \right] d^4x$$

$$= \int \left[\mathcal{L}_c(\{\}) + \frac{R(\{\})}{16\pi} \right] d^4x + \int \sqrt{-g} \left[\left(S_\gamma{}^{\beta\alpha} - \frac{\mathcal{J}_\gamma{}^{\beta\alpha}}{16\pi} \right) K_{\alpha\beta}{}^\gamma + Z \right] d^4x$$

$$= I(\{\}) + \int \sqrt{-g} \left[\left(S_\gamma{}^{\beta\alpha} - \frac{\mathcal{J}_\gamma{}^{\beta\alpha}}{16\pi} \right) K_{\alpha\beta}{}^\gamma + Z \right] d^4x \quad (1.8)$$

Introduzindo em (1.8) a segunda equação de campos (1.2) , vem que:

$$S_\gamma{}^{\beta\alpha} - \frac{\mathcal{J}_\gamma{}^{\beta\alpha}}{16\pi} = \frac{1}{2} S_\gamma{}^{\beta\alpha}$$

e, portanto,

$$I = I(\{\}) + \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} S_\gamma{}^{\beta\alpha} K_{\alpha\beta}{}^\gamma + Z \right) d^4x \,. \quad (1.9)$$

Usando, agora, a expressão (Galvão 1976, p. 14):

$$K_{\alpha\beta}{}^\gamma = 8\pi \left(-S_{\alpha\beta}{}^\gamma + S_\beta{}^\gamma{}_\alpha - S^\gamma{}_{\alpha\beta} - \delta_\alpha^\gamma S_{\beta\rho}{}^\rho + g_{\alpha\beta} S^\gamma{}_\rho{}^\rho \right), \quad (1.10)$$

obtêm-se:

$$\frac{1}{2} S_\gamma{}^{\beta\alpha} K_{\alpha\beta}{}^\gamma = 4\pi \left(-S_{\alpha\beta}{}^\gamma S_\gamma{}^{\beta\alpha} + S_{\alpha\beta}{}^\gamma S^{\beta\alpha}{}_\gamma - S_{\alpha\beta}{}^\gamma S^\alpha{}_\gamma{}^\beta - S_\beta{}^{\alpha\beta} S_{\alpha\rho}{}^\rho + \right.$$

$$\left. + S_{\alpha\beta}{}^\beta S^{\alpha\rho}{}_\rho \right)$$

e como:

$$- S_{\alpha\beta}{}^{\gamma} S^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta} = - S_{\alpha\beta}{}^{\gamma} S_{\gamma}{}^{\beta\alpha} ,$$

tem-se, finalmente:

$$\frac{1}{2} S_{\gamma}{}^{\beta\alpha} K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 8\pi \left(\frac{1}{2} S_{\alpha\beta}{}^{\gamma} S^{\beta\alpha}{}_{\gamma} - S_{\alpha\beta}{}^{\gamma} S_{\gamma}{}^{\beta\alpha} + S_{\alpha\beta}{}^{\beta} S^{\alpha\rho}{}_{\rho} \right). \quad (1.11)$$

Este é o termo de contribuição não-riemanniana à lagrangiana total para Z = 0.

Desta forma, através de (1.11), a teoria de Einstein-Cartan prevê, além das interações gravitacionais conhecidas em relatividade geral (provenientes de I({})) , a existência de uma outra interação universal de contato spin-spin muito fraca (pois (1.11) é proporcional à constante gravitacional, o que não ocorre com I({}))*.

---

* Uma interação de contato spin-spin de tipo semelhante ocorre numa versão quântica da teoria de Einstein (ver O'Connell 1974, 1976 e suas referências).

II.2 - Trajetórias em U_4.

O problema do movimento de uma partícula-teste na teoria de Einstein-Cartan é um pouco mais sutil do que em relatividade geral.

Do ponto de vista geométrico, podem-se distinguir, numa variedade de Riemann-Cartan, dois tipos de curvas sobre as quais uma partícula-teste livre num campo gravitacional poderia vir a se deslocar. Estas curvas são denominadas autoparalelas e extremais e são descritas por equações semelhantes à conhecida equação da geodésica das variedades sem torção.

Num espaço-tempo desprovido de torção, em que é válida a relatividade geral, suas leis de conservação e as equações de campo de Einstein implicam que a equação de movimento de uma partícula-teste livre é dada pela equação da geodésica da variedade riemanniana à qual a partícula está vinculada*.

Entretanto, uma dificuldade surge ao se escolher uma partícula-teste capaz de sofrer os efeitos da torção do espaço-tempo. Devido à densidade lagrangiana de campos $\mathcal{L}_C$, dada pela eq.(I.3.4), ser dependente do campo ψ e suas derivadas $\nabla\psi$, a torção agirá somente sobre campos não escalares. Isto implica que a matéria descrita por ψ, a qual inclui a partícula-teste, possui momentum angular

* Ver discussão em Misner, Thorne & Wheeler (1973), §20.6, ou a exposição mais completa de Infeld & Plebański (1960).

de spin, para que venha a sentir ou produzir torção. (No entanto, como será visto em § II.3, fótons não são afetados pela torção em suas trajetórias).

De qualquer forma, a equação de movimento procurada deverá ser obtida por integração das leis de conservação em U_4. Mesmo em relatividade geral, a exigência de que a partícula-teste possua spin resulta em que sua trajetória seja desviada do caminho geodésico (Papapetrou 1951 , Corinaldesi e Papapetrou 1951). A generalização deste método para variedades de Riemann-Cartan foi conseguida por Hehl (1971) e Trautman (1972c), sendo obtido um termo em que se acopla a torção ao momentum total e à velocidade da partícula-teste. Assim, a trajetória desta partícula-teste não será, em geral, nem uma autoparalela nem uma curva extremal. (Ver, também, Hojman 1978).

Uma outra dificuldade está no fato de que, como foi visto, a torção somente existe no interior da matéria, onde se perde a noção de partícula-teste. Apesar de tudo, o estudo das curvas mencionadas se justifica em seu possível conteúdo físico, como trajetórias de neutrinos no interior de uma distribuição de matéria com spin.

AUTOPARALELAS E EXTREMAIS.

Em espaço-tempo riemanniano, há dois modos de se chegar a equação da geodésica:

(1) definindo-se como geodésica a curva em que

um vetor tangente a ela em algum evento, ao ser transportado paralelamente até outro evento desta curva, permanece tangente a ela e com o mesmo módulo; ou,

(2) como se trabalha numa variedade métrica, onde são definidos os coeficientes $g_{\alpha\beta}$ com os quais se escrevem elementos de linha, a geodésica também pode ser considerada como a curva resultante das equações de Euler-Lagrange, para as quais a lagrangiana é dependente de $g_{\alpha\beta}$ e das derivadas da posição em relação a algum parâmetro definido sobre a curva.

Verifica-se que, num espaço-tempo riemanniano R_4, ambos os pontos de vista resultam na mesma equação de movimento (cf., por exemplo, Misner, Thorne & Wheeler 1973, cap. 10 e § 13.4). Entretanto, este não é o caso num espaço-tempo de Riemann-Cartan U_4.

As <u>curvas extremais</u> de U_4 são aquelas deduzidas segundo o ponto de vista (2) acima. O problema é colocado como a solução do problema variacional

$$\delta \int_a^b \left| g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right|^{1/2} d\lambda = 0 . \tag{2.1}$$

Daí, obtêm-se as equações

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 . \tag{2.2}$$

Este resultado é idêntico ao obtido em relatividade geral, já que a torção não comparece em qualquer passo do cálculo feito.

Assim, as curvas extremais tipo tempo são as trajetórias de partículas-teste com massa e sem spin, calculadas por intermédio das leis de conservação em U_4 (como, por exemplo, no contexto de Einstein, Infeld e Hoffman 1938; ver Goldberg 1962).

No entanto, ao se realizar os cálculos da equação de movimento sob o ponto de vista (1), os efeitos da torção tornam-se aparentes, criando uma outra classe de curvas privilegiadas no espaço-tempo: as autoparalelas.

Desta forma, considere-se, num espaço-tempo de Einstein-Cartan, uma curva C, parametrizada de acordo com os valores tomados por uma quantidade λ ("parâmetro afim"). Isto é, $C = C(\lambda)$. Estabelecendo um sistema de coordenadas nesta variedade e um conjunto canônico de vetores de base $\{\partial_\alpha\}$, escreve-se o vetor tangente à curva $C(\lambda)$, ("vetor velocidade"), denotado por u, como:

$$u(\lambda) = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\,\partial_\alpha \tag{2.3a}$$

$$= \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{d\lambda}\,. \tag{2.3b}$$

Sendo V um campo vetorial definido sobre o espaço-tempo em questão, deseja-se conhecer a taxa de variação de V sobre $C(\lambda)$, i.e., a derivada covariante direcional de V ao longo de $u(\lambda)$. No sistema de coordenadas estabelecido, tem-se:

$$\nabla_u V = \frac{DV^\alpha}{d\lambda}\,\partial_\alpha\,, \tag{2.4}$$

onde

$$\frac{DV^\alpha}{d\lambda} = V^\alpha{}_{;\rho}\, u^\rho \equiv \dot{V}^\alpha \tag{2.5a}$$

$$= \frac{dV^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\rho\beta}\, V^\beta u^\rho\,. \tag{2.5b}$$

Como se sabe, uma derivada covariante definida desta forma significa que se comparam comprimento e direção de vetores do campo V (tomados em eventos diferentes) no mesmo evento, para onde foram levados por transparente paralelo sobre a curva C(λ).

Diz-se, então, que V é transportado paralelamente ao longo de C(λ) quando ele sempre coincide com os vetores V de outros eventos desta curva:

$$\nabla_u V = 0\,.$$

Assim, a curva chamada autoparalela satisfará a condição

$$\nabla_u u = 0 \tag{2.6}$$

ou, num dado sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$,

$$\left(\frac{Du}{d\lambda}\right)^\mu = \frac{D}{d\lambda}\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)$$

$$= \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\,\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0\,. \tag{2.7}$$

A equação (2.7) acima é denominada "equação da autoparalela", semelhante à equação da geodésica da relatividade geral. Ela difere da equação para as curvas extremais (2.2) nos coeficientes de conexão, que aparecem em

(2.7) incluindo os termos de torção. É claro que, no limite de torção nula, os coeficientes Γ recaem nos símbolos de Christoffel e é recuperada a equação da geodésica das variedades riemannianas. Pode ser provado (Spivak 1970 , Cap. 6, Addendum 1) que uma família de autoparalelas é univocamente determinada pela torção e pela métrica. Este teorema impede, portanto, que uma mesma família de autoparalelas seja descrita por conexões afins diferentes.

CONEXÕES REGULARES.

Pode-se notar, em (2.7), que a equação da autoparela é simétrica nos índices α e β:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{(\alpha\beta)} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad ,$$

isto é,

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \left[\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} + 2\, \mathcal{T}^\mu{}_{(\alpha\beta)}\right] \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \ . \qquad (2.8)$$

Se a variedade U_4 for tal que

$$\mathcal{T}^\mu{}_{(\alpha\beta)} = 0 \ , \qquad (2.9)$$

a equação (2.8) assume a forma (2.2), havendo coincidência entre as autoparalelas e as curvas extremais desta variedade. Com a antissimetria já existente nos dois primeiros índices, a condição (2.9) implica num tensor de torção totalmente antissimétrico.

$$\tau_{\alpha\beta\gamma} = \tau_{[\alpha\beta\gamma]} \qquad (2.10)$$

e o número de componentes independentes deste tensor reduz-se a de 24 a 4.

Uma conexão ∇ que gere uma torção do tipo (2.10) é denominada <u>regular</u>.

A condição (2.10) implica, ainda, antissimetria total do tensor de contorção:

$$K_{\alpha\beta\gamma} = K_{[\alpha\beta\gamma]} = -\tau_{\alpha\beta\gamma} \ . \qquad (2.11)$$

A expressão (2.5) para o transporte paralelo de um campo vetorial V pode, ainda, ser escrita, explicitando os termos de torção:

$$\frac{DV^\mu}{d\lambda} = \frac{dV^\mu}{d\lambda} + \left\{ {\mu \atop \beta\alpha} \right\} V^\alpha u^\beta - K_{\beta\alpha}{}^{\mu} V^\alpha u^\beta \ . \qquad (2.12)$$

Tomando a projeção do termo que envolve a contorção na equação (2.12) acima com vetor u,

$$K_{\beta\alpha}{}^{\mu} V^\alpha u^\beta u_\mu = - K_{\beta\mu\alpha} V^\alpha u^\beta u^\mu \ , \qquad (2.13)$$

observa-se que o tensor simétrico $u^\beta u^\mu$ está contraído com os dois primeiros índices da contorção, que possuem a propriedade de antissimetria quando a conexão é regular. Portanto, (2.13) anula-se:

$$K_{\beta\mu\alpha} V^\alpha u^\beta u^\mu = 0 \ . \qquad (2.14)$$

Isto mostra que a parte que envolve a contorção (i.e., a torção) na equação (2.12) para a derivada covariante direcional de um campo vetorial ao longo de uma linha de universo arbitrária é ortogonal à direção desta linha (indicada pelo vetor unitário tangente à linha em cada evento). Entretanto, este resultado somente é válido se a conexão for regular.

DESVIO DAS AUTOPARALELAS.

Sendo as autoparalelas curvas que não são encontradas em relatividade geral, é de interesse que se estude o desvio entre duas autoparalelas de uma mesma congruência, o que vem evidenciar os efeitos da torção sobre o espaço-tempo.

Seja uma família de autoparalelas (figura 1).

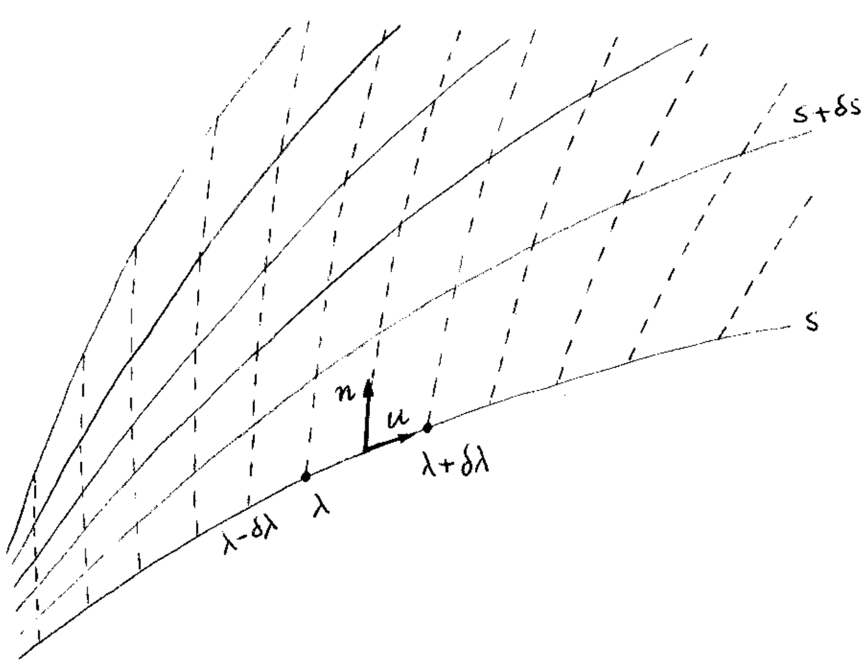

FIGURA 1

Uma autoparalela fica distinguida de uma outra nesta família pelo valor do parâmetro s ("parâmetro de seleção") atribuído a ela; em cada autoparalela, cada um de seus pontos fica caracterizado por um valor λ ("parâmetro afim").

Assim, o vetor tangente às autoparalelas fica escrito como:

$$u = \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad , \tag{2.15}$$

que sempre coincide com o comprimento e direção de u em todos os pontos da autoparalela, comparação esta realizada através de transporte paralelo.

Define-se, também, o vetor de desvio como

$$n = \frac{\partial}{\partial s} \quad . \tag{2.16}$$

Ele mede a separação entre a autoparalela s e uma autoparalela vizinha s + δs. δs é suposto suficientemente pequeno e tal que $\delta s \; n = \delta s \frac{\partial}{\partial s}$.

Pela equação (I.2.29), a torção associada à conexão ∇ foi definida como:

$$2\, T(U,V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V] \quad , \tag{2.17}$$

onde U e V são campos vetoriais arbitrários. Assim,

$$2\, T(u,n) = \nabla_u n - \nabla_n u - [u,n] \quad . \tag{2.18}$$

Acontece que:

$$[u,n] = \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial s}\right] = \frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial\lambda} = 0$$

e, portanto, (2.18) reduz-se a:

$$2\,T(u,n) = \nabla_u n - \nabla_n u \quad . \tag{2.19}$$

Esta relação fica evidente num referencial com base $\{e_\alpha\}$ e coordenadas $\{x^\alpha\}$, para as quais tem-se $n^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial s}$ e $u^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial\lambda}$:

$$\nabla_u n = \frac{Dn^\alpha}{d\lambda}\,e_\alpha = \left(\frac{dn^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,n^\nu u^\mu\right)e_\alpha$$

$$= \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial s\,\partial\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial s}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial\lambda}\right)e_\alpha \quad ;$$

$$\nabla_n u = \frac{Du^\alpha}{ds}\,e_\alpha = \left(\frac{du^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,u^\nu n^\mu\right)e_\alpha$$

$$= \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial s\,\partial\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial\lambda}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial s}\right)e_\alpha \,.$$

Logo,

$$\frac{Dn^\alpha}{d\lambda} - \frac{Du^\alpha}{ds} = 2\,\Gamma^\alpha_{[\mu\nu]}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial s}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial\lambda}$$

$$= 2\,\mathcal{T}_{\mu\nu}{}^{\alpha}\,u^\mu n^\nu \quad , \tag{2.20}$$

que é a expressão (2.19), escrita numa base coordenada.

A propósito da equação (2.20), pode-se observar que seu lado direito, ao ser projetado ao longo de u e de n, respectivamente, resulta em:

$$2\,\mathcal{T}_{\mu\nu\alpha}\,n^\nu u^\mu u^\alpha = -2\,\mathcal{T}_{\nu\mu\alpha}\,n^\nu u^\mu u^\alpha = 0 \;; \tag{2.21a}$$

$$2\, T_{\mu\nu\alpha}\, u^{\mu} n^{\nu} n^{\alpha} = 0 \quad . \tag{2.21b}$$

De modo que, no caso de uma conexão afim regular, $\frac{Dn^{\alpha}}{d\lambda} - \frac{Du^{\alpha}}{ds}$ é ortogonal ao vetor de desvio e à autoparalela.

Uma família de autoparalelas é denominada "relacionada afim" quando

$$\nabla_n u = 0 \quad , \tag{2.22}$$

i.e., quando u for transportado paralelamente à λ-ésima curva de desvio em cada s. Para uma família deste tipo, (2.20) se escreve:

$$\frac{Dn^{\alpha}}{d\lambda} = 2\, T_{\mu\nu}{}^{\alpha}\, u^{\mu} n^{\nu} \tag{2.23}$$

e, por (2.21), resulta que a taxa de variação covariante do vetor de desvio é ortogonal tanto ao próprio vetor de desvio como também à autoparalela.

A expressão para o desvio das autoparalelas se obtém partindo da própria equação de definição de autoparalela:

$$\nabla_u u = 0 \quad . \tag{2.24}$$

Tomando a diferença entre autoparalelas vizinhas s e s+δs; dividindo por δs e tomando o limite δs→0, obtém-se a derivada covariante da equação (2.24) acima na direção do vetor de desvio:

$$\nabla_n [\nabla_u u] = 0 \,. \tag{2.25}$$

Esta equação pode ser reescrita sob a forma:

$$\nabla_n \nabla_u u = \nabla_u \nabla_n u + \nabla_n \nabla_u u - \nabla_u \nabla_n u = 0 \,,$$

ou

$$\nabla_u \nabla_n u + [\nabla_n , \nabla_u] u = 0 \tag{2.26}$$

("equação do desvio"). Tomando a derivada covariante de (2.19) na direção de u, vem:

$$\nabla_u \nabla_u n - \nabla_u \nabla_n u = 2 \nabla_u T(u,n) \,. \tag{2.27}$$

Substituindo (2.27) na equação do desvio (2.26), resulta:

$$\nabla_u \nabla_u n = [\nabla_u , \nabla_n] u + 2 \nabla_u T(u,n) \,. \tag{2.28}$$

Desta forma, fica explicitada, no lado esquerdo de (2.28), a segunda derivada covariante do vetor de desvio ("aceleração relativa das autoparalelas").

Sendo V um campo vetorial definido sobre a família de autoparalelas, tem-se que, de acordo com (I.2.38):

$$\nabla_u \nabla_n V - \nabla_n \nabla_u V = [\nabla_u , \nabla_n] V$$

$$= R(u,n,V) \,. \tag{2.29}$$

Deste modo, fazendo V ≡ u,

$$[\nabla_u , \nabla_n] u = R(u,n,u) \,, \tag{2.30}$$

Substituindo (2.30) em (2.28), vem:

$$\nabla_u \nabla_u n = R(u,n,u) + 2\nabla_u T(u,n) \quad . \tag{2.31}$$

Esta equação generaliza, para o espaço-tempo de Riemann-Cartan, a equação do desvio geodésico. Será chamada, pois, equação do desvio das autoparalelas.

Numa base coordenada, (2.31) fica expressa como:

$$\frac{D^2 n^\alpha}{d\lambda^2} = R_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} u^\mu n^\nu u^\rho + 2\left(T_{\mu\nu}{}^{\alpha} u^\mu n^\nu\right)_{;\rho} u^\rho . \tag{2.32}$$

II.3 - Eletrodinâmica e Ótica Geométrica.

FÓTONS NÃO SENTEM TORÇÃO.

A equação do movimento de uma partícula com carga q e 4-momentum p, em relatividade especial, define o "tensor intensidade de campo eletromagnético" F, através da expressão para a força de Lorentz. Isto é,

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = q\, F^\alpha{}_\beta u^\beta \quad , \tag{3.1}$$

onde τ é o tempo próprio do referencial de repouso da partícula e u é sua 4-velocidade. Assim, F é dado por:

$$\| F_{\alpha\beta} \| = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

em termos das componentes xyz dos campos elétrico e magnético. Observe-se a antissimetria deste tensor:

$$F_{\alpha\beta} = - F_{\beta\alpha} \quad . \tag{3.3}$$

As componentes $F_{\alpha\beta}$ com que foram escritas as fórmulas acima resultam da expansão do tensor F em termos do produto tensorial de 1-formas de base:

$$F = F_{\alpha\beta} \; \omega^{\alpha} \otimes \omega^{\beta} \quad . \tag{3.4}$$

A propriedade (3.3) sugere a introdução do produto exterior entre estas 1-formas. Assim, por (I.3.59), escreve-se:

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \; \omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \quad . \tag{3.5}$$

O potencial vetor A da teoria eletromagnética gera o tensor F através da equação

F = - (parte antissimétrica de ∇A),

ou

$$F = dA \quad , \tag{3.6}$$

que, sob a forma de componentes, se escreve:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \quad . \tag{3.7}$$

Também é em termos de $F_{\alpha\beta}$ que se define a densidade lagrangiana para o campo eletromagnético, com a qual obtém-se o tensor de energia-momentum (Landau & Lifshitz 1975, § 33):

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{16\pi} \sqrt{-g}\, F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{3.8}$$

$$T^{\alpha\beta}_{EM} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\alpha\mu} F^{\beta}{}_{\mu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) \tag{3.9}$$

As equações de Maxwell se escrevem, então (Misner, Thorne & Wheeler 1973, Cap. 3):

$$dF = 0 \tag{3.10a}$$

ou

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \quad ; \tag{3.10b}$$

$$d^{*}F = 4\pi\, {}^{*}J \tag{3.11a}$$

ou

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 4\pi J^{\alpha} \quad , \tag{3.11b}$$

onde J é o 4-vetor corrente e definem-se os tensores duais

$$^{*}F = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu\alpha\beta}\, \omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \tag{3.12}$$

$$^{*}J = J^{\alpha} \eta_{\alpha} \quad , \tag{3.13}$$

usando (3.97a, d, f). A equação (3.11a) implica na lei de conservação da carga:

$$d^{*}J = 0 \tag{3.14a}$$

i.e.:

$$J^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{3.14b}$$

Aplicando o acoplamento mínimo para passar ao U_4, observa-se que (3.7) induz um tensor intensidade de campo dependente do potencial A:

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = 2\,\nabla_{[\alpha}A_{\beta]} = 2\,\partial_{[\alpha}A_{\beta]} - 2\,\Gamma^{\mu}_{[\alpha\beta]}A_{\mu}$$

$$= F_{\alpha\beta} - 2\,\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\mu}A_{\mu} \quad , \tag{3.15}$$

que é uma expressão dependente de uma transformação de gauge do tipo

$$A_{\mu} \longrightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu}\phi \tag{3.16}$$

Assim sendo*, o mais apropriado parece ser proibir a aplicação do acoplamento mínimo ao campo eletromagnético, de modo que será mantida a expressão do tensor $F_{\alpha\beta}$ em termos do potencial A_{α} (3.7), bem como as equações de

---

* O acoplamento mínimo aplicado a A_{α}, como em (3.15), também implicaria na perda da validade do princípio de conservação da carga. Ver Raychaudhuri (1975).

Maxwell (3.10, 11). Desta forma, a torção do espaço-tempo não afeta a trajetória de um fóton.

EQUAÇÕES DE MAXWELL EM U_4.

Entretanto, é de interesse expressar as equações de Maxwell sob forma covariante na variedade de Riemann-Cartan. Estes cálculos podem ser realizados no formalismo de formas diferenciais, como o fez Prasanna (1975c). O ponto de partida é, portanto, as eqs. (3.10a, 11a, 14a).

Aplicando a operação de derivação exterior à eq. (3.5), vem, por (I.3.68):

$$dF = \frac{1}{2}\, dF_{\alpha\beta}\, \omega^\alpha \wedge \omega^\beta + F_{\alpha\beta}\, d\omega^\alpha \wedge \omega^\beta . \qquad (3.17)$$

Introduzindo, agora, a derivação covariante exterior, e a 2-forma de torção, por intermédio de (I.3.75, 80a) escreve-se:

$$dF = \frac{1}{2}\left(\mathbb{D}F_{\alpha\beta} + \omega^\lambda{}_\alpha \wedge F_{\lambda\beta} + \omega^\lambda{}_\beta \wedge F_{\alpha\lambda}\right)\omega^\alpha \wedge \omega^\beta +$$

$$+ F_{\alpha\beta}\left(\Theta^\alpha - \omega^\alpha{}_\lambda \wedge \omega^\lambda\right) \wedge \omega^\beta \quad . \qquad (3.18)$$

Ora, por (I.3.71, 74, 91), tem-se:

$$dF = \left[\frac{1}{2}\left(\nabla_\lambda F_{\alpha\beta} + \Gamma^\gamma_{\lambda\alpha} F_{\gamma\beta} + \Gamma^\gamma_{\lambda\beta} F_{\alpha\gamma}\right) + F_{\gamma\beta}\left(\frac{1}{2} \mathcal{T}_{\lambda\alpha}{}^\gamma - \Gamma^\gamma_{\lambda\alpha}\right)\right]\omega^\lambda \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^\beta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\nabla_\lambda F_{\alpha\beta} + F_{\gamma\beta} \mathcal{T}_{\lambda\alpha}{}^\gamma\right) \omega^\lambda \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = 0 \qquad (3.19)$$

A permutação cíclica dos índices $\lambda\alpha\beta$ em (3.19), implica em:

$$\nabla_\lambda F_{\alpha\beta} + \nabla_\beta F_{\lambda\alpha} + \nabla_\alpha F_{\beta\lambda} = \mathcal{T}_{\lambda\alpha}{}^{\gamma} F_{\beta\gamma} + \mathcal{T}_{\beta\lambda}{}^{\gamma} F_{\alpha\gamma} + \mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} F_{\lambda\gamma} \quad (3.20)$$

ou, levando em conta a antissimetria de $F_{\alpha\beta}$ e de $\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$,

$$\nabla_{[\lambda} F_{\alpha\beta]} = \mathcal{T}_{[\lambda\alpha}{}^{\gamma} F_{\beta]\gamma} \quad , \quad (3.21)$$

obtendo, assim, a expressão em U_4 equivalente a $dF = 0$.

Da mesma forma, aplica-se a derivação exterior a $*F$, que, por (3.12), implica em:

$$d{*F} = \frac{1}{2}\left(dF^{\mu\nu} \wedge \eta_{\mu\nu\alpha\beta} + F^{\mu\nu} d\eta_{\mu\nu\alpha\beta}\right)\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + F^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu\alpha\beta}\, d\omega^\alpha \wedge \omega^\beta . \quad (3.22)$$

Por (I.3.97a), tem-se que:

$$d\eta_{\mu\nu\alpha\beta} = d\sqrt{-g}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu\alpha\beta}\, g^{\rho\lambda}\, dg_{\rho\lambda} \quad ; \quad (3.23)$$

por (I.3.100):

$$d\eta_{\mu\nu\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu\alpha\beta}\,\omega^\lambda{}_\lambda \quad .$$

Assim, substituindo (3.23) em (3.22) e usando, ainda ,

(I.3.75, 80a), vem:

$$d{*F} = \frac{1}{2}\left(\nabla_\rho F^{\mu\nu} - \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} F^{\lambda\nu} - \Gamma^{\nu}_{\rho\lambda} F^{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\right)\eta_{\mu\nu\alpha\beta}\,\omega^\rho \wedge \omega^\alpha \wedge \omega^\beta +$$

$$+ F^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\mathcal{T}_{\rho\lambda}{}^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\lambda}\right)\eta_{\mu\nu\alpha\beta}\,\omega^\rho \wedge \omega^\lambda \wedge \omega^\beta . \quad (3.24)$$

As expressões (I.3.97, 98) implicam que:

$$\eta_{\mu\nu\alpha\beta}\,\omega^{\rho}\wedge\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta} = 2\left(\delta^{\rho}_{\nu}\eta_{\mu} - \delta^{\rho}_{\mu}\eta_{\nu}\right) \qquad (3.25a)$$

$$\eta_{\mu\nu\alpha\beta}\,\omega^{\rho}\wedge\omega^{\lambda}\wedge\omega^{\beta} = \delta^{\lambda}_{\alpha}\left(\delta^{\rho}_{\nu}\eta_{\mu}-\delta^{\rho}_{\mu}\eta_{\nu}\right)+\delta^{\lambda}_{\nu}\left(\delta^{\rho}_{\mu}\eta_{\alpha}-\delta^{\rho}_{\alpha}\eta_{\mu}\right)+$$
$$+\,\delta^{\lambda}_{\mu}\left(\delta^{\rho}_{\alpha}\eta_{\nu}-\delta^{\rho}_{\nu}\eta_{\alpha}\right) \qquad (3.25b)$$

e, portanto, (3.24) torna-se, simplificando:

$$\begin{aligned} d{*}F &= \left(2\nabla_{\nu}F^{\mu\nu} + F^{\alpha\nu}T_{\alpha\nu}{}^{\mu} + 2F^{\mu\nu}T_{\nu\alpha}{}^{\alpha}\right)\eta_{\mu} \\ &= \left[2\nabla_{\nu}F^{\mu\nu} + \left(T_{\alpha\nu}{}^{\mu} + \delta^{\mu}_{\alpha}T_{\nu\sigma}{}^{\sigma} - \delta^{\mu}_{\nu}T_{\alpha\sigma}{}^{\sigma}\right)F^{\alpha\nu}\right]\eta_{\mu} \\ &= \left(2\nabla_{\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{T}_{\alpha\nu}{}^{\mu}F^{\alpha\nu}\right)\eta_{\mu} = J^{\mu}\eta_{\mu} \,. \end{aligned} \qquad (3.26)$$

Sendo η_{μ} uma base para 3-formas, de (3.26) resulta a expressão covariante em U_4 equivalente a $d{*}F = {*}J$:

$$2\nabla_{\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{T}_{\alpha\nu}{}^{\mu}F^{\alpha\nu} = J^{\mu} \qquad (3.27)$$

Finalmente, para a lei de conservação da carga (3.14), obtêm-se:

$$\begin{aligned} 0 = d{*}J &= dJ^{\mu}\wedge\eta_{\mu} + J^{\mu}d\eta_{\mu} \\ &= \left(\nabla_{\mu}J^{\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}J^{\mu}\right)\eta + \frac{1}{3}J^{\mu}\left(d\omega^{\nu}\wedge\eta_{\mu\nu} - \omega^{\nu}\wedge d\eta_{\mu\nu}\right), \end{aligned} \qquad (3.28)$$

onde ainda calcula-se, analogamente:

$$d\omega^{\nu} \wedge \eta_{\mu\nu} = -\mathcal{T}_{\mu\lambda}{}^{\lambda}\,\eta \tag{3.29}$$

$$\omega^{\nu} \wedge d\eta_{\mu\nu} = 2\mathcal{T}_{\mu\lambda}{}^{\lambda} - 3\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} \tag{3.30}$$

De modo que, juntando (3.28, 29, 30), vem:

$$d\,{}^{*}J = \left(\nabla_{\mu} J^{\mu} + \mathcal{T}_{\mu\lambda}{}^{\lambda} J^{\mu}\right) = 0 \tag{3.31}$$

ou

$$\nabla_{\mu} J^{\mu} + \mathcal{T}_{\mu\lambda}{}^{\lambda} J^{\mu} = 0 \ . \tag{3.32}$$

No tratamento einstein-cartaniano de um problema físico envolvendo eletromagnetismo, as equações de Maxwell devem ser utilizadas sob a forma das equações (3.21, 27, 32), por estarem escritas covariantemente para este contexto. Entretanto, estas equações não apresentam, devido à própria maneira com que foram obtidas, qualquer conseqüência além das já conhecidas em relatividade geral.

ÓTICA GEOMÉTRICA.

Nos limites da ótica geométrica (ondas planas em espaço-tempo com curvatura desprezível*), considera-se, para as equações de Maxwell desprovidas de fontes,

---

* Ver Misner, Thorne & Wheeler (1973), § 22.5.

$$\nabla_{[\lambda} F_{\alpha\beta]} = \mathcal{T}_{[\lambda\alpha}{}^{\gamma} F_{\beta]\gamma} \tag{3.33a}$$

$$2\, \nabla_{\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{T}_{\alpha\nu}{}^{\mu} F^{\alpha\nu} = 0 \quad , \tag{3.33b}$$

uma solução do tipo:

$$A = \mathcal{R}e \{ \mathcal{A}\, e^{i\phi} \} \tag{3.34}$$

onde $\mathcal{A}$ é a amplitude (complexa), da onda e ϕ sua fase. Esta solução deverá estar sujeita ao gauge de Lorentz:

$$\overset{*}{\nabla}_{\alpha} A^{\alpha} = \nabla_{\alpha} A^{\alpha} + 2\, \mathcal{T}_{\rho\alpha}{}^{\alpha} A^{\rho} = 0 \quad ,$$

ou

$$\overset{*}{\nabla}_{\alpha} A^{\alpha} = 0 . \tag{3.35}$$

Com estes elementos, introduzem-se o vetor de onda k, definido como

$$k_{\mu} = \phi_{,\mu} \tag{3.36a}$$

$$= \phi_{;\mu} = \phi_{:\mu} \tag{3.36b}$$

e a amplitude escalar:

$$a \equiv \left(\mathcal{A}^{\mu}\, \bar{\mathcal{A}}_{\mu} \right)^{1/2} \tag{3.37}$$

onde $\bar{\mathcal{A}}_{\mu}$ são as componentes do conjugado complexo da amplitude $\mathcal{A}$.

De acordo com Ellis (1971) e Misner (1969), a equação (3.33b) implica, no limite em que A_μ e k_μ são constantes, usando-se (3.35):

$$k^\mu k_\mu = 0 \quad , \tag{3.38}$$

o que expressa a condição de vetor nulo para k_μ. (3.35) ainda provê as relações:

$$k^\mu A_\mu = 0 \tag{3.39a}$$

$$\overset{*}{\nabla}_\rho A^\rho = 0 \quad . \tag{3.39b}$$

Diferenciando (3.38), tem-se:

$$0 = \frac{1}{2}\left(k^\nu k_\nu\right)_{:\mu} = k^\nu k_{\nu:\mu} = k^\nu\left(k_{\nu;\mu} + K_{\mu\nu}{}^{\alpha} k_\alpha\right)$$

$$= k^\nu k_{\nu;\mu} = k^\nu k_{\mu;\nu} \quad , \tag{3.40}$$

pois $k_{\nu;\mu} = \phi_{,\nu\mu} - k_\alpha \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} = \phi_{,\mu\nu} - k_\alpha \left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} = k_{\mu;\nu}$

Logo, (3.40) dá a equação de propagação do vetor de onda:

$$k^\mu{}_{;\nu} k^\nu = 0 \tag{3.41a}$$

ou

$$\overset{\{\}}{\nabla}_k k = 0 \quad . \tag{3.41b}$$

Observa-se, portanto, que a trajetória de um raio de luz é uma curva extremal nula da variedade de Riemann-Cartan, sobre a qual a torção do espaço-tempo não exerce qualquer influência. Este fato faz com que seja mantida a estrutura causal do espaço-tempo, isto é, sendo esta completamente determinada pela métrica. (ver Hehl, von der Heyde & Kerlick 1974 e Kerlick 1976).

Na aproximação de ótica geométrica, o tensor de energia-momentum para o campo eletromagnético (3.9) assume uma forma particularmente simples. A expressão para $F_{\alpha\beta}$, nesse caso, é obtida de (3.6), usando (3.34):

$$F_{\alpha\beta} = Re\left\{ i\, e^{i\theta} \left(k_\alpha A_\beta - A_\alpha k_\beta \right) \right\} . \tag{3.42}$$

Assim, substituindo (3.42) em (3.9) e tomando a média sobre um comprimento de onda*, a expressão para $\underset{EM}{T}_{\alpha\beta}$ torna-se:

$$\underset{EM}{T}_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}\, a^2\, k_\alpha k_\beta \quad , \tag{3.43}$$

usando, ainda, (3.38, 39a). Isto implica numa densidade (local) de energia

$$\underset{EM}{T}^{00} = \frac{1}{8\pi}\, a^2 \,(k^0)^2 \tag{3.44a}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\, a^2 \left(\frac{d\phi}{dx^0}\right)^2 = \frac{1}{8\pi}\, a^2 \omega^2 , \tag{3.44b}$$

onde $\omega \equiv \frac{d\phi}{dx^0}$ é a freqüência angular da onda, e o fluxo de energia ao longo da direção de propagação da onda ($\vec{k}/k^0$)é:

$$\underset{EM}{T}^{0j} = \frac{1}{8\pi}\, a^2\, k^0 k^j \quad . \tag{3.45}$$

* Ver Landau & Lifshitz (1975), § 48.

II.4 - Hidrodinâmica. Evolução dos parâmetros cinemáticos.

Neste trabalho, será considerado que a matéria que ocupa uma região do espaço-tempo forma um "fluido perfeito", i.e.,um fluido cuja pressão é isotrópica e no qual não há transferência de calor nem viscosidade. Pretende-se, neste parágrafo, fazer um estudo de como se comporta, no contexto de Einstein-Cartan, a evolução temporal dos parâmetros cinemáticos que caracterizam tal fluido: expansão , deformação e rotação.

FLUIDO PERFEITO COM SPIN.

Seja uma nuvem de partículas com spin fluindo pelo espaço-tempo, com 4-velocidade u^{α}, tal que:

$$u^{\alpha} u_{\alpha} = 1 \quad . \tag{4.1}$$

Não havendo uma lagrangiana para a descrição de uma distribuição deste tipo, os tensores canônicos fontes das equações de campo devem ser introduzidos através de definições baseadas em suposições fisicamente aceitáveis.

Assim, sendo, a distribuição de spin através de nuvem de partículas em questão é descrita pelo tensor de spin $S_{\alpha\beta}{}^{\rho}$, para a qual utiliza-se a chamada "descrição clássica" (Halbwachs 1960):

$$S_{\alpha\beta}{}^{\rho} = S_{\alpha\beta}\, u^{\rho} \quad , \tag{4.2}$$

onde $S_{\alpha\beta}$ é o tensor antissimétrico de densidade de spin . Também será considerada, para este tensor, a condição auxiliar de Frenkel:

$$S_{\alpha\beta}\, u^{\beta} = 0 \;, \tag{4.3}$$

definindo, assim, as propriedades de um "fluido de Weyssenhoff" (Weyssenhoff e Raabe 1947).

Segundo Kopczyński (1972), o tensor canônico de energia-momentum para esta distribuição de matéria pode ser tomado sob a forma:

$$t_{\alpha\beta} = h_{\alpha} u_{\beta} - p\, g_{\alpha\beta} \;, \tag{4.4}$$

onde p é a pressão (isotrópica) e h_{α} é o vetor "densidade de entalpia", cuja expressão pode ser obtida usando-se a lei de conservação do momentum angular (I.4.47):

$$t_{[\alpha\beta]} = \overset{*}{\nabla}_{\rho} S_{\alpha\beta}{}^{\rho} \;. \tag{4.5}$$

Como a densidade de massa-energia está relacionada com a energia-momentum através de

$$\rho = t_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} u^{\beta} = t_{(\alpha\beta)}\, u^{\alpha} u^{\beta} \;, \tag{4.6}$$

tem-se, por (4.4):

$$\rho = (h_{\alpha} u_{\beta} - p\, g_{\alpha\beta})\, u^{\alpha} u^{\beta}$$
$$= h_{\alpha} u^{\alpha} - p$$

i.e.,

$$h_\alpha u^\alpha = \rho + p \quad . \tag{4.7}$$

Então, de (4.5) tira-se, usando (4.3,7), que:

$$h_{[\alpha} u_{\beta]} u^\alpha = \frac{1}{2}\left(h_\alpha u^\alpha u_\beta - h_\beta\right) = \frac{1}{2}\left[(\rho+p)u_\beta - h_\beta\right]$$
$$= u^\alpha \overset{*}{\nabla}_\rho S_{\alpha\beta}{}^\rho = u^\alpha \nabla_\rho S_{\alpha\beta}{}^\rho \quad ,$$

ou seja,

$$h_\beta = (\rho+p)u_\beta - 2u^\alpha \nabla_\rho S_{\alpha\beta}{}^\rho \quad . \tag{4.8}$$

Assim, o tensor de energia-momentum se escreve:

$$t_{\alpha\beta} = \left[(\rho+p)u_\alpha - 2u^\lambda \nabla_\rho \left(S_{\lambda\alpha} u^\rho\right)\right] u_\beta - p\, g_{\alpha\beta} \, . \tag{4.9}$$

PARÂMETROS CINEMÁTICOS.

Sendo u^α a 4-velocidade do fluido, define-se sua 4-aceleração por:

$$a^\alpha \equiv \frac{Du^\alpha}{ds} = u^\alpha{}_{;\mu} u^\mu \equiv \dot{u}^\alpha \quad , \tag{4.10}$$

onde s é um parâmetro ao longo das linhas de universo das partículas que compõem o fluido, linhas às quais u^α é tangente.

Seja, também, o tensor h cujas componentes são dadas por:

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta \tag{4.11}$$

A contração de um vetor qualquer com h projeta este vetor sobre a 3-superfície ortogonal à 4-velocidade u. Daí o nome "tensor de projeção" para h. Ele possui as seguintes propriedades:

$$h_{\alpha\beta}\, h^\beta{}_\lambda = h_{\alpha\lambda} \tag{4.12a}$$

$$h_{\alpha\beta}\, u^\beta = 0 \tag{4.12b}$$

$$h_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} = 3 \tag{4.12c}$$

A velocidade relativa $v_{\alpha\beta}$ entre duas linhas de universo de partículas no fluido é definida como sendo a parte espacial da taxa de variação da posição relativa, o que resulta em:

$$v_{\alpha\beta} = h_\alpha{}^\lambda\, h_\beta{}^\rho\, u_{\lambda:\rho} \tag{4.13}$$

Separando a velocidade relativa em partes simétrica e antissimétrica,

$$v_{\alpha\beta} = v_{(\alpha\beta)} + v_{[\alpha\beta]} \quad , \tag{4.14}$$

define-se o <u>tensor de dilatação</u> $\theta_{\alpha\beta}$ como sendo a parte simétrica de $v_{\alpha\beta}$:

$$\theta_{\alpha\beta} \equiv v_{(\alpha\beta)} \quad , \tag{4.15a}$$

enquanto que a parte antissimétrica é identificada com o <u>tensor de rotação</u> $\omega_{\alpha\beta}$:

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv v_{[\alpha\beta]} \quad . \tag{4.15b}$$

Desta forma,*

$$v_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} \quad . \tag{4.16}$$

A dilatação $\theta_{\alpha\beta}$ pode ser decomposta em termos do <u>tensor de deformação</u>** $\sigma_{\alpha\beta}$ (de traço nulo) e de seu traço θ:

$$\theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\,\theta\, h_{\alpha\beta} \, . \tag{4.17}$$

Assim sendo, a derivada covariante do 4-vetor velocidade fica escrita:

$$u_{\alpha:\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\,\theta\, h_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \dot{u}_{\alpha} u_{\beta} \quad ; \tag{4.18}$$

com

$$\theta_{\alpha\beta} = h_{\alpha}{}^{\lambda} h_{\beta}{}^{\rho}\, u_{(\lambda:\rho)} \tag{4.19a}$$

$$\omega_{\alpha\beta} = h_{\alpha}{}^{\lambda} h_{\beta}{}^{\rho}\, u_{[\lambda:\rho]} \quad . \tag{4.19b}$$

---

* Estas definições foram dadas, pela primeira vez, por Ehlers (1961), embora utilizando a derivada covariante riemanniana. Ver, também, Ellis (1971) e Novello (1978 a,b).

** Em inglês, "shear".

Estes tensores, portanto, possuem as seguintes propriedades:

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_{(\alpha\beta)} \tag{4.20a}$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega_{[\alpha\beta]} \tag{4.20b}$$

$$\theta_{\alpha\beta}\, u^{\beta} = 0 = \omega_{\alpha\beta}\, u^{\beta} \tag{4.20c}$$

$$\sigma^{\alpha}{}_{\alpha} = 0 \tag{4.20d}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{(\alpha\beta)} \tag{4.20e}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}\, u^{\beta} = 0 \quad . \tag{4.20f}$$

Além disso, pode-se verificar que:

$$\theta = u^{\alpha}{}_{;\alpha} \quad , \tag{4.20g}$$

justificando o nome de expansão das linhas de universo do fluido para θ. (No caso de contração do fluido, define-se a convergência $K = -\theta$).

Finalmente, a derivada de (4.1) implica que:

$$a^{\alpha}\, u_{\alpha} = 0 \quad , \tag{4.20h}$$

isto é, a 4-aceleração também é tipo espaço.

EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO DA EXPANSÃO.

A identidade de Ricci (I.2.38) em Einstein-Cartan possui a seguinte expressão, aplicada ao 4-vetor velocidade:

$$u_{\alpha;\beta\gamma} - u_{\alpha;\gamma\beta} = R_{\beta\gamma\alpha}{}^{\lambda} u_{\lambda} + 2\, \tau_{\beta\gamma}{}^{\lambda} u_{\alpha;\lambda} \quad . \tag{4.21}$$

Multiplicando (4.21) por u^{γ}, vem:

$$u_{\alpha;\beta\gamma} u^{\gamma} - u_{\alpha;\gamma\beta} u^{\gamma} = R_{\beta\gamma\alpha}{}^{\lambda} u_{\lambda} u^{\gamma} + 2\, \tau_{\beta\gamma}{}^{\lambda} u_{\alpha;\lambda} u^{\gamma} . \tag{4.22}$$

Observe-se, em (4.22):

$$u_{\alpha;\beta\gamma} u^{\gamma} = (u_{\alpha;\beta})^{\cdot} \tag{4.23a}$$

$$u_{\alpha;\gamma\beta} u^{\gamma} = (u_{\alpha;\gamma} u^{\gamma})_{;\beta} - u_{\alpha;\gamma} u^{\gamma}{}_{;\beta}$$

$$= \dot{u}_{\alpha;\beta} - u_{\alpha;\gamma} u^{\gamma}{}_{;\beta} \quad . \tag{4.23b}$$

Assim, (4.22) se escreve:

$$(u_{\alpha;\beta})^{\cdot} - \dot{u}_{\alpha;\beta} + u_{\alpha;\gamma} u^{\gamma}{}_{;\beta} = R_{\beta\gamma\alpha\lambda} u^{\lambda} u^{\gamma} + 2\, \tau_{\beta\gamma}{}^{\lambda} u_{\alpha;\lambda} u^{\gamma}$$

ou, por (4.18),

$$\dot{\theta}_{\alpha\beta} + \dot{\omega}_{\alpha\beta} + \dot{a}_{\alpha} u_{\beta} + a_{\alpha} a_{\beta} - \dot{u}_{\alpha;\beta} + u_{\alpha;\gamma} u^{\gamma}{}_{;\beta} - 2\, \tau_{\beta\gamma}{}^{\lambda} u_{\alpha;\lambda} u^{\gamma} =$$

$$= R_{\beta\gamma\alpha\lambda} u^{\lambda} u^{\gamma} \quad . \tag{4.24}$$

Por outro lado,

$$\dot{u}_{\alpha:\beta} = \dot{u}_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha}\,\dot{u}_{\rho} = \dot{u}_{\alpha;\beta} + K_{\beta\alpha}{}^{\rho}\,\dot{u}_{\rho} \tag{4.25}$$

$$u_{\alpha:\gamma}\,u^{\gamma}{}_{:\beta} = (\theta_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha\gamma} + a_{\alpha}u_{\gamma})(\theta^{\gamma}{}_{\beta} + \omega^{\gamma}{}_{\beta} + a^{\gamma}u_{\beta}) \tag{4.26}$$

Substituindo (4.25, 26) em (4.24), obtém-se:

$$\dot{\theta}_{\alpha\beta} + \dot{\omega}_{\alpha\beta} + \dot{a}_{\alpha}u_{\beta} + a_{\alpha}a_{\beta} - \dot{u}_{\alpha;\beta} - K_{\beta\alpha}{}^{\rho}a_{\rho} + (\theta_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha\gamma} + a_{\alpha}u_{\gamma})\cdot$$

$$\cdot(\theta^{\gamma}{}_{\beta} + \omega^{\gamma}{}_{\beta} + a^{\gamma}u_{\beta}) - 2u_{\alpha:\gamma}\,\tau_{\beta\lambda}{}^{\gamma}u^{\lambda} = R_{\beta\gamma\alpha\lambda}u^{\lambda}u^{\gamma} \tag{4.27}$$

Contraindo α com β na equação acima, tem-se:

$$\dot{\theta}^{\alpha}{}_{\alpha} = \dot{\theta} = \theta_{,\alpha}\,u^{\alpha} \tag{4.28a}$$

$$\dot{\omega}^{\alpha}{}_{\alpha} = 0 \tag{4.28b}$$

$$\dot{a}_{\alpha}u^{\alpha} + a_{\alpha}a^{\alpha} = (a^{\alpha}u_{\alpha})^{\cdot} = 0 \tag{4.28c}$$

$$\dot{u}^{\alpha}{}_{:\alpha} = \dot{u}^{\alpha}{}_{;\alpha} - K_{\alpha\rho}{}^{\alpha}\,\dot{u}^{\rho}$$

$$= \dot{u}^{\alpha}{}_{;\alpha} - 2\tau_{\rho\alpha}{}^{\alpha}\,a^{\rho} \tag{4.28d}$$

$$u_{\alpha:\gamma}\,u^{\gamma:\alpha} = \theta_{\alpha\gamma}\theta^{\gamma\alpha} + \omega_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma\alpha} + a_{\alpha}u_{\gamma}\theta^{\gamma\alpha} + a_{\alpha}u_{\gamma}\omega^{\gamma\alpha} + a_{\alpha}u_{\gamma}a^{\gamma}u^{\alpha}$$

$$= \left(\sigma_{\alpha\gamma} + \frac{1}{3}\theta h_{\alpha\gamma}\right)\left(\sigma^{\alpha\gamma} + \frac{1}{3}\theta h^{\alpha\gamma}\right) - \omega_{\alpha\gamma}\omega^{\alpha\gamma}$$

$$= \frac{1}{3}\theta^{2} + \sigma_{\alpha\gamma}\sigma^{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\gamma}\omega^{\alpha\gamma} \tag{4.28e}$$

$$R^{\alpha}{}_{\gamma\alpha\lambda}u^{\lambda}u^{\gamma} = -R_{\alpha\gamma\lambda}{}^{\alpha}u^{\lambda}u^{\gamma} = -R_{\gamma\lambda}u^{\gamma}u^{\lambda} \tag{4.28f}$$

e chega-se à expressão

$$\theta_{,\alpha}u^{\alpha} - \dot{u}^{\alpha}{}_{;\alpha} + 2\tau_{\rho\alpha}{}^{\alpha}a^{\rho} + \frac{1}{3}\theta^{2} + \sigma_{\alpha\gamma}\sigma^{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\gamma}\omega^{\alpha\gamma} +$$

$$- 2u^{\alpha}{}_{:\gamma}\tau_{\alpha\lambda}{}^{\gamma}u^{\lambda} = - R_{\gamma\lambda}u^{\gamma}u^{\lambda} \quad . \tag{4.29}$$

A torção expressa-se em termos do tensor de spin como (Galvão 1976, p.23):

$$\tau_{\alpha\beta\gamma} = 8\pi\left(S_{\alpha\beta\gamma} - g_{\gamma[\alpha}S_{\beta]\rho}{}^{\rho}\right) \quad . \tag{4.30}$$

As restrições (4.2, 3) implicam que os termos $g_{\gamma[\alpha}S_{\beta]\rho}{}^{\rho}$ se anulam; portanto,

$$\tau_{\alpha\beta\gamma} = 8\pi S_{\alpha\beta\gamma} \quad . \tag{4.31}$$

Entretanto, ao ser contraída, esta expressão se anula:

$$\tau_{\rho\alpha}{}^{\alpha} = 8\pi S_{\rho\alpha}{}^{\alpha} = 0 \quad , \tag{4.32}$$

Além disso,

$$\tau_{\alpha\lambda}{}^{\gamma}u_{\gamma} = 8\pi S_{\alpha\lambda}{}^{\gamma}u^{\lambda} = 0 \quad , \tag{4.33}$$

de modo que os termos onde ocorre explicitamente a torção desaparecem. Portanto, (4.29) torna-se:

$$\theta_{,\alpha}u^{\alpha} + \frac{\theta^{2}}{3} - \dot{u}^{\alpha}{}_{;\alpha} + \sigma_{\alpha\gamma}\sigma^{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\gamma}\omega^{\alpha\gamma} = - R_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} . \tag{4.34}$$

O lado direito de (4.34) pode ser reescrito em termos do tensor canônico de energia-momentum, através da primeira equação de campo:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R^{\rho}{}_{\rho} = 8\pi\, t_{\alpha\beta} \quad . \tag{4.35}$$

Contraindo (4.35), vem:

$$R^{\alpha}{}_{\alpha} = -\, 8\pi\, t^{\alpha}{}_{\alpha} \quad .$$

Logo,

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi \left(t_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} t^{\rho}{}_{\rho} \right) . \tag{4.36}$$

Com a expressão do tensor canônico de energia-momentum para o fluido perfeito (4.9), vê-se que seu traço é

$$\begin{aligned} t^{\alpha}{}_{\alpha} &= [(\rho+p)u^{\alpha} - 2u^{\lambda} \nabla_{\mu}(u^{\mu} S_{\lambda}{}^{\alpha})]u_{\alpha} - 4p \\ &= \rho - 3p - 2u^{\lambda} u^{\alpha} \nabla_{\mu}(u^{\mu} S_{\lambda\alpha}) \\ &= \rho - 3p \end{aligned} \tag{4.37}$$

Desta forma, a expressão $R_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}$ fica, usando (4.6):

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} &= 8\pi \left(t_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} t^{\rho}{}_{\rho} \right) \\ &= 4\pi (\rho + 3p) . \end{aligned} \tag{4.38}$$

Portanto, a equação de evolução da expansão (generalização da chamada "equação de Raychaudhuri") se torna:

$$\theta_{,\alpha} u^{\alpha} + \frac{\theta^2}{3} - \dot{u}^{\alpha}{}_{;\alpha} + \sigma_{\alpha\gamma}\sigma^{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\gamma}\omega^{\alpha\gamma} + 4\pi(\rho+3p) = 0. \quad (4.39)$$

Assim escrita, esta equação possui a mesma forma de sua equação análoga obtida no contexto da relatividade geral (Raychaudhuri 1955; ver, também, Ryan & Shepley 1975). Observe-se, no entanto, que a diferença está nas definições de $\theta_{\alpha\beta}$ e $\omega_{\alpha\beta}$, neste caso em termos da conexão de Riemann-Cartan. Entretanto,

$$\theta_{\alpha\beta} = h_{\alpha}{}^{\lambda} h_{\beta}{}^{\rho} u_{(\lambda;\rho)} = h_{\alpha}{}^{\lambda} h_{\beta}{}^{\rho}\left[u_{(\lambda;\rho)} + K_{(\rho\lambda)}{}^{\gamma} u_{\gamma}\right]. \quad (4.40)$$

Ora,

$$K_{(\beta\alpha)\rho} = \tau_{\alpha\rho\beta} + \tau_{\beta\rho\alpha}$$

$$= 8\pi(S_{\alpha\rho\beta} + S_{\beta\rho\alpha})$$

e, portanto,

$$K_{(\beta\alpha)\rho} u^{\rho} = 8\pi\,(S_{\alpha\rho} u_{\beta} u^{\rho} + S_{\beta\rho} u_{\alpha} u^{\rho}) = 0\,,$$

de modo que

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta}(\{\})\,, \quad (4.41)$$

onde $\theta_{\alpha\beta}(\{\})$ é a dilatação dependente da conexão riemanniana. Devido a (4.41), não se alteram os termos de (4.37) de pendentes de Θ e de $\sigma_{\alpha\beta}$:

Por outro lado,

$$\omega_{\alpha\beta} = h_\alpha{}^\lambda h_\beta{}^\rho u_{[\lambda:\rho]} = h_\alpha{}^\lambda h_\beta{}^\rho (u_{[\lambda;\rho]} + K_{[\rho\lambda]}{}^\gamma u_\gamma), \quad (4.42)$$

$$K_{[\rho\lambda]}{}^\gamma u_\gamma = - \tau_{\rho\lambda}{}^\gamma u_\gamma = - 8\pi S_{\rho\lambda} \;,$$

de modo que

$$h_\alpha{}^\lambda h_\beta{}^\rho K_{[\rho\lambda]}{}^\gamma u_\gamma = - 8\pi S_{\beta\alpha} = 8\pi S_{\alpha\beta} \quad (4.43)$$

e então

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}(\{\}) + 8\pi S_{\alpha\beta} \;, \quad (4.44)$$

em que $\omega_{\alpha\beta}(\{\})$ significa a rotação definida em termos da conexão sem torção.

Finalmente, a equação de evolução da expansão Θ na teoria de Einstein-Cartan (Stewart & Hājīček 1973 ; Tafel (1973):

$$\theta_{,\alpha} u^\alpha + \frac{1}{3}\theta^2 - \dot{u}^\alpha{}_{;\alpha} + 2\sigma^2 - (\omega_{\alpha\beta}(\{\}) + 8\pi S_{\alpha\beta})(\omega^{\alpha\beta}(\{\}) + 8\pi S^{\alpha\beta}) + 4\pi(\rho + 3p) = 0, \quad (4.45)$$

definindo-se

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \;. \quad (4.46)$$

Fica, assim, explicitada a influência do spin a expansão do fluido.

EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO DO TENSOR DE DEFORMAÇÃO.

Definindo o vetor de rotação ω^{μ} associado ao tensor $\omega_{\alpha\beta}$ como (Ellis 1971):

$$\omega^{\mu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\rho\mu} \omega_{\alpha\beta} u_{\rho} \tag{4.47a}$$

ou

$$\omega_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\mu\nu} \omega^{\mu} u^{\nu} , \tag{4.47b}$$

com $\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$ dado por (I.3. 97a,f), tem-se que,

$$\omega^{\mu} \omega_{\mu} = \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} \equiv \omega^{2} . \tag{4.48}$$

Retornando a (4.27), simetrizando, vem:

$$\dot{\theta}_{\alpha\beta} + \dot{a}_{(\alpha} u_{\beta)} + a_{\alpha} a_{\beta} - \dot{u}_{(\alpha;\beta)} - K_{(\beta\alpha)}{}^{\rho} a_{\rho} + \theta_{\gamma(\alpha} \theta^{\gamma}{}_{\beta)} + $$
$$+ \omega_{\gamma(\alpha} \omega_{\beta)}{}^{\gamma} + a^{\gamma} u_{(\beta} \theta_{\alpha)\gamma} + a^{\gamma} u_{(\beta} \omega_{\alpha)\gamma} = R_{(\beta}{}^{\gamma}{}_{\alpha)\lambda} u^{\lambda} u_{\gamma} , \tag{4.49}$$

onde foi usado (4.33).

Usando (4.17) e projetando, tem-se:

$$h_{\mu}{}^{\alpha} h_{\nu}{}^{\beta} \dot{\theta}_{\alpha\beta} = h_{\mu}{}^{\alpha} h_{\nu}{}^{\beta} \dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \dot{\theta} h_{\mu\nu} \tag{4.50a}$$

$$h_{\mu}{}^{\alpha} h_{\nu}{}^{\beta} \dot{a}_{(\alpha} u_{\beta)} = 0 \tag{4.50b}$$

$$h_{\mu}{}^{\alpha} h_{\nu}{}^{\beta} a_{(\alpha} a_{\beta)} = a_{\mu} a_{\nu} \tag{4.50c}$$

$$h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta K_{(\beta\alpha)}{}^\rho a_\rho = 8\pi h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta (S_{\alpha\rho} u_\beta + S_{\beta\rho} u_\alpha) a^\rho = 0 \quad (4.50d)$$

$$h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta \theta_{\gamma(\alpha}\theta^\gamma{}_{\beta)} = h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta \left[\sigma_{\gamma(\alpha}\sigma_{\beta)}{}^\gamma + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{9}\theta^2 h_{\alpha\beta}\right]$$

$$= \sigma_{\gamma\mu}\sigma_\nu{}^\gamma + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{9}\theta^2 h_{\mu\nu} \quad (4.50e)$$

$$h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta \omega_{\gamma(\alpha}\omega_{\beta)}{}^\gamma = \omega_{\gamma(\mu}\omega_{\nu)}{}^\gamma \quad (4.50f)$$

$$h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta a^\gamma u_{(\beta}\theta_{\alpha)\gamma} = 0 \quad (4.50g)$$

$$h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta a^\gamma u_{(\beta}\omega_{\alpha)\gamma} = 0 \quad , \quad (4.50h)$$

de forma que (4.49) vem a ser escrita como:

$$h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta \dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta_{,\rho}u^\rho h_{\mu\nu} + a_\mu a_\nu - h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta \dot{u}_{(\alpha;\beta)} + \sigma_{\gamma\mu}\sigma_\nu{}^\gamma +$$

$$+ \frac{2}{3}\theta\sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{9}\theta^2 h_{\mu\nu} + \omega_{\gamma(\mu}\omega_{\nu)}{}^\gamma = h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta R_{(\beta}{}^\gamma{}_{\alpha)\lambda} u_\gamma u^\lambda . \quad (4.51)$$

Usando (4.47), tem-se que:

$$\omega_{\gamma\mu}\omega^{\nu\gamma} = \eta_{\gamma\mu\alpha\beta}\,\eta^{\nu\gamma\rho\sigma}\omega^\alpha\omega_\rho u^\beta u_\sigma$$

$$= \delta_\mu^\nu \omega^\rho a_\rho u^\sigma u_\sigma - \delta_\mu^\nu \omega^\sigma \omega_\beta u^\beta u_\sigma - \omega^\rho\omega_\rho u^\nu u_\mu +$$

$$+ \omega^\sigma \omega_\mu u^\nu u_\sigma - \omega^\nu \omega_\mu u^\sigma u_\sigma + \omega^\nu \omega_\beta u^\beta u_\mu$$

$$= \delta_\mu^\nu \omega^\rho\omega_\rho - \omega^\rho\omega_\rho u_\mu u^\nu - \omega_\mu\omega^\nu \quad (4.52)$$

e, por (4.48),

$$\omega_{\gamma\mu}\,\omega^{\nu\gamma} = \omega^2\left(\delta_\mu^\nu - u_\mu u^\nu\right) - \omega_\mu\,\omega^\nu$$
$$= \omega^2 h_\mu{}^\nu - \omega_\mu\,\omega^\nu$$

donde

$$\omega_{\gamma\mu}\,\omega_\nu{}^\gamma = \omega^2 h_{\mu\nu} - \omega_\mu\,\omega_\nu$$

e, portanto,

$$\omega_{\gamma(\mu}\,\omega_{\nu)}{}^\gamma = \omega^2 h_{\mu\nu} - \omega_\mu\,\omega_\nu \quad . \qquad (4.53)$$

O segundo termo de (4.51) pode ser substituído pela equação de expansão da dilatação (4.39):

$$\theta_{,\rho}u^\rho = R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta - \frac{1}{3}\theta^2 + \dot{u}^\alpha{}_{;\alpha} - 2\sigma^2 - 2\omega^2 \,, \qquad (4.54)$$

e, levando em conta (4.53), (4.51) torna-se:

$$h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta\dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\dot{u}^\alpha{}_{;\alpha}h_{\mu\nu} + a_\mu a_\nu + \frac{1}{3}h_{\mu\nu}\left(\omega^2 - 2\sigma^2\right) - h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta\dot{u}_{(\alpha;\beta)} +$$
$$+ \sigma_{\gamma\mu}\sigma_\nu{}^\gamma + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\mu\nu} - \omega_\mu\omega_\nu = h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta R_{(\beta}{}^\gamma{}_{\alpha)\lambda}u_\gamma u^\lambda - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta . \qquad (4.55)$$

Devido a (4.41), como o spin não afeta a dilatação, a deformação $\sigma_{\alpha\beta}$ também possui o mesmo significado que em relatividade geral:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}\,(\mathrm{RG}) \qquad (4.56)$$

O produto $a_\mu a_\nu$ também não é afetado pelo spin, pois

$$a_\mu = a_\mu(44) + 2\tau_{\mu\lambda\rho}\, u^\lambda u^\rho$$

$$= a_\mu(44) + 16\pi S_{\mu\lambda} u_\rho u^\lambda u^\rho = a_\mu(44)\,, \qquad (4.57)$$

devido a (4.3). Entretanto, quanto ao termo $\omega_\mu \omega_\nu$, efeitos provocados pelo spin fornecem um desvio em relação aos resultados da relatividade geral. Usando (4.47) e as propriedades do tensor de Levi-Civita, vem que:

$$\omega_\mu \omega_\nu = \frac{1}{2}\omega_{\mu\alpha}\omega_\nu{}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\omega_{\mu\alpha}(44) + 8\pi S_{\mu\alpha}\right)\left(\omega_\nu{}^\alpha(44) + 8\pi S_\nu{}^\alpha\right), \qquad (4.58)$$

por (4.44), e também,

$$\omega^2 = \omega_\mu \omega^\mu = \frac{1}{2}\omega_{\mu\alpha}\omega^{\mu\alpha} = \frac{1}{2}\left(\omega_{\mu\alpha}(44) + 8\pi S_{\mu\alpha}\right)\left(\omega^{\mu\alpha}(44) + 8\pi S^{\mu\alpha}\right). \qquad (4.59)$$

EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO DO TENSOR DE ROTAÇÃO.

Retornando, novamente, a (4.27), toma-se, agora, sua antissimetrização, resultando:

$$\dot{\omega}_{\alpha\beta} + \dot{a}_{[\alpha} u_{\beta]} - \dot{u}_{[\alpha;\beta]} - K_{[\beta\alpha]}{}^\rho a_\rho + \theta_{[\alpha|\gamma}\omega^\gamma{}_{|\beta]} + \omega_{[\alpha|\gamma}\theta^\gamma{}_{|\beta]} +$$

$$+ a^\gamma \theta_{\gamma[\alpha} u_{\beta]} - a^\gamma \omega_{\gamma[\alpha} u_{\beta]} = R_{[\beta}{}^\gamma{}_{\alpha]\lambda} u^\lambda u_\gamma \quad . \qquad (4.60)$$

Observe-se, na equação acima, que:

$$K_{[\beta\alpha]}{}^\rho a_\rho = \tau_{\alpha\beta}{}^\rho a_\rho = 8\pi S_{\alpha\beta} u^\rho a_\rho = 0\,, \qquad (4.61)$$

por (4.20h) e também,

$$\theta_{[\alpha|\gamma}\,\omega^{\gamma}{}_{|\beta]} + \omega_{[\alpha|\gamma}\,\theta^{\gamma}{}_{|\beta]} = 2\,\theta_{[\alpha|\gamma}\,\omega^{\gamma}{}_{|\beta]} \quad . \tag{4.62}$$

Substituindo (4.61, 62) em (4.60) e projetando, vem:

$$h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta\,\dot{\omega}_{\alpha\beta} - h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta\,\dot{u}_{[\alpha;\beta]} + 2\,\theta_{[\mu|\gamma}\,\omega^{\gamma}{}_{|\nu]} =$$

$$= h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta\,R_{[\beta}{}^{\gamma}{}_{\alpha]}{}^{\lambda}\,u_\lambda u_\gamma \,. \tag{4.63}$$

Usando (4.17), esta equação torna-se:

$$h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta\,\dot{\omega}_{\alpha\beta} - h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta\,\dot{u}_{[\alpha;\beta]} + 2\,\sigma_{[\mu|\gamma}\,\omega^{\gamma}{}_{|\nu]} + \frac{2}{3}\,\theta\,\omega_{\mu\nu} =$$

$$= h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta\,R_{[\beta}{}^{\gamma}{}_{\alpha]}{}^{\lambda}\,u_\lambda u_\gamma \,. \tag{4.64}$$

CAPÍTULO III

ESTRELAS RELATIVISTAS COM SPIN E TORÇÃO.

III.1 - Estrelas esféricas e spin.

O objetivo deste capítulo é estudar a aplicabilidade das equações de campo da teoria de Einstein-Cartan no caso de um problema específico: obter soluções (e discutir suas características e conseqüências) para o campo gravitacional de esferas de fluido perfeito com spin. Pretende-se, desta forma, estudar a viabilidade de que estas soluções venham a ser usadas em modelos de objetos astrofísicos que apresentem simetria esférica e densidade de spin não nula.

A discussão será limitada ao caso de simetria esférica, tanto na distribuição de matéria como na distribuição de spin, já que esta simetria é considerada suficiente para a descrição de vários objetos celestes: estrelas (com pequena rotação), planêtas, aglomerados globulares de estrelas, galáxias tipo EO e aglomerados esféricos de galáxias.

Neste trabalho, serão consideradas duas espécias de "estrelas" com spin: (1) estrela estática (solução tipo Schwarzschild interior) e (2) estrela dinâmica (solução tipo Vaidya). A primeira espécie corresponde a uma distribuição de matéria com raio definido e constante, enquanto que, na segunda espécie, o raio da distribuição é uma função do tempo e envolta numa camada de radiação eletromagnética pura irradiada para fora da distribuição.

ELEMENTO DE LINHA.

Pelo tipo de simetria que será tratado, o sistema de coordenadas a ser utilizado no 3-espaço será o esférico (r,θ,ϕ), em que r é o raio de uma esfera concêntrica com a estrela e (θ,ϕ) são as coordenadas angulares sobre esta esfera. A coordenada temporal t será tal que, a uma distância muito grande da estrela (i.e., quando $r\to\infty$), seja idêntica ao tempo próprio de um observador em repouso com relação à estrela. Assim, no limite $r\to\infty$, onde os efeitos gravitacionais são desprezíveis, o espaço-tempo será plano com métrica de Minkowski . Nestas coordenadas, o elemento de linha assumirá, portanto, a forma:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 . \quad (1.1)$$

Entretanto, nas regiões do espaço-tempo que poderão sofrer a influência do campo gravitacional da distribuição, o elemento de linha deverá assumir uma expressão do tipo* ("coordenadas de Schwarzschild"):

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right), \quad (1.2)$$

onde, em geral, ν e λ são funções de t e r. O problema consiste em determinar estes "potenciais gravitacionais" em termos das grandezas físicas que caracterizam a distribuição de matéria.

---

* Ver Tolman (1934).

No caso de distribuição estática, as componentes da matéria serão independentes da coordenada temporal : $\partial g_{\alpha\beta}/\partial t = 0$. Desta forma, os potenciais ν e λ serão funções somente da coordenada radial.

Observe-se, também, que, para distribuições não-estáticas, se se escolhe um referencial comóvel com o fluido, o elemento de linha com simetria esférica não poderá ter a forma (1.2), devendo ser incluído mais um potencial:

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r'(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2), \qquad (1.3)$$
$$\nu = \nu(t,r), \quad \lambda = \lambda(t,r), \quad r' = r'(t,r).$$

DESCRIÇÃO DA MATÉRIA NO INTERIOR ESTELAR.

Sendo R o raio da distribuição, o material em seu interior (i.e., $r<R$) será idealizado como um fluido perfeito com polarização esfericamente simétrica, de modo que os parâmetros mais relevantes serão:

ρ : densidade de massa-energia,

p : pressão hidrostática (isotrópica),

u^{α}: 4-velocidade do fluido,

$S_{\alpha\beta}$: densidade de spin,

todos medidos no referencial de repouso do fluido. Portanto, são considerados válidos os seguintes resultados do parágrafo II.4:

(1) O tensor densidade de spin $S_{\alpha\beta}$ é antissimétrico e relaciona-se ao tensor de spin $S_{\alpha\beta}{}^{\rho}$ por:

$$S_{\alpha\beta}{}^{\rho} = S_{\alpha\beta}\, u^{\rho} \quad , \tag{1.4a}$$

$$S_{\alpha\beta}\, u^{\beta} = 0 \quad ; \tag{1.4b}$$

(2) O tensor de energia-momentum do fluido é dado por (II.4.9):

$$t_{\alpha\beta} = \left[(\rho+p)u_{\alpha} - 2u^{\rho}\nabla_{\lambda}(S_{\rho\alpha}u^{\lambda})\right]u_{\beta} - g_{\alpha\beta} \quad ; \tag{1.5}$$

(3) Normalização da 4-velocidade:

$$u_{\alpha}u^{\alpha} = 1 \, . \tag{1.6}$$

O referencial a ser utilizado será sempre o de repouso para o fluido. Neste referencial, as componentes da 4--velocidade são:

$$u^{0} = e^{-\nu/2} \quad , \qquad u^{i} = 0 \, . \tag{1.7}$$

Além disso, se se supõe que os spins das partículas individuais que compõem o fluido estão todos alinhados na direção radial, tem-se que o 4-vetor densidade de momentum angular intrínseco* $S_{\beta}(r)$ será da forma $(0,S_1,0,0)$ e como sua relação com o tensor densidade de spin é dada por:

$$S^{\mu\nu} = u_{\alpha} S_{\beta}\, \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{1.8a}$$

$$= u_{0} S_{1}\, \epsilon^{01\mu\nu} \quad , \tag{1.8b}$$

---

* Ver Misner, Thorne e Wheeler (1973), p.158 e Kuchowicz (1978).

somente as componentes $S^{23} = -S^{32}$ assumirão valores diferentes de zero. Conseqüentemente, por (1.4a), as componentes não nulas de $S_{\alpha\beta}{}^{\rho}$ são:

$$S_{23}{}^{0} = -S_{32}{}^{0} = S(r)\, u^{0} \quad . \tag{1.9}$$

MÉTRICA EXTERIOR.

Foi mostrado no parágrafo II.1 que a segunda equação de campo de Einstein-Cartan, $\mathfrak{T}_{\mu\nu}{}^{\alpha} = 8\pi S_{\mu\nu}{}^{\alpha}$, sendo algébrica, somente influencia a geometria do espaço-tempo no interior da distribuição de matéria, não se propagando fora dela. Devido ao teorema de Birkhoff, pode-se afirmar, então, que, no vácuo exterior à estrela, a métrica assume a conhecida forma obtida por Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \quad r > R, \tag{1.10}$$

onde M é uma constante que expressa a massa-energia total da distribuição de matéria.

III.2 - Estrela estática.

EQUAÇÕES DE CAMPO E LEIS DE CONSERVAÇÃO NO CASO ESTÁTICO.

Como já foi discutido no parágrafo anterior, o elemento de linha a ser utilizado será:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \quad . \tag{2.1}$$

Neste sistema de coordenadas, as tetradas ortonormais carregadas pelos elementos do fluido podem ser escolhidas como:

$$e_{\hat{0}} = e^{-\nu/2}\frac{\partial}{\partial t}\ ;\ e_{\hat{1}} = e^{-\lambda/2}\frac{\partial}{\partial r}\ ;\ e_{\hat{2}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\ ;\ e_{\hat{3}} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\ , \tag{2.2}$$

cujas 1-formas duais são:

$$\omega^{\hat{0}} = e^{\nu/2}dt\ ;\ \omega^{\hat{1}} = e^{\lambda/2}dr\ ;\ \omega^{\hat{2}} = r\,d\theta\ ;\ \omega^{\hat{3}} = r\sin\theta\,d\varphi\ , \tag{2.3}$$

em termos das quais o elemento de linha (2.1) assume a forma minkowskiana

$$ds^2 = (\omega^{\hat{0}})^2 - (\omega^{\hat{1}})^2 - (\omega^{\hat{2}})^2 - (\omega^{\hat{3}})^2\ . \tag{2.4}$$

Nesta base de tetradas, a 4-velocidade do fluido se torna:

$$u^{\hat{\alpha}} = \delta^{\hat{\alpha}}_{0}\ . \tag{2.5}$$

No capítulo II, mostrou-se que, para um fluido de Weyssenhoff, a relação entre os tensores de torção e de densidade de spin (segunda equação de campo) é dada por (II.4.31):

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 8\pi\, S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\ . \tag{2.6}$$

Assim, devido a (1.9), as únicas componentes não nulas do tensor $\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ são:

$$\mathcal{T}_{23}{}^{0} = -\mathcal{T}_{32}{}^{0} = 8\pi\, u^0\, S(r)\,. \tag{2.7}$$

Levando-se isto em conta, realiza-se, na base de tetradas (2.2), o cálculo do tensor de Ricci (ver Apêndice 1), encontrando-se não nulas as componentes:

$$R_{\hat{0}\hat{0}} = \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'}{r}\right) e^{-\lambda} + 128\pi^2 S^2 , \tag{2.8a}$$

$$R_{\hat{1}\hat{1}} = \left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'}{r}\right) e^{-\lambda} , \tag{2.8b}$$

$$R_{\hat{2}\hat{2}} = R_{\hat{3}\hat{3}} = \left(\frac{\lambda'}{2r} - \frac{\nu'}{2r} - \frac{1}{r^2}\right) e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} , \tag{2.8c}$$

onde as linhas significam derivação parcial com relação à coordenada r.

As equações de campo $G_{\alpha\beta} = 8\pi t_{\alpha\beta}$ serão manipuladas como no Capítulo 14 de Adler, Bazin e Schiffer (1975). Primeiramente, serão reescritas sob a forma:

$$R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 8\pi \left(t_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} - \frac{1}{2}\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\, t\right) , \tag{2.9}$$

onde $t = \rho - 3p$ é o traço do tensor de energia-momentum (ver eq. (II.4.37)). Como tem-se

$$t_{\hat{0}\hat{0}} - \frac{1}{2}\eta_{\hat{0}\hat{0}}\, t = \frac{\rho}{2} + \frac{3p}{2} , \tag{2.10a}$$

$$t_{\hat{1}\hat{1}} - \frac{1}{2}\eta_{\hat{1}\hat{1}}\, t = t_{\hat{2}\hat{2}} - \frac{1}{2}\eta_{\hat{2}\hat{2}}\, t = t_{\hat{3}\hat{3}} - \frac{1}{2}\eta_{\hat{3}\hat{3}}\, t = \frac{\rho}{2} - \frac{p}{2} , \tag{2.10b}$$

resulta um sistema de três equações de campo a ser resolvido:

$$\left(\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'}{r}\right)e^{-\lambda}+128\pi^2S^2 = 8\pi\left(\frac{\rho}{2}+\frac{3p}{2}\right) \quad (2.11a)$$

$$\left(-\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\lambda'}{r}\right)e^{-\lambda} = 8\pi\left(\frac{\rho}{2}-\frac{p}{2}\right) \quad (2.11b)$$

$$\left(\frac{\lambda'}{2r}-\frac{\nu'}{2r}-\frac{1}{r^2}\right)e^{-\lambda}+\frac{1}{r^2} = 8\pi\left(\frac{\rho}{2}-\frac{p}{2}\right). \quad (2.11c)$$

Somando-se membro a membro (2.11a, b), encontra-se:

$$\left(\frac{\nu'+\lambda'}{r}\right)e^{-\lambda}+128\pi^2S^2 = 8\pi(\rho+p) . \quad (2.12)$$

Resolvendo (2.12), primeiramente para p e em seguida para ρ, e substituindo em (2.11c), obtêm-se, respectivamente, as equações para a densidade de massa-energia e pressão:

$$8\pi\rho = \frac{1}{r^2}-\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)e^{-\lambda}+64\pi^2S^2 , \quad (2.13a)$$

$$8\pi p = -\frac{1}{r^2}+\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)e^{-\lambda}+64\pi^2S^2 . \quad (2.13b)$$

Eliminando ρ e p de (2.11b, c), obtêm-se:

$$\frac{e^{\lambda}}{r^2} = \frac{1}{r^2}-\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'+\lambda'}{2r} . \quad (2.13c)$$

Observe-se que se redefinirmos a densidade e a pressão de acordo com:

$$\bar{\rho} = \rho - 8\pi S^2 , \quad (2.14a)$$

$$\bar{p} = p - 8\pi S^2 \tag{2.14b}$$

as equações (2.13) tornam-se:

$$8\pi\bar{\rho} = \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \tag{2.15a}$$

$$8\pi\bar{p} = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right), \tag{2.15b}$$

isto é, assumem a forma do problema correspondente em relatividade geral, enquanto que (2.13c) permanece inalterada (comparar com Adler, Bazin e Schiffer 1975, pág. 465).

As funções a serem determinadas deverão, ainda, estar relacionadas pela lei de conservação da energia-momentum, eq. (I.4.61):

$$\overset{+}{\nabla}_\beta t_\alpha{}^\beta = S_{\beta\rho}{}^\sigma R_{\alpha\sigma}{}^{\beta\rho} .$$

Com as considerações de fluido perfeito, esta expressão torna-se, na base de tetradas (2.2):

$$\nabla_{\hat\beta} t_{\hat\alpha}{}^{\hat\beta} = 2S R_{\hat\alpha\hat 0}{}^{\hat 2\hat 3} . \tag{2.16}$$

Por outro lado,

$$\nabla_{\hat\beta} t_{\hat\alpha}{}^{\hat\beta} = u_{\hat\alpha} u^{\hat\beta} \nabla_{\hat\beta}(\rho+p) + (\rho+p)u^{\hat\beta}\nabla_{\hat\beta} u_{\hat\alpha} + (\rho+p)u_{\hat\alpha}\nabla_{\hat\beta} u^{\hat\beta} - \nabla_{\hat\alpha} p$$

$$= -(\rho+p)\gamma^{\hat 0}{}_{\hat 0\hat\alpha} - p_{,\hat\alpha} ,$$

onde $\gamma^{\hat 0}{}_{\hat 0\hat\alpha}$ é um dos coeficientes de rotação de Ricci para a métrica (2.1), de modo que:

$$p_{,\hat{\alpha}} + (\rho + p)\gamma^{\hat{\delta}}{}_{\hat{\delta}\hat{\alpha}} = 2S\, R_{\hat{\alpha}\hat{0}\hat{2}}{}^{\hat{3}} \quad . \tag{2.17}$$

Esta expressão será uma identidade, exceto para $\hat{\alpha}$=1, e , nesse caso (ver Apêndice 1):

$$p' + (\rho + p)\frac{\nu'}{2} = 16\pi S\left(S' + \frac{\nu'}{2}S\right) \quad . \tag{2.18}$$

As equações (2.13c, 2.15a, b), além de (2.18) formam um sistema completamente determinado, desde que sejam especificadas uma equação de estado $\rho=\rho(p)$ e condições de contorno.

SOLUÇÕES DE PRASANNA.

Um método de resolução do sistema de equações obtido foi determinado por Prasanna (1975a). Em primeiro lugar, resolve-se a eq. (2.18), supondo que seja válida a equação de equilíbrio hidrostático, tal como encontrada em relatividade geral (Misner, Thorne e Wheeler 1973, pág.601):

$$p' + (\rho + p)\frac{\nu'}{2} = 0 \; , \tag{2.19}$$

o que implica:

$$S' + \frac{\nu'}{2} S = 0 \quad . \tag{2.20}$$

Desta equação resulta uma expressão para a densidade de spin em termos do potencial gravitacional ν:

$$S = A\, e^{-\nu/2} \tag{2.21}$$

,

onde A é uma constante de integração a ser determinada.

Impõe-se, como condição de contorno, a continuidade das funções $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ sobre a superfície da estrela. Sendo a métrica, para $r>R$, dada pela solução exterior de Schwarzschild (1.10), tem-se que:

$$e^{\nu}\Big|_{r=R} = e^{-\lambda}\Big|_{r=R} = 1 - \frac{2M}{R} . \tag{2.22}$$

Sendo o sistema a resolver formalmente o mesmo que em relatividade geral, as soluções analíticas já conhecidas nesta teoria podem ser imediatamente adaptadas para Einstein-Cartan, bastando substituir ρ por $\bar{\rho}$ e p por $\bar{p}$.

As soluções de Prasanna foram obtidas desta forma, utilizando os resultados de Tolman (1939). Este método de resolução das equações de campo não faz uso de uma equação de estado pré-estabelecida, já que isto provoca uma grande dificuldade na integração das equações do sistema . Tolman sugere introduzir uma equação adicional, envolvendo algum dos potenciais λ e ν, ou ambos, em função de r. Somente após a determinação das expressões para ρ e p seria construída a equação de estado e suas propriedades físicas seriam discutidas.

NOVA SOLUÇÃO ANALÍTICA.

Uma outra solução estática com simetria esférica pode ser construída aplicando os métodos de Prasanna à solução obtida por Adler (1974). O sistema formado pelas equações (2.13c), (2.15a, b) é integrado da seguinte maneira . Primeiramente, com as definições:

$$\gamma = e^{\nu/2} \tag{2.23a}$$

$$\tau = e^{-\lambda} \tag{2.23b}$$

,

a equação (2.13c) passa a ser escrita como:

$$\tau' - \frac{2(\gamma + r\gamma' - r^2\gamma'')}{r(\gamma + r\gamma')} = \frac{-2\gamma}{r(\gamma + r\gamma')} \tag{2.24}$$

Esta equação tem como solução geral:

$$\tau(r) = e^{-F(r)}\left[\int^r e^{F(r')}\, g(r')\, dr' + C\right] \tag{2.25}$$

sendo

$$F(r) = \int^r f(r')\, dr' \tag{2.26a}$$

$$f(r) = \frac{-2(\gamma + r\gamma' - r^2\gamma'')}{r(\gamma + r\gamma')} \tag{2.26b}$$

$$g(r) = \frac{-2\gamma}{r(\gamma + r\gamma')} \tag{2.26c}$$

e C uma constante. Uma solução específica de (2.25) é obtida se se toma f=g. Nesse caso,

$$\gamma = e^{\nu/2} = \left(1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon y^2\right)(1-2\epsilon)^{-1/2} \tag{2.27a}$$

$$\tau = e^{-\lambda} = 1 - 2\epsilon y^2 (1-\epsilon)^{2/3}\left(1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon y^2\right)^{-2/3}, \tag{2.27b}$$

onde

$$\epsilon = \frac{M}{R} , \qquad y = \frac{r}{R} . \tag{2.28}$$

As equações (2.15) implicam nas seguintes expressões para $\bar{\rho}$ e $\bar{p}$:

$$\bar{\rho} = \frac{\epsilon}{4\pi R^2} (1-\epsilon)^{2/3} \left(1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon y^2\right)^{-2/3} \left(3 - \frac{2\epsilon y^2}{1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon y^2}\right) \tag{2.29a}$$

$$\bar{p} = \frac{\epsilon}{4\pi R^2} \left[e^{-\lambda(r)} \left(1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon y^2\right)^{-1} - (1-\epsilon)^{2/3} \left(1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon y^2\right) \right] . \tag{2.29b}$$

Por (2.27a), tira-se que:

$$S = A \left(1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon y^2\right)^{-1} (1 - 2\epsilon)^{1/2} \tag{2.30}$$

e, portanto,

$$\rho = 8\pi A^2 \left(1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon y^2\right)^{-2} (1 - 2\epsilon) + \\ + \frac{\epsilon}{4\pi R^2} (1-\epsilon)^{2/3} \left(1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon y^2\right)^{-2/3} \left(3 - \frac{2\epsilon y^2}{1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon y^2}\right) \tag{2.31a}$$

$$p = 8\pi A^2 \left(1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon y^2\right)^{-2} (1 - 2\epsilon) + \\ + \frac{\epsilon}{4\pi R^2} \left[e^{-\lambda} \left(1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon y^2\right)^{-1} - (1-\epsilon)^{2/3} \left(1 - \frac{5}{2}\epsilon + \frac{3}{2}\epsilon y^2\right) \right] . \tag{2.31b}$$

Neste modelo, pode-se relacionar a constante A com a densidade central ρ_c da distribuição. Obtêm-se:

$$8\pi A^2 = \rho_c (1 - 2\epsilon)^{-1} \left(1 - \frac{5}{2}\epsilon\right)^2 - \frac{3\epsilon}{4\pi R^2} (1-\epsilon)^{2/3} (1 - 2\epsilon)^{-1} \left(1 - \frac{5}{2}\epsilon\right)^{-2/3} . \tag{2.32}$$

III.3 - Estrela Radiante de Vaidya.

ELEMENTOS DE LINHA DE VAIDYA.

Neste parágrafo, será apresentado um modelo estelar, não-estático, esfericamente simétrico, com spin e torção, baseado no trabalho de Vaidya (1951). A principal característica deste modelo consiste em supor que a distribuição não-estática de matéria está irradiando energia, isto é, trata-se de uma esfera radiante de fluido de Weyssenhoff , com raio variável, e que está envolvida numa camada expandente de radiação pura. Além desta camada, o espaço-tempo é vazio e sua métrica dada pela solução de Schwarzschild.

Desta forma, com as coordenadas de Schwarzschild definidas no elemento de linha (1.2), definem-se três regiões sobre o espaço-tempo: (1) $r \leq R_1(t)$, uma "mistura" de matéria com spin e radiação; (2) para $R_1(t) \leq r \leq R_2(t)$, a camada de radiação pura irradiada para fora; e (3) para $r \geq R_2(t)$, o espaço-tempo vazio com métrica dada por (1.10).

Como a radiação eletromagnética não gera nem sofre os efeitos da torção (ver §II.1), a geometria da região (2) é riemanniana. Portanto, permaneceram válidas as soluções obtidas em relatividade geral para o problema do campo gravitacional de radiação eletromagnética não-estática com simetria esférica, tratado por Vaidya (Vaidya (1943) ; ver também Vaidya (1955)). Assim, na região (2), o elemento de linha possui a forma:

$$ds^2 = \frac{(\partial m/\partial t)^2}{f^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \quad (3.1)$$

onde m = m(t,r) e f = f(m) é uma função arbitrária de m dada por:

$$f(m) = \frac{\partial m}{\partial r}\left(1-\frac{2m}{r}\right) \quad . \qquad (3.2)$$

Esta solução é contínua na fronteira entre as regiões (2) e (3) e f(m) deverá ser determinada com as condições de contorno na fronteira entre as regiões (1) e (2).

Resta, ainda, determinar o elemento de linha na região (1), i.e., no interior da distribuição de matéria propriamente dita. Será utilizado, neste caso, o referencial comóvel com a estrela. Entretanto, como já foi mostrado na equação (1.3), deve ser utilizado um outro sistema de coordenadas, $(\bar{t},\bar{r},\theta,\phi)$ por ser a distribuição não-estática. Será tomado um novo potencial gravitacional, fazendo-se $r' = e^{\beta/2}\bar{r}$, assumindo o elemento de linha a forma:

$$ds^2 = e^{\gamma} d\bar{t}^2 - e^{\alpha} d\bar{r}^2 - e^{\beta}\bar{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \qquad (3.3)$$

com: $\gamma = (\bar{t},\bar{r})$, $\alpha = \alpha(\bar{t},\bar{r})$, $\beta = \beta(\bar{t},\bar{r})$. (3.4)

EQUAÇÕES DE CAMPO E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA REGIÃO INTERIOR.

Para o elemento de linha (3.3) tomar a forma minkowskiana , as tetradas ortonormais carregadas pelos componentes do fluido são (suprimindo as barras):

$$e_{\hat{0}} = e^{-\gamma/2}\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ e_{\hat{1}} = e^{-\alpha/2}\frac{\partial}{\partial r}\ ,\ e_{\hat{2}} = \frac{e^{-\beta/2}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\ ,\ e_{\hat{3}} = \frac{e^{-\beta/2}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \tag{3.5}$$

cujas 1-formas duais se escrevem:

$$\omega^{\hat{0}} = e^{\gamma/2}dt\ ,\ \omega^{\hat{1}} = e^{\alpha/2}dr\ ,\ \omega^{\hat{2}} = r e^{\beta/2}d\theta\ ,\ \omega^{\hat{3}} = r\sin\theta\, e^{\beta/2}d\varphi . \tag{3.6}$$

Como o referencial é de repouso para o fluido, tem-se, ainda:

$$u^{\hat{\alpha}}\, u_{\hat{\alpha}} = 1 \quad ; \tag{3.7a}$$

$$u^{\hat{\alpha}} = \delta^{\hat{\alpha}}_{\hat{0}} \quad . \tag{3.7b}$$

A densidade de spin da distribuição passa a ser considerada, não só com simetria esférica, mas também dependente do tempo. Isto é, a segunda equação de campo $\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 8\pi S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ implica que as únicas componentes não-nulas do tensor de torção $\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ são:

$$\mathcal{T}_{23}{}^{0} = -\mathcal{T}_{32}{}^{0} = 8\pi u^{0}\, S(t,r) \ . \tag{3.8}$$

O tensor de Einstein, calculado nas coordenadas comóveis e na base de tetrada (3.5), possui as seguintes componentes não-nulas (ver apêndice 2):

$$G_{\hat{0}\hat{0}} = -\left(\beta'' + \frac{3}{4}\beta'^2 - \frac{\alpha'\beta'}{2} + \frac{3\beta'}{r} - \frac{\alpha'}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-\alpha} + \left(\frac{\dot{\beta}^2}{4} + \frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{2}\right)e^{-\gamma} + \frac{e^{-\beta}}{r^2} + 64\pi^2 S^2 \tag{3.9a}$$

$$G_{\hat{1}\hat{1}} = \left(\frac{\beta'^2}{4} + \frac{\beta'\gamma'}{2} + \frac{\beta'}{r} + \frac{\gamma'}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-\alpha} - \left(\ddot{\beta} + \frac{3}{4}\dot{\beta}^2 - \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{2}\right)e^{-\gamma} - \frac{e^{-\beta}}{r^2} + 64\pi^2 S^2 \tag{3.9b}$$

$$G_{\hat{2}\hat{2}} = G_{\hat{3}\hat{3}} = \left(\frac{\beta''}{2} + \frac{\gamma''}{2} + \frac{\beta'^2}{4} + \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'\gamma'}{4} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} - \frac{\alpha'}{2r} + \frac{\beta'}{r} + \frac{\gamma'}{2r}\right)e^{-\alpha} +$$

$$+ \left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2} - \frac{\ddot{\beta}}{2} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4} - \frac{\dot{\beta}^2}{4} - \frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{4} + \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{4} + \frac{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}{4}\right)e^{-\gamma} + 64\pi^2 S^2 \qquad (3.9c)$$

$$G_{\hat{0}\hat{1}} = G_{\hat{1}\hat{0}} = -\left(\dot{\beta}' + \frac{\dot{\beta}\beta'}{2} - \frac{\dot{\beta}\gamma'}{2} - \frac{\dot{\alpha}\beta'}{2} + \frac{\dot{\beta}}{r} - \frac{\dot{\alpha}}{r}\right)e^{-(\alpha+\gamma)/2} \qquad (3.9d)$$

$$G_{\hat{2}\hat{3}} = -G_{\hat{3}\hat{2}} = 8\pi\left[\dot{S} + \left(\frac{\dot{\alpha}}{2} + \dot{\beta}\right)S\right]e^{-\gamma/2} \qquad (3.9e)$$

onde as linhas significam $\partial/\partial r$ e os pontos $\partial/\partial t$.

O tensor canônico de energia-momentum a ser utilizado na primeira equação de campo $G_{\alpha\beta} = 8\pi t_{\alpha\beta}$ é, neste caso, separado em duas partes:

$$t_{\alpha\beta} = \underset{M}{t}_{\alpha\beta} + \underset{EM}{t}_{\alpha\beta} \qquad (3.10)$$

onde $\underset{M}{t}_{\alpha\beta}$ é a parte correspondente à energia-momentum da matéria que compõe o fluido, dada por (1.5), e que, com a hipótese de descrição clássica de spin reduz-se a:

$$\underset{M}{t}_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(\rho, p, p, p). \qquad (3.11)$$

Por outro lado, $\underset{EM}{t}_{\alpha\beta}$, que corresponde à parte eletromagnética presente na região (1), poderá, devido às conclusões do parágrafo II.3, ter a mesma expressão do tensor simétrico de energia-momentum, eq. (II.3.43):

$$\underset{EM}{t}_{\alpha\beta} = \sigma k_\alpha k_\beta \quad , \qquad (3.12)$$

onde σ é interpretado como a densidade de radiação e k_α ("vetor de onda") indica a direção do fluxo de energia radiante. Como foi mostrado nas equações (II.3.38, 41), k_α está sujeito às condições:

$$k^\mu k_\mu = 0 , \tag{3.13}$$

$$k^\mu{}_{;\nu} k^\nu = 0 . \tag{3.14}$$

Com a hipótese de $\vec{k}$ ser um vetor dirigido radialmente para fora da distribuição, somente as componentes k^0 e k^1 possuirão valores diferentes de zero.

Assim, na base de tetrada (3.5), as componentes de $t_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ não-nulas são:

$$t_{\hat{0}\hat{0}} = \rho + \sigma (k^{\hat{0}})^2 , \tag{3.15a}$$

$$t_{\hat{1}\hat{1}} = p + \sigma (k^{\hat{1}})^2 , \tag{3.15b}$$

$$t_{\hat{2}\hat{2}} = t_{\hat{3}\hat{3}} = p , \tag{3.15c}$$

$$t_{\hat{0}\hat{1}} = t_{\hat{1}\hat{0}} = -\sigma k^{\hat{0}} k^{\hat{1}} . \tag{3.15d}$$

Estas equações podem ser manipuladas de forma a obter-se:

$$p = t_{\hat{2}\hat{2}} ; \tag{3.16a}$$

$$\rho = t_{\hat{0}\hat{0}} - t_{\hat{1}\hat{1}} + t_{\hat{2}\hat{2}} ; \tag{3.16b}$$

A eq. (3.13) implica que:

$$(k^{\hat{0}})^2 - (k^{\hat{1}})^2 = 0$$

e como considera-se $k^{\hat{1}}$ positivo, tem-se:

$$k^{\hat{0}} = k^{\hat{1}} \quad , \tag{3.16c}$$

de modo que, por (3.15d):

$$\sigma = - t_{\hat{0}\hat{1}} \, (k^{\hat{1}})^{-2} \tag{3.16d}$$

Finalmente, subtraindo (3.15b) e (3.15c), vem:

$$t_{\hat{1}\hat{1}} - t_{\hat{2}\hat{2}} = - t_{\hat{0}\hat{1}} \quad . \tag{3.16e}$$

Uma relação entre as derivadas de $k^{\hat{1}}$ é fornecida pela equação (3.14):

$$k^{\hat{1}}{}_{,\hat{0}} + k^{\hat{1}}{}_{,\hat{1}} + k^{\hat{1}} \left(\frac{\gamma'}{2} e^{-\alpha/2} + \frac{\dot{\alpha}}{2} e^{-\gamma/2} \right) = 0 \, . \tag{3.17}$$

As equações de campo são, portanto, deduzidas de (3.9):

$$8\pi\rho = G_{\hat{0}\hat{0}} - G_{\hat{1}\hat{1}} + G_{\hat{2}\hat{2}}$$

$$= - \left(\frac{\beta''}{2} - \frac{\gamma''}{2} + \frac{3}{4}\beta'^2 - \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'\gamma'}{4} + \frac{\alpha'\gamma'}{4} + 3\frac{\beta'}{r} - \frac{\alpha'}{2r} + \frac{\gamma'}{2r} + \frac{2}{r^2} \right) e^{-\alpha} +$$

$$+ \left(\frac{\ddot{\beta}}{2} - \frac{\ddot{\alpha}}{2} + \frac{3}{4}\dot{\beta}^2 - \frac{\dot{\alpha}^2}{4} + \frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{4} - \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{4} + \frac{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}{4} \right) e^{-\gamma} + \frac{2e^{-\beta}}{r^2} + 64\pi^2 S^2 \tag{3.18a}$$

$$8\pi p = G_{\hat{2}\hat{2}}$$

$$= \left(\frac{\beta''}{2} + \frac{\gamma''}{2} + \frac{\beta'^2}{4} + \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'\gamma'}{4} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} + \frac{\beta'}{r} - \frac{\alpha'}{2r} + \frac{\gamma'}{2r}\right)e^{-\alpha} +$$

$$-\left(\frac{\ddot{\alpha}}{2} + \frac{\ddot{\beta}}{2} + \frac{\dot{\alpha}^2}{4} + \frac{\dot{\beta}^2}{4} + \frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{4} - \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{4} - \frac{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}{4}\right)e^{-\gamma} + 64\pi^2 S^2 \qquad (3.18b)$$

$$8\pi\sigma = -(k^{\hat{1}})^{-2}\, G_{\hat{0}\hat{1}}$$

$$= (k^{1})^{-2}\left(\dot{\beta}' + \frac{\dot{\beta}\beta'}{2} - \frac{\dot{\beta}\gamma'}{2} - \frac{\dot{\alpha}\beta'}{2} + \frac{\dot{\beta}}{r} - \frac{\dot{\alpha}}{r}\right)e^{-(\alpha+\gamma)/2} \qquad (3.18c)$$

Sendo nula a componente (23) de $t_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, obtêm-se, ainda, uma condição para a densidade de spin:

$$\dot{S} + \left(\frac{\dot{\alpha}}{2} + \dot{\beta}\right)S = 0 \ , \qquad (3.18d)$$

que pode ser imediatamente integrada, resultando:

$$S(t,r) = Z(r)\,\exp\left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right] \ , \qquad (3.19)$$

sendo Z uma função somente de r a ser determinada. Enfim , (3.16e) fornece a seguinte relação entre as funções ν, λ, β:

$$\frac{\beta''}{2} + \frac{\gamma''}{2} + \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'\gamma'}{4} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} - \frac{\alpha'}{2r} - \frac{\gamma'}{2r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{\alpha-\beta}}{r^2} +$$

$$+ \left(\frac{\ddot{\beta}}{2} - \frac{\ddot{\alpha}}{2} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4} + \frac{\dot{\beta}^2}{2} - \frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{4} - \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{4} + \frac{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}{4}\right)e^{\alpha-\gamma} +$$

$$+ \left(\dot{\beta}' + \frac{\dot{\beta}\beta'}{2} - \frac{\dot{\beta}\gamma'}{2} - \frac{\dot{\alpha}\beta'}{2} + \frac{\dot{\beta}}{r} - \frac{\dot{\alpha}}{r}\right)e^{(\alpha-\gamma)/2} = 0. \qquad (3.20)$$

A equação que expressa, na base de tetradas (3.5), a conservação da energia-momentum é dada por (2.16). De acordo com os resultados mostrados no Apêndice 2, tem-se que:

$$\nabla_{\hat\beta} t_{\hat 1}{}^{\hat\beta} = -2 S R_{\hat 1 \hat 0 \hat 2}{}^{\hat 3} = -16\pi S \left(S' + \frac{\gamma'}{2} S\right) e^{-\lambda/2} \tag{3.21a}$$

$$\nabla_{\hat\beta} t_{\hat 0}{}^{\hat\beta} = \nabla_{\hat\beta} t_{\hat 2}{}^{\hat\beta} = \nabla_{\hat\beta} t_{\hat 3}{}^{\hat\beta} = 0 . \tag{3.21b}$$

Por outro lado, de acordo com (3.15), pode-se escrever que:

$$\nabla_{\hat\beta} t_{\hat 0}{}^{\hat\beta} = (\rho + p)_{,\hat 0} + (\rho + p)(u_{\hat 0,\hat 0} - \gamma^{\hat 0}{}_{\hat 0 \hat 0}) + (\rho+p)\left(\frac{\dot\alpha}{2} + \dot\beta\right) e^{-\gamma/2} + - p_{,\hat 0} + k^{\hat 0} \nabla_{\hat\beta}(\sigma k^{\hat\beta})$$

$$= \rho_{,\hat 0} + (\rho + p)\left(\frac{\dot\alpha}{2} + \dot\beta\right) e^{-\gamma/2} + k^{\hat 0} \nabla_{\hat\beta}(\sigma k^{\hat\beta}) \tag{3.22a}$$

$$\nabla_{\hat\beta} t_{\hat 1}{}^{\hat\beta} = -(\rho+p)\gamma^{\hat 0}{}_{\hat 0 \hat 1} - p_{,\hat 1} - k^{\hat 1} \nabla_{\hat\beta}(\sigma k^{\hat\beta})$$

$$= -(\rho+p)\frac{\gamma'}{2} e^{-\alpha/2} - p_{,\hat 1} - k^{\hat 1} \nabla_{\hat\beta}(\sigma k^{\hat\beta}) \tag{3.22b}$$

$$\nabla_{\hat\beta} t_{\hat 2}{}^{\hat\beta} = \nabla_{\hat\beta} t_{\hat 3}{}^{\hat\beta} = 0 . \tag{3.22c}$$

Eliminando σ de (3.22a) e (3.22b) resulta:

$$p_{,\hat 1} + (\rho+p)\frac{\gamma'}{2} e^{-\alpha/2} - \frac{k^{\hat 1}}{k^{\hat 0}}\left[\rho_{,\hat 0} + (\rho+p)\left(\frac{\dot\alpha}{2} + \dot\beta\right) e^{-\gamma/2}\right] = 16\pi S \left(S' + \frac{\gamma'}{2} S\right), \tag{3.23}$$

Ou, usando (3.16c),

$$p' + (\rho+p)\frac{\gamma'}{2} - e^{(\alpha-\gamma)/2}\left[\dot\rho + (\rho+p)\left(\frac{\dot\alpha}{2} + \dot\beta\right)\right] = 16\pi S \left(S' + \frac{\gamma'}{2} S\right). \tag{3.24}$$

Observe-se que, se se introduz a redefinição de densidade e pressão (2.14), as equações de campo (3.18a, b) se transformam em:

$$8\pi\bar{\rho} = -\left(\frac{\beta''}{2} - \frac{\gamma''}{2} + \frac{3}{4}\beta'^2 - \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'\gamma'}{4} + \frac{\alpha'\gamma'}{4} + 3\frac{\beta'}{r} - \frac{\alpha'}{2r} + \frac{\gamma'}{2r} + \frac{2}{r^2}\right)e^{-\alpha} +$$
$$+\left(\frac{\ddot{\beta}}{2} - \frac{\ddot{\alpha}}{2} + \frac{3}{4}\dot{\beta}^2 - \frac{\dot{\alpha}^2}{4} + \frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{4} - \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{4} + \frac{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}{4}\right)e^{-\gamma} + \frac{2e^{-\beta}}{r^2} \tag{3.25a}$$

$$8\pi\bar{p} = \left(\frac{\beta''}{2} + \frac{\gamma''}{2} + \frac{\beta'^2}{4} + \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'\gamma'}{4} - \frac{\alpha'\gamma'}{4} + \frac{\beta'}{r} - \frac{\alpha'}{2r} + \frac{\gamma'}{2r}\right)e^{-\alpha} +$$
$$-\left(\frac{\ddot{\alpha}}{2} + \frac{\ddot{\beta}}{2} + \frac{\dot{\alpha}^2}{4} + \frac{\dot{\beta}^2}{4} + \frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{4} - \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{4} - \frac{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}{4}\right)e^{-\gamma}, \tag{3.25b}$$

enquanto que (3.18c, d) permanecem inalteradas. Quanto à equação (3.24), ela se reescreve sob a forma

$$\bar{p}' + (\bar{\rho} + \bar{p})\frac{\gamma'}{2} - e^{(\alpha-\gamma)/2}\left[\dot{\bar{\rho}} + (\bar{\rho} + \bar{p})\left(\frac{\dot{\alpha}}{2} + \dot{\beta}\right)\right] = 0, \tag{3.26}$$

onde se utilizou (3.18d).

Assim sendo, as equações diferenciais obtidas acima para $\bar{\rho}$ e $\bar{p}$ possuem a mesma forma das equações diferenciais para ρ e p resolvidas por Vaidya (1951). Além disso, a eq. (3.26) é a mesma que expressa a conservação de energia-momentum no artigo citado para as incógnitas ρ e p. Portanto, as soluções obtidas por Vaidya podem ser imediatamente adaptadas para o problema aqui desenvolvido.

SOLUÇÕES DE VAIDYA.

Vaidya propõe a solução da equação (3.20), escolhendo as seguintes formas paras as funções α, β,γ no interior da distribuição:

$$e^{-\alpha} = A^2\, e^{2kt}\, r^{-2s}\, (B + r^{2q})^{2n} \,, \tag{3.27a}$$

$$e^{-\beta} = A^2\, D^2\, e^{2kt}\, r^{-2p}\, (B + r^{2q})^{2m} \,, \tag{3.27b}$$

$$e^{-\gamma} = A^2\, C^2\, e^{2kt}\, r^{-2v}\, (B + r^{2q})^{2\ell} \tag{3.27c}$$

em que A, B, C, D, k, ℓ, m, n, p, q, s, v são constantes . Levando as equações (3.27) em (3.20), são impostas sete restrições sobre os doze parâmetros acima introduzidos, resultanto em 39 soluções diferentes de (3.20). Entretanto, várias destas soluções podem ser transformadas mutuamente , mediante transformações da coordenada radial. Tem-se, afinal, nove soluções mutuamente independentes de (3.20), as quais podem ser separadas em quatro grupos, de acordo com o conteúdo físico que cada solução implica. Vaidya apresenta uma solução característica de cada grupo.

Entretanto, das soluções apresentadas, somente um grupo fornece uma situação de interesse para esta tese e que corresponde à solução III de Vaidya, para a qual a eq. (3.20) fornece as seguintes condições para as constantes introduzidas em (3.27):

$p = s, \quad v = s + 1,$

$m = n, \quad \ell = n - 1,$

resultando:

$$e^{\alpha} = \frac{e^{-2kt}\, r^{2s}}{A^2 (B + r^{2q})^{2n}}, \quad e^{\beta} = \frac{e^{\alpha}}{D^2}, \quad e^{\gamma} = r^2 (B + r^{2q})^2 \frac{e^{\alpha}}{C^2}, \tag{3.28}$$

em que:

$$s + 1 = \frac{q(2n^2 - 1)}{n}, \quad Ck = 2nqB, \quad n^2 D^2 = 2q^2 (1 - 2n^2). \tag{3.29}$$

Portanto:

$$8\pi \bar{\rho} = \frac{e^{-\alpha} q^2}{r^2 n^2} \cdot \frac{(1 + 4n^2) B + (1 - 4n^2) r^{2q}}{B + r^{2q}} \tag{3.30a}$$

$$8\pi \bar{p} = \frac{e^{-\alpha} q^2 (1 - 2n)}{r^2 n^2} \cdot \frac{(1 + 2n) B + (1 - 2n) r^{2q}}{B + r^{2q}} \tag{3.30b}$$

$$8\pi t_{01} = - \frac{4BC\, e^{\gamma - \alpha} q^2}{r^3} \cdot \frac{(2n^2 - 1) B + (2n - 1) r^{2q}}{(B + r^{2q})^3} \tag{3.30c}$$

$$k^1 = E\, e^{-(\alpha + \gamma)/2}, \tag{3.30d}$$

onde E é uma constante arbitrária.

Por se estar realizando estes cálculos em referencial comóvel com a distribuição, a solução acima pode fornecer um raio constante finito (r=a) para a fronteira entre a região (1) e a região (2) quando a pressão torna-se nula.

Deve-se requerer, ainda, que a solução obedeça as seguintes condições de contorno:

$$\bar{p} = 0 \quad \text{para} \quad r = a \; ; \tag{3.31a}$$

$$\bar{p} > 0 \quad \text{para} \quad r < a \; ; \tag{3.31b}$$

$$\bar{\rho} > 0 \quad \text{para} \quad r \leqslant a \; . \tag{3.31c}$$

Isto fornece relações entre as constantes que aparecem nas equações (3.30) e que são as mesmas relações encontradas por Vaidya. De (3.31a), resulta:

$$B = - a^{2q} \frac{1-2n}{1+2n} \; . \tag{3.32}$$

(3.31b) impõe que o expoente q seja negativo:

$$q < 0 \; , \tag{3.33}$$

enquanto que (3.31c, 32, 33) definem um intervalo de validade para n:

$$0 < n < \frac{1}{2} \; . \tag{3.34}$$

Um caso particular de especial interesse é aquele no qual se escolhe $n = \frac{1}{4}$. Nesse caso, tem-se:

$$e^{\alpha} = \frac{e^{-2kt} \quad r^{-7q}}{A^2 r^2 (B + r^{2q})^{1/2}} \tag{3.35a}$$

$$e^{\beta} = \frac{e^{\alpha}}{28 q^2} \tag{3.35b}$$

$$e^{\gamma} = r^2 (B + r^{2q})^2 \frac{e^{\alpha}}{C^2} \tag{3.35c}$$

$$B = -\frac{a^{2q}}{3}, \quad C_k = -\frac{q\,a^{2q}}{6}, \tag{3.35d}$$

$$8\pi\bar{\rho} = \frac{4e^{-\alpha}q^2}{r^2}\cdot\frac{9r^{2q}-5a^{2q}}{3r^{2q}-a^{2q}}, \tag{3.35e}$$

$$8\pi\bar{p} = \frac{12e^{-\alpha}q^2}{r^2}\cdot\frac{r^{2q}-a^{2q}}{3r^{2q}-a^{2q}}, \tag{3.35f}$$

$$8\pi\sigma = \frac{q^2a^{2q}}{18\,C^2E^2}\left(12r^{2q}-7a^{2q}\right), \tag{3.35g}$$

$$u^0 = e^{-\gamma/2}, \quad u^i = 0 \tag{3.35h}$$

$$k^0 = E\,e^{-\gamma}, \quad k^1 = E\,e^{-(\alpha+\gamma)/2}, \quad k^2 = k^3 = 0. \tag{3.35i}$$

Vaidya julgou esta escolha de $n = \frac{1}{4}$ conveniente, pois resultaria em que a razão entre a pressão e a densidade centrais seria igual a 1/3, implicando, no centro da distribuição, uma equação de estado própria de radiação eletromagnética pura.* Entretanto, o que se obtém das eqs. (3.35) acima é $\bar{p}_c/\bar{\rho}_c = 1/3$, de modo que esta interpretação de Vaidya é perdida, a menos que a função densidade de spin S anule-se em $r = 0$.

Na fronteira entre as regiões (1) e (2), deve-se exigir a continuidade das funções métricas. Isto é, a solução interior apresentada (3.35) deve coincidir com a solução da região (2), dada por (3.1), nesta fronteira. Deve ser lembrado que foram utilizados dois conjuntos de coorde

---

* Ver, p.ex., Chandrasekhar (1939), p. 194.

nadas distintas na descrição destas soluções. A solução da região (2) foi expressa em coordenadas de Schwarzschild (t,r,θ,ϕ), enquanto que a solução interior foi deduzida em coordenadas comóveis $(\bar{t},\bar{r},\theta,\phi)$, cujas barras haviam sido e liminadas apenas para não carregar a notação. Ao se tratar o problema de condições de contorno, entretanto, é necessá rio observar a diferença entre os dois tipos de coordenadas e mais, encontrar a relação entre um tipo e o outro.

Assim, é preciso determinar como se relacionam as coordenadas comóveis, em termos das quais foi escrito o elemento de linha interior,

$$ds^2 = e^{\gamma} d\bar{t}^2 - e^{\alpha} d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 e^{\beta} \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right) \qquad (3.36)$$

com as coordenadas de Schwarzschild nas quais o elemento de linha acima assumiria a forma:

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right), \qquad (3.37)$$

observando que:

$$t = t(\bar{t},\bar{r}) \quad , \quad r = r(\bar{t},\bar{r}) . \qquad (3.38)$$

(3.38) implica que:

$$dt^2 = \dot{t}^2 d\bar{t}^2 + t'^2 d\bar{r}^2 + 2\dot{t}t' \, d\bar{t}\, d\bar{r} \qquad (3.39a)$$

$$dr^2 = \dot{r}^2 d\bar{t}^2 + r'^2 d\bar{r}^2 + 2\dot{r}r' \, d\bar{t}\, d\bar{r} \qquad (3.39b)$$

onde os pontos denotam $\partial/\partial\bar{t}$ e as linhas $\partial/\partial\bar{r}$. Usando as fór mulas (3.39), o elemento de linha (3.37) fica escrito como:

$$ds^2 = (e^{\nu}\dot{t}^2 - e^{\lambda}\dot{r}^2)\,d\bar{t}^2 + (e^{\nu}t'^2 - e^{\lambda}r'^2)\,d\bar{r}^2 +$$

$$+ 2(\dot{t}t'e^{\nu} - \dot{r}r'e^{\lambda})\,d\bar{t}\,d\bar{r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{3.40}$$

Comparando os $g^{\mu\nu}$ entre (3.40) e (3.36), resulta:

$$r^2 = \bar{r}^2 e^{\beta} \tag{3.41a}$$

$$r't'e^{-\alpha} - \dot{r}\dot{t}e^{-\gamma} = 0 \tag{3.41b}$$

$$e^{-\lambda} = (r'^2 e^{-\alpha} - \dot{r}^2 e^{-\gamma}) \tag{3.41c}$$

$$e^{-\nu} = (\dot{t}^2 e^{-\gamma} - t'^2 e^{-\alpha}) \quad . \tag{3.41d}$$

Desta forma, ficam relacionadas as funções métricas defini das nas coordenadas comóveis α, β,γ com as funções métricas correspondentes em coordenadas de Schwarzschild λ,ν .

Integrando (3.41b), resulta:

$$\frac{1}{3^7}\,\bar{r}^{96q\gamma}\,(24\bar{r}^{2q\gamma} - 7a^{2q\gamma})^8\,(28A^2q^2)^{14}\,r^{28}\,\psi(t) = 1 \tag{3.42}$$

onde $\psi(t)$ é uma função arbitrária de t. Na fronteira entre as regiões (1) e (2), isto é, em $r = R_1(t)$ ou $\bar{r} = a$, a expressão acima torna-se:

$$\frac{1}{3^7}\,(17)^8\,(28A^2q^2)^{14}\,a^{112q\gamma}\,R_1^{28}\,\psi(t) = 1\,. \tag{3.43}$$

Esta expressão, diferenciada em relação a t e dividida por $\psi(t)\ R_1^{28}$, se escreve:

$$\frac{1}{\psi(t)}\frac{d\psi}{dt} + \frac{28}{R_1}\frac{dR_1}{dt} = 0 \ . \tag{3.44}$$

Com estes resultados, as funções métricas interiores para as coordenadas de Schwarzschild ficam escritas como:

$$e^{\lambda} = \frac{7(3\bar{r}^{2q} - a^{2q})}{3(4\bar{r}^{2q} - a^{2q})} \tag{3.45}$$

$$e^{\nu} = \left[\frac{112(3r^{2q} - a^{2q})^2}{a^{4q}} + e^{\lambda}\right]\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\left(\frac{r}{28\psi}\right) \tag{3.46}$$

e as soluções tornam-se:

$$8\pi\bar{\rho} = \frac{11 - 14e^{-\lambda}}{7r^2} \tag{3.47a}$$

$$8\pi\bar{p} = \frac{9 - 14e^{-\lambda}}{7r^2} \tag{3.47b}$$

$$8\pi\sigma = \frac{q^2 a^{4q}}{18E^2c^2} \cdot \frac{16 - 21e^{-\lambda}}{7e^{-\lambda} - 4} \tag{3.47c}$$

$$k^1 = -\frac{3}{7q}\frac{EC}{a^{2q}}\frac{7e^{-\lambda} - 4}{r} \tag{3.47d}$$

$$u^1 = -\frac{7e^{-\lambda} - 4}{2(28)^{1/2}} \ . \tag{3.47e}$$

De modo que, na fronteira $r = R_1(t)$, tem-se, para a solução interior (1)

$$e^{-\lambda}_{(1)} = \frac{9}{14}\,, \qquad e^{\nu}_{(1)} = \left(448 + \frac{14}{9}\right)\left(\frac{dR_1}{dt}\right)^2\,,$$

$$8\pi\bar{\rho} = \frac{2}{7R_i^2}\,, \quad 8\pi\bar{p} = 0, \quad 8\pi\sigma = \frac{5q^2a^{4q}}{18E^2C^2}\,, \quad u^1 = -1/[4.(28)^{1/2}] \qquad (3.48)$$

Como $u^1<0$, observa-se que a distribuição está em contração.

A conexão das soluções das regiões (1) e (2) é feita através das seguintes condições:

(1) Continuidade de e^{λ} em $r = R_1(t)$:

(3.1) fornece que:

$$e^{\lambda}_{(2)} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}$$

Logo, em $r = R_1(t)$,

$$1 - \frac{2m_1}{R_1} = \frac{9}{14} \quad \text{ou} \quad \frac{m_1}{R_1} = \frac{5}{28}\,,$$

ou, ainda,

$$m\,(t, R_1) = \frac{5}{28}\,R_1\,. \qquad (3.49)$$

(2) Continuidade de e^{ν} em $r = R_1(t)$:

$$\left(448 + \frac{14}{9}\right)\left(\frac{dR_1}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{R_1}\right)\frac{(\partial m/\partial t)^2_{r=R_1}}{f^2(m_1)}$$

Por (3.2), tem-se:

$$\frac{1}{f(m_1)}\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)_{r=R_1} = \left(14 \times \frac{17}{9}\right)\frac{dR_1}{dt} \qquad (3.50)$$

Diferenciando (3.49) em relação a t, vem:

$$\frac{\partial m}{\partial R_1}\cdot\frac{dR_1}{dt} + \left.\frac{\partial m}{\partial t}\right|_{r=R_1} = \frac{5}{28}\frac{dR_1}{dt}$$

ou, como

$$\frac{\partial m}{\partial R_1} = \frac{14}{9} f(m_1) ,$$

resulta que, usando (3.50),

$$f(m_1) = \frac{5}{(28)^2} . \qquad (3.51)$$

Portanto, embora u_1 não seja uma constante, $f(m_1)$ o é. Isto somente será possível se $f(m)$ for uma constante, dada por $5/(28)^2$.

A solução na região (2), dada pela eq. (3.1) é uma solução incompleta enquanto m for uma função desconhecida. No caso de f = cte, pode-se integrar (3.2), resultando, para $f < \frac{1}{8}$:

$$(m - xr)^j (m - yr)^h = \varphi(t) \qquad (3.52)$$

onde

$$x, y = \frac{1}{4}\left[1 \pm (1-8f)^{1/2}\right] \qquad (3.53a)$$

$$j, h = \frac{1}{2}\left[1 \mp (1-8f)^{-1/2}\right] . \qquad (3.53b)$$

Por sua vez, a solução (3.52) deve ser contínua em $r = R_2(t)$ com a solução da região (3), que é a solução de Schwarzschild dada por (1.10). Assim, $\psi(t)$ fica determinada como:

$$\varphi(t) = (M - xR_2)^j (M - yR_2)^h . \qquad (3.54)$$

No caso em que $f = 5/(28)^2$, tem-se, portanto:

$$(m - xr)^j (m - yr)^h = (M - xR_2)^j (M - yR_2)^h \; , \qquad (3.55a)$$

com:

$$x, y = \frac{1}{4}\left[1 \pm \left(\frac{93}{98}\right)^{1/2}\right] \; , \quad j, h = \frac{1}{2}\left[1 \mp \left(\frac{98}{93}\right)^{1/2}\right] . \qquad (3.55b)$$

A função $R_2(t)$ vem dada, também, pela continuidade das funções. Obtém-se que:

$$\left.\frac{(\partial m/\partial t)^2}{(\partial m/\partial r)^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2}\right|_{r=R_2(t)} \cdot \left.\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right|_{r=R_2(t)} = 1 - \frac{2M}{R_2} \; ,$$

isto é,

$$\left.\frac{(\partial m/\partial t)^2}{(\partial m/\partial r)^2}\right|_{r=R_2(t)} = \left(1 - \frac{2M}{R_2}\right)^2 .$$

Logo:

$$\left.\frac{\partial m/\partial t}{\partial m/\partial r}\right|_{r=R_2(t)} = \frac{dR_2}{dt} = 1 - \frac{2M}{R_2} . \qquad (3.56)$$

Finalmente, para se determinar $\psi(t)$, utiliza-se a continuidade das funções em $r = R_1(t)$. Nesta fronteira, (3.55a) torna-se:

$$(m_1 - xR_1)^j (m_1 - yR_1)^h = (M - xR_2)^j (M - yR_2)^h .$$

Por (3.49), $m_1/R_1 = 5/28$, de modo que:

$$R_1 = 28\,(5 - 28x)^{-j} (5 - 28y)^{-h} (M - xR_2)^j (M - yR_2)^h \qquad (3.57)$$

Levando (3.57) em (3.43), vem:

$$\Psi(t) = 3^7 (17)^{-8} (28 A^2 q^2)^{-14} a^{-112q} R_1^{-28}$$

$$= 3^7 (17)^{-8} (28)^{-42} (Aq)^{-28} a^{-112q} (5-28x)^{28j} (5-28y)^{28h} (M-xR_2)^{-28j} (M-yR_2)^{-28h}$$

$$= K\, (M-xR_2)^{-28j}\, (M-yR_2)^{-28h} \quad . \qquad (3.58)$$

Vaidya (1951) introduziu, ainda, a função F(m) relacionada com σ através da expressão:

$$\sigma = \frac{F(m)}{4\pi r^2}$$

e, também tem-se:

$$k^1 = \left[\frac{f(m)}{F(m)} \right]^{1/2}$$

Assim, a continuidade de σ em $r = R_1(t)$ provê a seguinte relação:

$$\frac{F(m_1)}{4\pi R_1^2} = \frac{5q^2 a^{4q}}{144\pi E^2 C^2} \quad .$$

Portanto,

$$F(m) = \frac{(14q\, a^{2q})^2}{45\, E^2 C^2}\, m^2 \, .$$

A DENSIDADE DE SPIN.

A função densidade de spin $S(\bar{t},\bar{r})$ foi determinada em termos dos potenciais gravitacionais através da equação (3.19):

$$S(\bar{t},\bar{r}) = Z(\bar{r}) \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right] . \tag{3.59}$$

A solução de Vaidya (3.28) transforma a expressão acima em:

$$S(\bar{t},\bar{r}) = Z(\bar{r}) . \frac{A^3 D^2 e^{3k\bar{t}}}{\bar{r}^{3s}} \left(B + \bar{r}^{2q}\right)^{3n} , \tag{3.60}$$

com D, k e s dados por (3.29). Para $n = \frac{1}{4}$, estas constantes tornam-se:

$$D^2 = 28 q^2 \ , \quad k = - \frac{q^2 a^{2q}}{6C} , \qquad s = -1 - \frac{7q}{2}$$

e, além disso,

$$B = - \frac{a^{2q}}{3} .$$

Portanto,

$$S(\bar{t},\bar{r}) = 28 \cdot 3^{-3/4} A^3 q^2 Z(\bar{r}) \bar{r}^{-3+28q/2} \left(3\bar{r}^{2q} - a^{2q}\right)^{3/4} e^{3k\bar{t}} . \tag{3.61}$$

A função $Z(\bar{r})$ permanece indeterminada, já que não existe nenhuma outra condição sobre a densidade de spin. Entretanto, pode-se tentar adotar neste contexto a mesma suposição feita por Prasanna (1975a) no caso de distribuição estática: a validade da equação de equilíbrio hidrostático da relatividade geral. Ou seja, o lado esquerdo de (3.24) anula-se, conduzindo a uma nova equação diferencial para a densidade de spin:

$$S' + \frac{\gamma'}{2} S = 0 . \tag{3.62}$$

Integrando (3.62), obtém-se:

$$S(\bar{t},\bar{r}) = H(\bar{t})\, e^{-\gamma/2} \quad , \tag{3.63}$$

onde $H(\bar{t})$ é uma função arbitrária de $\bar{t}$. Para que (3.63) seja compatível com (3.19), é necessário que as funções $Z(\bar{r})$ e $H(\bar{t})$ sejam relacionadas por (Kuchowicz 1975a):

$$\frac{Z(\bar{r})}{H(\bar{t})} = e^{(\alpha-\gamma)/2 + \beta} \quad , \tag{3.64}$$

que, no caso da solução deste capítulo, assume a expressão:

$$\frac{Z(\bar{r})}{H(\bar{t})} = \frac{(3\bar{r}^{2q} - a^{2q})^{1/2}\, e^{-2k\bar{t}}}{3^{1/2} \cdot 28 q^2 C \bar{r}^{7q}} \quad . \tag{3.65}$$

III.4 - Discussões.

O PRINCÍPIO DE CORRESPONDÊNCIA.

O problema da determinação do campo gravitacional interior de esferas finitas de fluido perfeito com spin na teoria de Einstein-Cartan sempre foi resolvido, na literatura e nesta tese, por adaptação de soluções analíticas anteriormente estabelecidas de acordo com a relatividade geral. Assim, surgiu um "princípio de correspondência" (Kuchowicz 1975a) para gerar soluções exatas na teoria de Einstein-Cartan:

"Toda métrica esfericamente simétrica de um espaço-tempo riemanniano da relatividade geral pode ser igualmente considerada como a métrica de uma família de variedades com torção. O conjunto de condições de contorno da relatividade geral pode ser substituído pelo conjunto de condições correspondente para a teoria de Einstein-Cartan. As expressões exatas para a densidade e a pressão correspondentes a esta métrica em Einstein-Cartan são obtidas a partir das expressões respectivas na relatividade geral pelas substituições:

$$\rho \rightarrow \bar{\rho} = \rho - 8\pi S^2$$

$$p \rightarrow \bar{p} = p - 8\pi S^2 \quad ."$$

Outras soluções, por levarem em conta diferentes propriedades físicas, podem ser interessantes de se adaptar a Einstein-Cartan. No caso estático, dentre as soluções analíticas recentemente publicadas, poderiam ser analisadas desta maneira as de Adams, Cohen, Adler e Sheffield (1973, 1974), Adams e Cohen (1975), pois consideram algumas propriedades de rotação da estrela, sem que seja perdida a simetria esférica; a solução de Bowers e Liang (1974), com pressão anisotrópica; a reformulação do problema da esfera estática por Glass e Goldman (1978), Goldman (1978) ; e, ainda, as soluções de Bayin (1978), que surgem de um estudo mais completo da mesma equação diferencial que deu origem à solução de Adler (1974), adaptada para Einstein--Cartan no parágrafo III.2.

Outras soluções não-estáticas que podem ter interesse em adaptação para Einstein-Cartan são as de Taub (1968), Faulkes (1969a) ou as dos estudos sobre modelos de supernovas de Adams e Cohen (1977). Ver, também, as referências de Raychaudhuri e Banerji (1977).

A MASSA-ENERGIA TOTAL.

A massa-energia total da distribuição de matéria pode ser medida externamente; é o parâmetro M que ocorre no elemento de linha de Schwarzschild para o espaço vazio (1.10). Para cada raio r de uma distribuição estática , a massa-energia no seu interior é uma função m(r) definida por:

$$G_{\hat{0}\hat{0}} = \frac{2}{r^2}\frac{dm(r)}{dr} = 8\pi\bar{\rho} = 8\pi\left(\rho - 8\pi S^2\right) . \qquad (4.1)$$

Integrando (4.1), obtém-se:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho \, dr - \int_0^r 32\pi^2 r^2 S^2 \, dr \,, \tag{4.2}$$

com a condição m(r=0)=0. Assim sendo, a massa-energia total da distribuição é calculada segundo a expressão:

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \, dr - \int_0^R 32\pi^2 r^2 S^2 \, dr \,. \tag{4.3}$$

Observe-se que o primeiro termo do lado direito de (4.3) corresponde à massa-energia total em relatividade geral, enquanto que o segundo termo fornece uma correção a esta massa-energia devido à existência da densidade de spin S. Entretanto, esta correção somente será importante quando começar a dominar o primeiro termo, isto é, quando ocorrer uma densidade crítica de matéria de ordem de 10^{47} g cm^{-3} para elétrons ou 10^{54} g cm^{-3} para nêutrons (Hehl e von der Heyde 1973).

Densidades centrais máximas para estrelas de nêutrons são estimadas em 10^{15} - 10^{16} g cm^{-3} (Canuto 1974). Desta forma, fica aparente que as correções induzidas pela teoria de Einstein-Cartan são desprezíveis, mesmo em objetos com densidades nucleares, tornando-se irrelevantes inclusive na construção de modelos de estrelas de nêutrons (ver Kerlick 1973). A influência do spin, portanto, deverá ser levada em conta somente nos casos de densidades altamente elevadas: colapso gravitacional próximo à singularidade; cosmologia, na vizinhança de t=0; ou em processos quânticos gravitacionais.

O PROBLEMA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

Lichnerowicz (1955) estabeleceu, em relatividade geral, as condições de contorno que as soluções das equações de campo devem satisfazer numa hipersuperfície de descontinuidade de matéria, tal como a superfície de uma estrela que separa o fluido do vácuo. Estas condições de contorno exigem que, nesta hipersuperfície: (1) os potenciais métricos e suas derivadas primeiras sejam funções contínuas e (2) a pressão hidrostática se anule.

Arkuszewski, Kopczyński e Ponomariev (1975) e, empregando outros métodos, Skinner e Webb (1977) analisaram o mesmo problema no contexto da teoria de Einstein-Cartan, chegando à conclusão de que a condição (1) de Lichnerowicz permanece válida, enquanto que, devido à presença do tensor densidade de spin, a condição (2) deve ser modificada, passando-se a exigir a continuidade de $\bar{p}$ (e não mais de p) na superfície da estrela.

Estas condições são satisfeitas pelas soluções de Prasanna (1975a) e as apresentadas neste trabalho, com exceção da continuidade de λ'. Prasanna, no entanto, argumenta que estas descontinuidades de λ' ocorrem, igualmente, nas soluções correspondentes em relatividade geral, e são devidas ao sistema de coordenadas empregado.

Como observaram Raychaudhuri e Banerji (1977), a anulação de $\bar{p}$ na superfície da distribuição indica uma contribuição do spin a um tipo de "força", que não possui correspondente clássico e deve provavelmente ser devido ao caráter essencialmente quântico do spin.

O PROBLEMA DA DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE SPIN.

As equações de campo não provêm uma expressão da função densidade de spin S em termos dos potenciais métricos. No caso estático, a partir da equação de equilíbrio hidrostático

$$p' + (\rho + p)\frac{\nu'}{2} = 16\pi S\left(S' + \frac{\nu'}{2}S\right) , \tag{4.4}$$

adotou-se a suposição de Prasanna (1975a) de se manter válida a expressão do equilíbrio hidrostático da relatividade geral, resultando numa "equação de continuidade" para o spin:

$$S' + S\nu' = 0 \tag{4.5}$$

relacionando, assim, a função S com o potencial ν. Entretanto, esta é uma condição artificialmente introduzida no problema e não há necessidade alguma de mantê-la. Pelo contrário, já que o spin contribui para a energia da distribuição e dá origem a um tipo de pressão, como foi discutido anteriormente, deve ser consistente sua contribuição ao equilíbrio hidrostático.

Das eqs. (2.15b, 4.1), obtém-se o gradiente do potencial ν como:

$$\nu' = \frac{m + 4\pi r^3 \bar{p}}{r(r-2m)} . \tag{4.6}$$

Substituindo (4.6) em (4.4), a equação de equilíbrio hidrostático em Einstein-Cartan assume a forma:

$$p' = - \frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 \bar{p})}{r(r-2m)} , \tag{4.7}$$

que se reduz à chamada equação de Oppenheimer-Volkoff (1939) na teoria de Einstein para o caso de densidade de spin nula.

Suh (1978) considerou várias outras expressões alternativas para o equilíbrio hidrostático; entretanto, nenhuma forneceu algum aspecto de interesse.

SOLUÇÕES COM CAMPO MAGNÉTICO.

A densidade de spin S descreve como os spins das partículas que compõem o fluido estão alinhadas na direção radial. Para que isto ocorra, é necessário, no entanto, considerar a existência de um intenso monopolo magnético no centro da esfera de fluido. Isto não é uma situação satisfatória e, além disso, este campo magnético não foi levado em conta no tensor de energia-momentum.

Entretanto, Nduka (1977a) estudou o problema de esferas de fluido carregadas na teoria de Einstein-Cartan, utilizando a mesma linha de raciocínio empregada por Prasanna e adotada nas soluções deste trabalho. Outras soluções recentemente publicadas podem ser tratadas de maneira semelhan te, de modo a esclarecer a estrutura do sistema de equações que pode-se chamar de Einstein-Cartan-Maxwell: Faulkes (1969b), Nduka (1977b, 1978), Singh e Yadav (1978), Date e Radhakrishna (1977).

O PROBLEMA DA DESCRIÇÃO CLÁSSICA DO SPIN.

A maioria dos problemas mencionados com relação às soluções obtidas deve-se ao comportamento da função S. O ponto de vista adotado na determinação de S não se mostrou satisfatório e devem ser tentadas outras maneiras de se tratar esta questão. Pode-se tentar, como foi indicado, relacionar S com um campo magnético estabelecido a priori, embora seja possível que estes problemas sejam decorrentes de se supor um tensor densidade de spin com a forma:

$$S_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = S_{\alpha\beta}\, u^{\gamma} \;, \quad S_{\alpha\beta}\, u^{\beta} = 0 \;, \qquad (4.8)$$

possuindo, devido à simetria esférica, somente a componente $S_{23}{}^{0}$ independente e diferente de zero.

A validade da "descrição clássica" acima (fluido de Weyssenhoff) foi considerada suficiente, por ser uma extensão das propriedades do momentum angular intrínseco em relatividade especial.

Entretanto, não há necessidade de se manter o ponto de vista acima. Nesse caso, pode-se concluir quais as componentes não-nulas do tensor de torção $\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ (relacionado com $S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ pela segunda equação de campo) compatíveis com a simetria esférica, em geral (Kuchowicz 1975b). Para isto, anula-se a derivada de Lie do tensor $\tau_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$ em relação aos três vetores de Killing $\xi_{(i)}$ de uma variedade com simetria esférica. Em coordenadas esféricas (t,r,Θ,ϕ), estes vetores são:

$$\xi_{(1)} = (0, 0, 0, 1) \tag{4.9a}$$

$$\xi_{(2)} = (0, 0, \sin\varphi, \cot\theta \cos\varphi) \tag{4.9b}$$

$$\xi_{(3)} = (0, 0, \cos\varphi, -\cot\theta \sin\varphi) \tag{4.9c}$$

A derivada de Lie, aplicada ao tensor de torção, possuirá a forma, numa variedade de Riemann-Cartan:

$$\mathop{\pounds}_{\xi} \tau_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = \xi^{\mu}\tau_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}{}_{,\mu} + \tau_{\mu\beta}^{\ \ \gamma}\xi^{\mu}{}_{,\alpha} + \tau_{\alpha\mu}^{\ \ \gamma}\xi^{\mu}{}_{,\beta} - \tau_{\alpha\beta}^{\ \ \mu}\xi^{\gamma}{}_{,\mu} . \tag{4.10}$$

Daí resulta que existem oito componentes independentes e não-nulas do tensor de torção: $\tau_{01}^{\ \ 0}, \tau_{01}^{\ \ 1}, \tau_{02}^{\ \ 2} = \tau_{03}^{\ \ 3}, \tau_{03}^{\ \ 2} = -\tau_{02}^{\ \ 3}, \tau_{12}^{\ \ 2} = \tau_{13}^{\ \ 3}, \tau_{15}^{\ \ 2} = -\tau_{12}^{\ \ 3}, \tau_{23}^{\ \ 0}, \tau_{23}^{\ \ 1}$.

Kuchowicz (1975b) discute de que maneira passam a ser escritas as equações de campo e a que restrições estão sujeitas as componentes da torção. Algumas suposições físicas devem reduzir o número de componentes não-nulas da torção e podem-se obter resultados sem utilizar expressões bastante restritivas com a "equação de continuidade" (4.5). Entretanto, a adaptação de soluções da relatividade geral neste esquema deverá também sofrer dificuldades com relação às condições na superfície da estrela.

SOLUÇÕES COM SIMETRIA CILÍNDRICA.

Um quadro fisicamente mais plausível pode ser discutido quando se deixa a condição de simetria esférica. Uma distribuição de matéria com simetria cilíndrica é mais adequada para tratar, por exemplo, as propriedades de rotação e de magnetismo que, porventura, sejam consideradas.

Prasanna (1975b) considera uma distribuição estática em que os spins das partículas individuais do fluido estão alinhados no eixo de simetria e calcula as equações de campo de Einstein-Cartan no caso de pressão anisotrópica. A solução é adaptada da relatividade geral fazendo-se as substituições ρ por $\bar{\rho} = \rho-8\pi S^2$ e p por $\bar{p} = p-8\pi S^2$. Os problemas que sofrem as soluções com simetria esférica são, de certa forma, resolvidos, pois é possível introduzir-se uma equação de estado plausível e os potenciais métricos possuem derivadas contínuas na fronteira entre a distribuição e o vácuo exterior, cuja simetria é descrita pela solução cilíndrica de Levi-Civita. A pressão, no entanto, é descontínua na superfície da distribuição.

Uma situação mais realista deve considerar um campo magnético que induza esta distribuição de spins. Prasanna (1975d) estuda o problema das equações de Einstein-Cartan-Maxwell no caso de simetria cilíndrica, que também resulta numa solução em que a equação de estado é aceitável e os potenciais métricos são funções de classe C^1 em todo o espaço.

Uma discussão sobre uma possível solução interior com torção para a métrica de Kerr no caso estacionário foi iniciada por Prasanna (1977), sem, no entanto, ter sido completada. Entretanto, a teoria linearizada de Einstein --Cartan fornece, para uma esfera estática de poeira de Weyssenhoff, uma solução cuja parte exterior é uma linearização da métrica de Kerr (ver Arkuszewski, Kopczyński e Ponomariev 1974).

Conclusões.

Neste trabalho procurou-se apresentar os principais aspectos da teoria gravitacional de Einstein-Cartan e discutir a aplicação de suas equações de campo ao problema específico do interior de esferas finitas de fluido perfeito com spin e suas conseqüências.

No Capítulo I foi construída a teoria, estabelecendo-se, primeiramente, a geometria diferencial da variedade espaço-temporal de Riemann-Cartan U_4, enriquecida (em relação ao espaço-tempo riemanniano da relatividade geral) pela introdução de uma conexão assimétrica, implicando na definição dos tensores de torção e contorção.

Em seguida, com base no espaço-tempo U_4, desenvolveu-se a teoria clássica de campos para determinar as equações fundamentais que descreveriam a gravitação gerada por um campo tensorial ψ. Para isto, definiu-se o tensor densidade de momentum angular de spin como a derivada funcional da densidade lagrangiana que descreve ψ em relação ao tensor de contorção.

Surgiram, portanto, duas equações de campo para a teoria de Einstein-Cartan: a primeira, $G_{\alpha\beta} = 8\pi t_{\alpha\beta}$, é semelhante em forma à equação correspondente em relatividade geral, pois relaciona o tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$ (que agora inclui termos de torção) e o tensor de energia-momentum $t_{\alpha\beta}$ (assimétrico); e a segunda, $\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 8\pi S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$, sem correspondente em relatividade geral, provê uma relação algébrica entre o tensor de spin $S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ e uma combinação linear do tensor de torção, dada por $\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$. Estas equações puderam ser determinadas, tanto pelo formalismo tensorial, como pelo de formas diferenciais.

A aplicação do teorema de Noether levou a identidades para a densidade lagrangiana e permitiu a identificação de $t_{\alpha\beta}$ e $S_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ como quantidades a serem conservadas na variedade de Riemann-Cartan, fornecendo, desta forma, "equações de conservação" para a energia-momentum e para o momentum angular.

O segundo capítulo trata da influência da geometria de Riemann-Cartan em várias situações físicas. Primeiramente, chamou-se a atenção para a existência da interação de contato spin-spin característica da teoria, que surge ao se separar, na densidade lagrangiana de campos, a parte riemanniana da parte não-riemanniana. Também foram estudadas as trajetórias de partículas livres num espaço-tempo com torção, o que levou a definir as curvas extremais (que se identificam com as curvas correspondentes em espaço-tempo riemanniano) e as curvas autoparalelas, em que aparece explicitamente a conexão assimétrica do U_4. Obteve-se, para uma família de autoparalelas, uma equação de desvio, generalizando, assim, a equação de desvio geodésico dos espaços sem torção.

Em seguida, abordou-se o eletromagnetismo, que, devido a sua invariância de gauge, não pode ser afetado pela torção. Entretanto, foi considerado de interesse ex pressar as equações de Maxwell em termos dos objetos covariantes em U_4.

O problema de um fluido perfeito com spin (Weyssenhoff) num espaço-tempo de Riemann-Cartan foi tratado a seguir. Foram estabelecidas as definições dos parâmetros ciemáticos deste fluido: expansão, deformação e rotação e obtidas suas equações de evolução temporal.

Enfim, o Capítulo III é dedicado a modelos de estrelas esféricas com spin. Tomando como base os capítulos anteriores, as equações de campo de Einstein-Cartan são aplicadas de modo a determinar as funções métricas e as expressões para a pressão isotrópica e para a densidade de massa-energia destas esferas, para as quais os spins das partículas que compõem o fluido estão alinhados radialmente.

As soluções foram obtidas através de uma simples adaptação de situações já conhecidas em relatividade geral, as quais são utilizadas para expressar a pressão e a densidade "redefinidas" de modo a incluir os termos de spin.

Desta forma, foram construídos dois modelos : o primeiro, estático, baseado numa análise de Adler e o segundo, dinâmico, adaptado a partir de uma solução de Vaidya, na qual considera-se a emissão de radiação eletromagnética em aproximação de ótica geométrica. Foram discutidas, enfim, as características destas soluções e, em especial , fez-se menção dos aspectos que tornam este tipo de abordagem do problema de estrelas com spin implausível.

A literatura sobre Einstein-Cartan e outras teorias com torção é bastante extensa e um grande número de tópicos não foi aqui apresentado. Entre os principais desenvolvimento da teoria omitidos neste trabalho, pode-se citar: (1) o ponto de vista que trata Einstein-Cartan como uma teoria de gauge para o grupo de Poincaré (Cho 1976a,b); (2) a linearização das equações de campo de Einstein-Cartan (Arkuszewski, Kopczyński e Ponomariev 1974; ver, também, Adamowicz 1975); (3) a formulação hamiltoniana de Einstein-Cartan desenvolvida, por exemplo, por Kasuya (1978), Szczyrba (1978) e, utilizando o formalismo de formas diferenciais, por Galvão (1976); (4) o tratamento de campos espinoriais em U_4 (em especial, o campo de Dirac): Ver Hehl (1974), Datta (1971a,b), Hehl e Datta (1971). A eletrodinâmica espinorial em Riemann-Cartan foi considerada por Hayashi e Sasaki (1978).

A teoria de Einstein-Cartan teve grande interesse devido à expectativa de que os termos repulsivos da interação spin-spin evitassem a formação de singularidades no colapso gravitacional de estrelas e em cosmologia. Na verdade, vários modelos cosmológicos sem singularidade foram construídos: Trautman (1973b), Kopczyński (1972,1973), Stewart e Hájíček (1973), Tafel (1973), Raychaudhuri (1975), Kuchowicz (1975c,1978). Além disso, o colapso de esferas finitas de poeira com spin foi evitado no modelo de Raychaudhuri e Banerji (1977) num raio maior que o raio de Schwarzschild da distribuição (Banerji 1978)*.

Os teoremas de singularidades de Hawking-Penrose (ver Hawking e Ellis 1973) foram generalizados para espaços com torção por Hehl, von der Heyde e Kerlick (1974). Nesta análise, foi mostrado que o colapso de modelos cosmológicos com spin está relacionado com a violação de uma condição de energia pela distribuição de massa-energia corrigida pelos termos de spin. No entanto, ao considerar distribuições em que o campo de Dirac é a fonte de gravitação, Kerlick (1975,1976) chegou à conclusão que as correções de spin induzidas por este campo fazem com que a interação spin-spin seja repulsiva para partículas de Dirac com spins alinhados e atrativa quando os spins estão opostos. Deste modo, a formação de singularidades é implementada ao invés de evitada. Inomata (1978) também obteve um exemplo de campo de Dirac que confirma os resultados de Kerlick. O'Connell (1977) analisa este problema através da parte não-riemanniana da densidade lagrangiana da teoria, concluindo que a interação de contato spin-spin é atrativa no caso de um campo cujo tensor $S_{\alpha\beta\gamma}$ é totalmente antissimétrico.

Assim, a prevenção do colapso que ocorre nos modelos cosmológicos e estelares mencionados pode ou não ser uma descrição "correta" da realidade. Estes modelos poderão ser válidos desde que seja plausível supor uma distribuição de matéria com spin descrita como um fluido de Weyssenhoff, considerado a densidades altamente

* Ver, também, o estudo do colapso de uma esfera de fluido de Weyssenhoff por Arkuszewski, Kopczyński e Ponomariev (1975) que não colapsa, embora os autores afirmem o contrário. Esta situação foi esclarecida por Hehl, von der Heyde, Kerlick e Nester (1976).

elevadas.

Por outro lado, Nester e Isenberg (1977) conceberam um outro tipo de comportamento singular, desta vez associado à torção: por exemplo, uma fonte cuja densidade de spin depende explicitamente da torção, como é o caso da maioria dos campos tensoriais. Se se introduz esta expressão na segunda equação de campo e a resolve para a torção, a solução obtida pode depender do campo de tal forma que a torção assume valores infinitos, enquanto que o campo assume valores finitos. Este tipo de "singularidade da torção" foi estudado por Nester e Isenberg no caso do campo de Proca, acoplado a um modelo cosmológico de Bianchi tipo V. Estes autores concluiram que, à medida que o modelo colapsa o campo de Proca atinge os valores críticos para os quais a torção aumenta enormemente. Assim, o papel da torção neste esquema também não é o de conter o colapso , mas o de provocar um novo tipo de singularidade física.

Além disso, e, apesar destes fenômenos serem característicos da torção, Nester (1977) demonstrou a equivalência efetiva entre as teorias de Einstein e Einstein - -Cartan, já que se pode encontrar, para qualquer lagrangiana de campo na teoria de Einstein, uma outra lagrangiana de campo em Einstein-Cartan que resulta em equações de campo equivalentes às deduzidas em relatividade geral para a mesma métrica e a mesma fonte. As duas teorias tornam-se , assim, indistingüíveis, inclusive experimentalmente. A teoria de Einstein-Cartan possui, portanto, as mesmas patologias que a relatividade geral e, além disso, é capaz de prever outros efeitos indesejáveis. No entanto, pode-se optar entre as teorias de Einstein e Einstein-Cartan de acordo com a conveniência do problema. Um exemplo de fonte para a qual as equações de campo de Einstein-Cartan tornam-se mais simples que as de Einstein é fornecido por Deser e Zumino (1976) e utilizado em vários subseqüentes trabalhos em supergravidade.

Todavia, tanto a ocorrência de singularidades da torção como a equivalência formal entre as teorias de Einstein e Einstein-Cartan são consequências do fato de ser a torção uma quantidade que não pode se propagar para fora da distribuição fonte do campo gravitacional. Recentemente, investigações que incluem uma torção dinâmica têm sido realizadas.*

---

* Ver Kaempffer (1978), Hojman, Rosenbaum, Ryan e Shepley (1978), Hojman, Rosenbaum e Ryan (1979).

Le fond de l'air est frais.

FRED

Apêndice 1.

CÁLCULO DOS TENSORES DE CURVATURA NO CASO ESTÁTICO.

O cálculo dos tensores de curvatura utilizados no Capítulo III foi realizado em base de tetrada, utilizando o formalismo das formas diferenciais, de acordo com o método exposto em Soares (1978). A partir da métrica:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2) \qquad (1.1)$$

são definidas a seguinte base de tetrada e sua base dual de 1-formas:

$$\omega^{\hat{0}} = e^{\nu/2} dt \longrightarrow dt = e^{-\nu/2}\, \omega^{\hat{0}} \qquad (1.2a)$$

$$\omega^{\hat{1}} = e^{\lambda/2} dr \longrightarrow dr = e^{-\lambda/2}\, \omega^{\hat{1}} \qquad (1.2b)$$

$$\omega^{\hat{2}} = r\, d\theta \longrightarrow d\theta = \frac{1}{r}\, \omega^{\hat{2}} \qquad (1.2c)$$

$$\omega^{\hat{3}} = r\, sen\theta\, d\varphi \longrightarrow d\varphi = \frac{1}{r\, sen\theta}\, \omega^{\hat{3}} \qquad (1.2d)$$

de modo a poder-se escrever a métrica sob a forma minkowskiana

$$ds^2 = (\omega^{\hat{0}})^2 - (\omega^{\hat{1}})^2 - (\omega^{\hat{2}})^2 - (\omega^{\hat{3}})^2 \qquad (1.3)$$

Tomando a derivada exterior das 1-formas em (1.2), obtém-se:

$$d\omega^{\hat{0}} = -\frac{\nu'}{2} e^{-\lambda/2}\, \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{1}} \tag{1.4a}$$

$$d\omega^{\hat{1}} = 0 \tag{1.4b}$$

$$d\omega^{\hat{2}} = \frac{e^{-\lambda/2}}{r}\, \omega^{\hat{1}} \wedge \omega^{\hat{2}} \tag{1.4c}$$

$$d\omega^{\hat{3}} = \frac{e^{-\lambda/2}}{r}\, \omega^{\hat{1}} \wedge \omega^{\hat{3}} + \frac{\cot\theta}{r}\, \omega^{\hat{2}} \wedge \omega^{\hat{3}} \tag{1.4d}$$

Os coeficientes de rotação de Ricci são introduzidos através da relação:

$$d\omega^{\hat{\alpha}} = \frac{1}{2}\, \gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\lambda}}\, \omega^{\hat{\beta}} \wedge \omega^{\hat{\lambda}} \quad , \tag{1.5}$$

de modo que, comparando (1.5) com (1.4), os γ's não nulos são:

$$\gamma^{\hat{0}}{}_{\hat{0}\hat{1}} = -\gamma^{\hat{0}}{}_{\hat{1}\hat{0}} = -\frac{\nu'}{2}\, e^{-\lambda/2} \tag{1.6a}$$

$$\gamma^{\hat{2}}{}_{\hat{1}\hat{2}} = \gamma^{\hat{3}}{}_{\hat{1}\hat{3}} = -\gamma^{\hat{2}}{}_{\hat{2}\hat{1}} = -\gamma^{\hat{3}}{}_{\hat{3}\hat{1}} = \frac{e^{-\lambda/2}}{r} \tag{1.6b}$$

$$\gamma^{\hat{3}}{}_{\hat{2}\hat{3}} = -\gamma^{\hat{3}}{}_{\hat{3}\hat{2}} = \frac{\cot\theta}{r} \tag{1.6c}$$

Definindo, agora, os coeficientes

$$C_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = \frac{1}{2}\left(\gamma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}} - \gamma_{\hat{\beta}\hat{\alpha}\hat{\gamma}} - \gamma_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\beta}}\right) \tag{1.7}$$

os únicos diferentes de zero são:

$$C_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}} = -C_{\hat{1}\hat{0}\hat{0}} = \frac{\nu'}{2}\, e^{-\lambda/2} \tag{1.8a}$$

$$C_{\hat{1}\hat{2}\hat{2}} = C_{\hat{1}\hat{3}\hat{3}} = -C_{\hat{2}\hat{1}\hat{2}} = -C_{\hat{3}\hat{1}\hat{3}} = \frac{e^{-\lambda/2}}{r} \tag{1.8b}$$

$$C_{\hat{2}\hat{3}\hat{3}} = -C_{\hat{3}\hat{2}\hat{3}} = \frac{\cot\theta}{r} \tag{1.8c}$$

e podem ser obtidas as 1-formas de rotação riemannianas:

$$\gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}} = C^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\lambda}}\,\omega^{\hat{\lambda}} \tag{1.9}$$

$$\gamma^{\hat{0}}{}_{\hat{1}} = \gamma^{\hat{1}}{}_{\hat{0}} = \frac{\nu'}{2}\, e^{-\lambda/2}\,\omega^{\hat{0}} \tag{1.10a}$$

$$\gamma^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} = -\gamma^{\hat{2}}{}_{\hat{1}} = -\frac{e^{-\lambda/2}}{r}\,\omega^{\hat{2}} \tag{1.10b}$$

$$\gamma^{\hat{1}}{}_{\hat{3}} = -\gamma^{\hat{3}}{}_{\hat{1}} = -\frac{e^{-\lambda/2}}{r}\,\omega^{\hat{3}} \tag{1.10c}$$

$$\gamma^{\hat{2}}{}_{\hat{3}} = -\gamma^{\hat{3}}{}_{\hat{2}} = -\frac{\cot\theta}{r}\,\omega^{\hat{3}} \tag{1.10d}$$

A suposição de densidade de spin radial forne-

ce:

$$S_{\hat{2}\hat{3}}{}^{\hat{0}} = -S_{\hat{3}\hat{2}}{}^{\hat{0}} = S(r)\,u^{\hat{0}} = S(r) \tag{1.11a}$$

e

$$\tau_{\hat{2}\hat{3}}{}^{\hat{0}} = -\tau_{\hat{3}\hat{2}}{}^{\hat{0}} = 8\pi S(r) \tag{1.11b}$$

Assim, as 1-formas de torção,

$$\Theta^{\hat{\alpha}} = \tau_{\hat{\beta}\hat{\lambda}}{}^{\hat{\alpha}}\,\omega^{\hat{\beta}} \wedge \omega^{\hat{\lambda}} \tag{1.12}$$

assumem os valores:

$$\Theta^{\hat{0}} = 16\pi S\, \omega^{\hat{2}} \wedge \omega^{\hat{3}} \tag{1.13a}$$

$$\Theta^{\hat{1}} = \Theta^{\hat{2}} = \Theta^{\hat{3}} = 0 \quad . \tag{1.13b}$$

Introduzindo as 1-formas de correção como

$$\Theta^{\hat{\alpha}} = \lambda^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}} \wedge \omega^{\hat{\beta}} \tag{1.14}$$

tem-se que:

$$\lambda^{\hat{0}}{}_{\hat{2}} = \lambda^{\hat{2}}{}_{\hat{0}} = -8\pi S\, \omega^{\hat{3}} \tag{1.15a}$$

$$\lambda^{\hat{0}}{}_{\hat{3}} = \lambda^{\hat{3}}{}_{\hat{0}} = 8\pi S\, \omega^{\hat{2}} \tag{1.15b}$$

$$\lambda^{\hat{2}}{}_{\hat{3}} = -\lambda^{\hat{3}}{}_{\hat{2}} = -8\pi S\, \omega^{\hat{0}} \quad . \tag{1.15c}$$

Logo, as 1-formas de rotação de Einstein-Cartan são dadas pela soma das 1-formas de rotação riemannianas e das 1-formas de correção:

$$\omega^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}} = \gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}} + \lambda^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}} \quad . \tag{1.16}$$

Portanto,

$$\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{1}} = \omega^{\hat{1}}{}_{\hat{0}} = \gamma^{\hat{0}}{}_{\hat{1}} \tag{1.17a}$$

$$\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{2}} = \omega^{\hat{2}}{}_{\hat{0}} = \lambda^{\hat{0}}{}_{\hat{2}} \tag{1.17b}$$

$$\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{3}} = \omega^{\hat{3}}{}_{\hat{0}} = \lambda^{\hat{0}}{}_{\hat{3}} \tag{1.17c}$$

$$\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} = -\omega^{\hat{2}}{}_{\hat{1}} = \gamma^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} \tag{1.17d}$$

$$\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{3}} = -\omega^{\hat{3}}{}_{\hat{1}} = \gamma^{\hat{1}}{}_{\hat{3}} \tag{1.17e}$$

$$\omega^{\hat{2}}{}_{\hat{3}} = -\omega^{\hat{3}}{}_{\hat{2}} = -\frac{\cot\theta}{r}\,\omega^{\hat{3}} - 8\pi S\,\omega^{\hat{0}}\,. \tag{1.17f}$$

As derivadas exteriores destas formas são:

$$d\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{1}} = d\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{0}} = -\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right) e^{-\lambda}\,\omega^{\hat{0}}\wedge\omega^{\hat{1}} \tag{1.18a}$$

$$d\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{2}} = d\omega^{\hat{2}}{}_{\hat{0}} = -8\pi\left(S' + \frac{S}{r}\right) e^{-\lambda/2}\,\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{3}} + -8\pi S\,\frac{\cot\theta}{r}\,\omega^{\hat{2}}\wedge\omega^{\hat{3}} \tag{1.18b}$$

$$d\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{3}} = d\omega^{\hat{3}}{}_{\hat{0}} = 8\pi\left(S' + \frac{S}{r}\right) e^{-\lambda/2}\,\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{2}} \tag{1.18c}$$

$$d\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} = -d\omega^{\hat{2}}{}_{\hat{1}} = \frac{\lambda'}{2r}\,e^{-\lambda}\,\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{2}} \tag{1.18d}$$

$$d\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{3}} = -d\omega^{\hat{3}}{}_{\hat{1}} = \frac{\lambda'}{2r}\,e^{-\lambda}\,\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{3}} - \frac{\cot\theta}{r^2}\,e^{-\lambda/2}\,\omega^{\hat{2}}\wedge\omega^{\hat{3}} \tag{1.18e}$$

$$d\omega^{\hat{2}}{}_{\hat{3}} = -d\omega^{\hat{3}}{}_{\hat{2}} = 8\pi\left(S' + \frac{\nu' S}{2}\right) e^{-\lambda/2}\,\omega^{\hat{0}}\wedge\omega^{\hat{1}} + \frac{\omega^{\hat{2}}\wedge\omega^{\hat{3}}}{r^2} \tag{1.18f}$$

Assim, calculam-se as 2-formas de curvatura, através da expressão

$$\Omega^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}} = d\omega^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}} + \omega^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\lambda}}\wedge\omega^{\hat{\lambda}}{}_{\hat{\beta}} \tag{1.19}$$

Resulta:

$$\Omega^{\hat{0}}{}_{\hat{1}} = \Omega^{\hat{1}}{}_{\hat{0}} = -\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right) e^{-\lambda}\, \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{1}} + 16\pi S\, \frac{e^{-\lambda/2}}{r}\, \omega^{\hat{2}} \wedge \omega^{\hat{3}} \tag{1.20a}$$

$$\Omega^{\hat{0}}{}_{\hat{2}} = \Omega^{\hat{2}}{}_{\hat{0}} = -\left(\frac{\nu'}{2r} e^{-\lambda} + 64\pi^2 S^2\right) \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{2}} - 8\pi\left(S' + \frac{S}{r}\right) e^{-\lambda/2}\, \omega^{\hat{1}} \wedge \omega^{\hat{3}} \tag{1.20b}$$

$$\Omega^{\hat{0}}{}_{\hat{3}} = \Omega^{\hat{3}}{}_{\hat{0}} = -\left(\frac{\nu'}{2r} e^{-\lambda} + 64\pi^2 S^2\right) \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{3}} + - 8\pi\left(S' + \frac{S}{r}\right) e^{-\lambda/2}\, \omega^{\hat{1}} \wedge \omega^{\hat{2}} \tag{1.20c}$$

$$\Omega^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} = -\Omega^{\hat{2}}{}_{\hat{1}} = -8\pi S\left(\frac{\nu'}{2} - \frac{1}{r}\right) e^{-\lambda/2}\, \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{3}} + \frac{\lambda'}{2r} e^{-\lambda}\, \omega^{\hat{1}} \wedge \omega^{\hat{2}} \tag{1.20d}$$

$$\Omega^{\hat{1}}{}_{\hat{3}} = -\Omega^{\hat{3}}{}_{\hat{1}} = 8\pi S\left(\frac{\nu'}{2} - \frac{1}{r}\right) e^{-\lambda/2}\, \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{2}} + \frac{\lambda'}{2r}\, e^{-\lambda}\, \omega^{\hat{1}} \wedge \omega^{\hat{3}} \tag{1.20e}$$

$$\Omega^{\hat{2}}{}_{\hat{3}} = -\Omega^{\hat{3}}{}_{\hat{2}} = 8\pi\left(S' + \frac{\nu' S}{2}\right) e^{-\lambda/2}\, \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{1}} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + 64\pi^2 S^2\right) \omega^{\hat{2}} \wedge \omega^{\hat{3}} \tag{1.20f}$$

Donde se obtêm, imediatamente, as componentes não nulas do tensor de curvatura, por comparação com a expressão

$$\Omega^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta} = \frac{1}{2} R_{\hat\lambda\hat\rho\hat\beta}{}^{\hat\alpha}\, \omega^{\hat\lambda} \wedge \omega^{\hat\rho} : \tag{1.21}$$

$$R_{\hat0\hat1\hat1}{}^{\hat0} = -R_{\hat1\hat0\hat1}{}^{\hat0} = R_{\hat0\hat1\hat0}{}^{\hat1} = -R_{\hat1\hat0\hat0}{}^{\hat1} = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right) \tag{1.22a}$$

$$R_{\hat2\hat3\hat1}{}^{\hat0} = -R_{\hat3\hat2\hat1}{}^{\hat0} = R_{\hat2\hat3\hat0}{}^{\hat1} = -R_{320}{}^{\hat1} = 16\pi S\,\frac{e^{-\lambda/2}}{r} \tag{1.22b}$$

$$R_{\hat0\hat2\hat2}{}^{\hat0} = -R_{\hat2\hat0\hat2}{}^{\hat0} = R_{\hat0\hat2\hat0}{}^{\hat2} = -R_{\hat2\hat0\hat0}{}^{\hat2} = -\left(\frac{\nu' e^{-\lambda}}{2r} + 64\pi^2 S^2\right) \tag{1.22c}$$

$$R_{\hat1\hat3\hat2}{}^{\hat0} = -R_{\hat3\hat1\hat2}{}^{\hat0} = R_{\hat1\hat3\hat0}{}^{\hat2} = -R_{\hat3\hat1\hat0}{}^{\hat2} = -8\pi\left(S' + \frac{S}{r}\right)e^{-\lambda/2} \tag{1.22d}$$

$$R_{\hat0\hat3\hat3}{}^{\hat0} = -R_{\hat3\hat0\hat3}{}^{\hat0} = R_{\hat0\hat3\hat0}{}^{\hat3} = -R_{\hat3\hat0\hat0}{}^{\hat3} = -\left(\frac{\nu' e^{-\lambda}}{2r} + 64\pi^2 S^2\right) \tag{1.22e}$$

$$R_{\hat1\hat2\hat3}{}^{\hat0} = -R_{\hat2\hat1\hat3}{}^{\hat0} = R_{\hat1\hat2\hat0}{}^{\hat3} = -R_{\hat2\hat1\hat0}{}^{\hat3} = 8\pi e^{-\lambda/2}\left(S' + \frac{S}{r}\right) \tag{1.22f}$$

$$R_{\hat0\hat3\hat2}{}^{\hat1} = -R_{\hat3\hat0\hat2}{}^{\hat1} = -R_{\hat0\hat3\hat1}{}^{\hat2} = R_{\hat3\hat0\hat1}{}^{\hat2} = -8\pi S e^{-\lambda/2}\left(\frac{\nu'}{2} - \frac{1}{r}\right) \tag{1.22g}$$

$$R_{\hat1\hat2\hat2}{}^{\hat1} = -R_{2\hat1\hat2}{}^{\hat1} = -R_{\hat1\hat2\hat1}{}^{\hat2} = R_{\hat2\hat1\hat1}{}^{\hat2} = \frac{\lambda' e^{-\lambda}}{2r} \tag{1.22h}$$

$$R_{\hat0\hat2\hat3}{}^{\hat1} = -R_{\hat0\hat2\hat3}{}^{\hat1} = -R_{\hat0\hat2\hat1}{}^{\hat3} = R_{\hat2\hat0\hat1}{}^{\hat3} = 8\pi S e^{-\lambda/2}\left(\frac{\nu'}{2} - \frac{1}{r}\right) \tag{1.22i}$$

$$R_{\hat1\hat3\hat3}{}^{\hat1} = -R_{\hat3\hat1\hat3}{}^{\hat1} = -R_{\hat1\hat3\hat1}{}^{\hat3} = R_{\hat3\hat1\hat1}{}^{\hat3} = \frac{\lambda' e^{-\lambda}}{2r} \tag{1.22j}$$

$$R_{\hat0\hat1\hat3}{}^{\hat2} = -R_{\hat0\hat1\hat2}{}^{\hat3} = -R_{\hat1\hat0\hat3}{}^{\hat2} = R_{\hat1\hat0\hat2}{}^{\hat3} = 8\pi e^{-\lambda/2}\left(S' + \frac{\nu' S}{2}\right) \tag{1.22k}$$

$$R_{\hat2\hat3\hat3}{}^{\hat2} = -R_{\hat3\hat2\hat3}{}^{\hat2} = -R_{\hat2\hat3\hat2}{}^{\hat3} = R_{\hat3\hat2\hat2}{}^{3} = \frac{1}{r^2} - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + 64\pi^2 S^2 \tag{1.22ℓ}$$

E, finalmente, o tensor de Ricci tem como componentes:

$$R_{\hat{0}\hat{0}} = \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'}{r}\right)e^{-\lambda} + 128\pi^2 s^2 \tag{1.23a}$$

$$R_{\hat{1}\hat{1}} = -\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'}{r}\right)e^{\lambda} \tag{1.23b}$$

$$R_{\hat{2}\hat{2}} = R_{\hat{3}\hat{3}} = \left(\frac{\lambda'}{2r} - \frac{\nu'}{2r} - \frac{1}{r^2}\right)e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} \tag{1.23c}$$

Apêndice 2.

CÁLCULO DO TENSOR DE EINSTEIN PARA O CASO DINÂMICO.

A seqüência de cálculos e as definições são as mesmas do Apêndice 1. Entretanto, a métrica contém funções dependentes do tempo:

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}dt^2 - e^{\lambda(r,t)}dr^2 - r^2 e^{\beta(r,t)}(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi^2)$$

Base de tetrada e base dual:

$$\omega^{\hat{0}} = e^{\nu/2}dt \longrightarrow dt = e^{-\nu/2}\omega^{\hat{0}}$$

$$\omega^{\hat{1}} = e^{\lambda/2}dr \longrightarrow dr = e^{-\lambda/2}\omega^{\hat{1}}$$

$$\omega^{\hat{2}} = r e^{\beta/2}d\theta \longrightarrow d\theta = \frac{e^{-\beta/2}}{r}\omega^{\hat{2}}$$

$$\omega^{\hat{3}} = r\,\mathrm{sen}\theta\, e^{\beta/2}d\varphi \longrightarrow d\varphi = \frac{e^{-\beta/2}}{r\,\mathrm{sen}\theta}\omega^{\hat{3}} ;$$

$$d\omega^{\hat{0}} = -\frac{\nu'}{2}e^{-\lambda/2}\omega^{\hat{0}}\wedge\omega^{\hat{1}}$$

$$d\omega^{\hat{1}} = \frac{\dot{\lambda}}{2}e^{-\nu/2}\omega^{\hat{0}}\wedge\omega^{\hat{1}}$$

$$d\omega^{\hat{2}} = \frac{\dot{\beta}}{2}e^{-\nu/2}\omega^{\hat{0}}\wedge\omega^{\hat{2}} + \left(\frac{1}{r}+\frac{\beta'}{2}\right)e^{-\lambda/2}\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{2}}$$

$$d\omega^{\hat{3}} = \frac{\dot{\beta}}{2}e^{-\nu/2}\omega^{\hat{0}}\wedge\omega^{\hat{3}} + \left(\frac{1}{r}+\frac{\beta'}{2}\right)e^{-\lambda/2}\omega^{\hat{1}}\wedge\omega^{\hat{3}} + \frac{\cot\theta}{r}e^{-\beta/2}\omega^{\hat{2}}\wedge\omega^{\hat{3}}.$$

Coeficientes de rotação de Ricci:

$$\gamma^{\hat{0}}{}_{\hat{0}\hat{1}} = -\frac{\nu'}{2} e^{-\lambda/2}, \quad \gamma^{\hat{1}}{}_{\hat{0}\hat{1}} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{-\nu/2}, \quad \gamma^{\hat{2}}{}_{\hat{0}\hat{2}} = \gamma^{\hat{3}}{}_{\hat{0}\hat{3}} = \frac{\dot{\beta}}{2} e^{-\nu/2};$$

$$\gamma^{\hat{2}}{}_{\hat{1}\hat{2}} = \gamma^{\hat{3}}{}_{\hat{1}\hat{3}} = \left(\frac{1}{r} + \frac{\beta'}{2}\right) e^{-\lambda/2};$$

$$\gamma^{\hat{3}}{}_{\hat{2}\hat{3}} = \frac{\cot\theta}{r} e^{-\beta/2}.$$

Coeficientes C:

$$C^{\hat{0}}{}_{\hat{1}\hat{0}} = C^{\hat{1}}{}_{\hat{0}\hat{0}} = \frac{\nu'}{2} e^{-\lambda/2};$$

$$C^{\hat{0}}{}_{\hat{1}\hat{1}} = C^{\hat{1}}{}_{\hat{0}\hat{1}} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{-\nu/2};$$

$$C^{\hat{0}}{}_{\hat{2}\hat{2}} = C^{\hat{2}}{}_{\hat{0}\hat{2}} = C^{\hat{0}}{}_{\hat{3}\hat{3}} = C^{\hat{3}}{}_{\hat{0}\hat{3}} = \frac{\dot{\beta}}{2} e^{-\nu/2}$$

$$C^{\hat{1}}{}_{\hat{2}\hat{2}} = -C^{\hat{2}}{}_{\hat{1}\hat{2}} = C^{\hat{1}}{}_{\hat{3}\hat{3}} = -C^{\hat{3}}{}_{\hat{1}\hat{3}} = -\left(\frac{1}{r} + \frac{\beta'}{2}\right) e^{-\lambda/2}$$

$$C^{\hat{2}}{}_{\hat{3}\hat{3}} = -C^{\hat{3}}{}_{\hat{2}\hat{3}} = -\frac{\cot\theta}{r} e^{-\beta/2}$$

1-formas de rotação:

$$\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{1}} = \omega^{\hat{1}}{}_{\hat{0}} = \frac{\nu'}{2} e^{-\lambda/2} \omega^{\hat{0}} + \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{-\nu/2} \omega^{\hat{1}}$$

$$\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{2}} = \omega^{\hat{2}}{}_{\hat{0}} = \frac{\dot{\beta}}{2} e^{-\nu/2} \omega^{\hat{2}} - 8\pi S \omega^{\hat{3}}$$

$$\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{3}} = \omega^{\hat{3}}{}_{\hat{0}} = 8\pi S \omega^{\hat{2}} + \frac{\dot{\beta}}{2} e^{-\nu/2} \omega^{\hat{3}}$$

$$\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} = -\omega^{\hat{2}}{}_{\hat{1}} = -\left(\frac{1}{r} + \frac{\beta'}{2}\right) e^{-\lambda/2} \omega^{\hat{2}}$$

$$\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{3}} = -\omega^{\hat{3}}{}_{\hat{1}} = -\left(\frac{1}{r} + \frac{\beta'}{2}\right) e^{-\lambda/2}\, \omega^{\hat{3}}$$

$$\omega^{\hat{2}}{}_{\hat{3}} = -\omega^{\hat{3}}{}_{\hat{2}} = -8\pi S\, \omega^{\hat{0}} - \frac{\cot\theta}{r}\, e^{-\beta/2}\, \omega^{\hat{3}} \quad ;$$

$$d\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{1}} = d\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{0}} = \left[-\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right) e^{-\lambda} + \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right) e^{-\nu}\right] \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{1}}$$

$$d\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{2}} = d\omega^{\hat{2}}{}_{\hat{0}} = \left(\frac{\ddot{\beta}}{2} - \frac{\dot{\beta}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\beta}^2}{4}\right) e^{-\nu} \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{2}} - 8\pi\left(\dot{S} + \frac{\dot{\beta} S}{2}\right) e^{-\nu/2} \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{3}} +$$

$$+\left(\frac{\dot{\beta}'}{2} - \frac{\dot{\beta}\nu'}{4} + \frac{\dot{\beta}\beta'}{4} + \frac{\dot{\beta}}{2r}\right) e^{-(\nu+\lambda)/2}\, \omega^{\hat{1}} \wedge \omega^{\hat{2}} - 8\pi\left[S' + \left(\frac{1}{r} + \frac{\beta'}{2}\right) S\right] e^{-\lambda/2} \cdot$$

$$\cdot\, \omega^{\hat{1}} \wedge \omega^{\hat{3}} - 8\pi \frac{\cot\theta}{r}\, e^{-\beta/2} S\, \omega^{\hat{2}} \wedge \omega^{\hat{3}}$$

$$d\omega^{\hat{0}}{}_{\hat{3}} = d\omega^{\hat{3}}{}_{\hat{0}} = 8\pi\left(\dot{S} + \frac{\dot{\beta} S}{2}\right) e^{-\nu/2} \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{2}} + \left(\frac{\ddot{\beta}}{2} - \frac{\dot{\beta}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\beta}^2}{4}\right) e^{-\nu} \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{3}} +$$

$$+ 8\pi\left[S' + \left(\frac{1}{r} + \frac{\beta'}{2}\right) S\right] e^{-\lambda/2}\, \omega^{\hat{1}} \wedge \omega^{\hat{2}} + \left(\frac{\dot{\beta}'}{2} - \frac{\dot{\beta}\nu'}{4} + \frac{\dot{\beta}}{2r} + \frac{\dot{\beta}\beta'}{4}\right) e^{-(\nu+\lambda)/2} \cdot$$

$$\cdot\, \omega^{\hat{1}} \wedge \omega^{\hat{3}} + \frac{\dot{\beta}}{2} \frac{\cot\theta}{r}\, e^{-(\nu+\lambda)/2}\, \omega^{\hat{2}} \wedge \omega^{\hat{3}}$$

$$d\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{2}} = -d\omega^{\hat{2}}{}_{\hat{1}} = \left(-\frac{\ddot{\beta}}{2} + \frac{\beta'\dot{\lambda}}{4} - \frac{\dot{\beta}\beta'}{4} - \frac{\dot{\beta}}{2r} + \frac{\dot{\lambda}}{2r}\right) e^{-(\nu+\lambda)/2} \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{2}} +$$

$$+\left(-\frac{\beta''}{2} + \frac{\beta'\lambda'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} + \frac{\lambda'}{2r} - \frac{\beta'}{r}\right) e^{-\lambda}\, \omega^{\hat{1}} \wedge \omega^{\hat{2}}$$

$$d\omega^{\hat{1}}{}_{\hat{3}} = -d\omega^{\hat{3}}{}_{\hat{1}} = \left(-\frac{\dot{\beta}'}{2} + \frac{\beta'\dot{\lambda}}{4} - \frac{\dot{\beta}\beta'}{4} + \frac{\dot{\lambda}}{2r} - \frac{\dot{\beta}}{2r}\right) e^{-(\nu+\lambda)/2} \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{3}} +$$

$$+\left(-\frac{\beta''}{2} + \frac{\beta'\lambda'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} + \frac{\lambda'}{2r} - \frac{\beta'}{r}\right) e^{-\lambda} \omega^{\hat{1}} \wedge \omega^{\hat{3}} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\beta'}{2r}\right) e^{-(\lambda+\beta)/2} \cot\theta\, \omega^{\hat{2}} \wedge \omega^{\hat{3}}$$

$$d\omega^{\hat{2}}{}_{\hat{3}} = -d\omega^{\hat{3}}{}_{\hat{2}} = 8\pi\left(S' + \frac{\nu' S}{2}\right) e^{-\lambda/2} \omega^{\hat{0}} \wedge \omega^{\hat{1}} + \frac{e^{-\beta}}{r^2} \omega^{\hat{2}} \wedge \omega^{\hat{3}}$$

Tensor de curvatura:

$$R_{\hat{0}\hat{1}\hat{1}}{}^{\hat{0}} = -R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}}{}^{\hat{0}} = R_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}}{}^{\hat{1}} = -R_{\hat{1}\hat{0}\hat{0}}{}^{\hat{1}} = \left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4}\right) e^{-\lambda} + \\ + \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right) e^{-\nu}$$

$$R_{\hat{2}\hat{3}\hat{1}}{}^{\hat{0}} = -R_{\hat{3}\hat{2}\hat{1}}{}^{\hat{0}} = R_{\hat{2}\hat{3}\hat{0}}{}^{\hat{1}} = -R_{\hat{3}\hat{2}\hat{0}}{}^{\hat{1}} = 16\pi \left(\frac{1}{r} + \frac{\beta'}{2}\right) e^{-\lambda/2} S$$

$$R_{\hat{0}\hat{2}\hat{2}}{}^{\hat{0}} = -R_{\hat{2}\hat{0}\hat{2}}{}^{\hat{0}} = R_{\hat{0}\hat{2}\hat{0}}{}^{\hat{2}} = -R_{\hat{2}\hat{0}\hat{0}}{}^{\hat{2}} = \left(\frac{\ddot{\beta}}{2} - \frac{\dot{\beta}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\beta}^2}{4}\right) e^{-\nu} - \left(\frac{\nu'}{2r} + \frac{\beta'\nu'}{4}\right) e^{-\lambda} - 64\pi^2 S^2$$

$$R_{\hat{0}\hat{3}\hat{2}}{}^{\hat{0}} = -R_{\hat{3}\hat{0}\hat{2}}{}^{\hat{0}} = R_{\hat{0}\hat{3}\hat{0}}{}^{\hat{2}} = -R_{\hat{3}\hat{0}\hat{0}}{}^{\hat{2}} = -8\pi \left(\dot{S} + \dot{\beta} S\right) e^{-\nu/2}$$

$$R_{\hat{1}\hat{2}\hat{2}}{}^{\hat{0}} = -R_{\hat{2}\hat{1}\hat{2}}{}^{\hat{0}} = R_{\hat{1}\hat{2}\hat{0}}{}^{\hat{2}} = -R_{\hat{2}\hat{1}\hat{0}}{}^{\hat{2}} = \left(\frac{\dot{\beta}'}{2} - \frac{\dot{\beta}\nu'}{4} + \frac{\dot{\beta}\beta'}{4} + \frac{\dot{\beta}}{2r} - \frac{\dot{\lambda}}{2r} - \frac{\beta'\dot{\lambda}}{4}\right) e^{-\nu/2-\lambda/2}$$

$$R_{\hat{1}\hat{3}\hat{2}}{}^{\hat{0}} = -R_{\hat{3}\hat{1}\hat{2}}{}^{\hat{0}} = R_{\hat{1}\hat{3}\hat{2}}{}^{\hat{0}} = -R_{\hat{3}\hat{1}\hat{2}}{}^{\hat{0}} = -8\pi \left[S' + \left(\frac{1}{r} + \frac{\beta'}{2}\right) S\right] e^{-\lambda/2}$$

$$R_{\hat{0}\hat{2}\hat{3}}{}^{\hat{0}} = -R_{\hat{2}\hat{0}\hat{3}}{}^{\hat{0}} = R_{\hat{0}\hat{2}\hat{0}}{}^{\hat{3}} = -R_{\hat{2}\hat{0}\hat{0}}{}^{\hat{3}} = 8\pi \left(\dot{S} + \dot{\beta} S\right) e^{-\nu/2}$$

$$R_{\hat{0}\hat{3}\hat{3}}{}^{\hat{0}} = -R_{\hat{3}\hat{0}\hat{3}}{}^{\hat{0}} = R_{\hat{0}\hat{3}\hat{0}}{}^{\hat{3}} = -R_{\hat{3}\hat{0}\hat{0}}{}^{\hat{3}} = \left(\frac{\ddot{\beta}}{2} - \frac{\dot{\beta}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\beta}^2}{4}\right) e^{-\nu} - \left(\frac{\nu'}{2r} + \frac{\beta'\nu'}{4}\right) e^{-\lambda} - 64\pi^2 S^2$$

$$R_{\hat{1}\hat{2}\hat{3}}{}^{\hat{0}} = -R_{\hat{2}\hat{1}\hat{3}}{}^{\hat{0}} = R_{\hat{1}\hat{2}\hat{0}}{}^{\hat{3}} = -R_{\hat{2}\hat{1}\hat{0}}{}^{\hat{3}} = 8\pi \left[S' + \left(\frac{1}{r} + \frac{\beta'}{2}\right) S\right]$$

$$R_{\hat{1}\hat{3}\hat{3}}{}^{\hat{0}} = -R_{\hat{3}\hat{1}\hat{3}}{}^{\hat{0}} = R_{\hat{1}\hat{3}\hat{0}}{}^{\hat{3}} = -R_{\hat{3}\hat{1}\hat{0}}{}^{\hat{3}} = \left(\frac{\dot{\beta}'}{2} - \frac{\dot{\beta}\nu'}{4} + \frac{\dot{\beta}\beta'}{4} + \frac{\dot{\beta}}{2r} - \frac{\dot{\lambda}}{2r} - \frac{\beta'\dot{\lambda}}{2}\right) e^{-\nu/2-\lambda/2}$$

$$R_{\hat0\hat2\hat2}{}^{\hat1} = -R_{\hat2\hat0\hat2}{}^{\hat1} = -R_{\hat0\hat2\hat1}{}^{\hat2} = R_{\hat2\hat0\hat1}{}^{\hat2} = \left(-\frac{\dot\beta'}{2} + \frac{\beta'\dot\lambda}{4} - \frac{\beta'\dot\beta}{4} + \frac{\dot\beta\nu'}{4} - \frac{\dot\beta}{2r} + \frac{\dot\lambda}{2r}\right) e^{-\nu/2-\lambda/2}$$

$$R_{\hat0\hat3\hat2}{}^{\hat1} = -R_{\hat3\hat0\hat2}{}^{\hat1} = -R_{\hat0\hat3\hat1}{}^{\hat2} = R_{\hat3\hat0\hat1}{}^{\hat2} = -8\pi\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{\beta'}{2}-\frac{1}{r}\right) S\, e^{-\lambda/2}$$

$$R_{\hat1\hat2\hat2}{}^{\hat1} = -R_{\hat2\hat1\hat2}{}^{\hat1} = -R_{\hat1\hat2\hat1}{}^{\hat2} = R_{\hat2\hat1\hat1}{}^{\hat2} = \left(-\frac{\beta''}{2}+\frac{\beta'\lambda'}{4}-\frac{\beta'^2}{4}+\frac{\lambda'}{2r}-\frac{\beta'}{r}\right)e^{-\lambda}+\frac{\dot\beta\dot\lambda}{4}e^{-\nu}$$

$$R_{\hat1\hat3\hat2}{}^{\hat1} = -R_{\hat3\hat1\hat2}{}^{\hat1} = -R_{\hat1\hat3\hat1}{}^{\hat2} = R_{\hat3\hat1\hat1}{}^{\hat2} = -8\pi\frac{\dot\lambda}{2} S\, e^{-\nu/2}$$

$$R_{\hat0\hat2\hat3}{}^{\hat1} = -R_{\hat2\hat0\hat3}{}^{\hat1} = -R_{\hat0\hat2\hat1}{}^{\hat3} = R_{\hat2\hat0\hat1}{}^{\hat3} = 8\pi\left(\frac{\nu'}{2}-\frac{\beta'}{2}-\frac{1}{r}\right)e^{-\lambda/2} S$$

$$R_{\hat0\hat3\hat3}{}^{\hat1} = -R_{\hat3\hat0\hat3}{}^{\hat1} = -R_{\hat0\hat3\hat1}{}^{\hat3} = R_{\hat3\hat0\hat1}{}^{\hat3} = \left(-\frac{\dot\beta'}{2}+\frac{\beta'\dot\lambda}{4}+\frac{\dot\beta\nu'}{4}-\frac{\dot\beta\beta'}{4}-\frac{\dot\beta}{2r}+\frac{\dot\lambda}{2r}\right)e^{-\nu/2-\lambda/2}$$

$$R_{\hat1\hat2\hat3}{}^{\hat1} = -R_{\hat2\hat1\hat3}{}^{\hat1} = -R_{\hat1\hat2\hat1}{}^{\hat3} = R_{\hat2\hat1\hat1}{}^{\hat3} = 8\pi\frac{\dot\lambda}{2}e^{-\nu/2} S$$

$$R_{\hat1\hat3\hat3}{}^{\hat1} = -R_{\hat3\hat1\hat3}{}^{\hat1} = -R_{\hat1\hat3\hat1}{}^{\hat3} = R_{\hat3\hat1\hat1}{}^{\hat3} = \left(-\frac{\beta''}{2}+\frac{\beta'\lambda'}{4}-\frac{\beta'^2}{4}+\frac{\lambda'}{2r}-\frac{\beta'}{r}\right)e^{-\lambda}+\frac{\dot\beta\dot\lambda}{4}e^{-\nu}$$

$$R_{\hat0\hat1\hat3}{}^{\hat2} = -R_{\hat1\hat0\hat3}{}^{\hat2} = -R_{\hat0\hat1\hat2}{}^{\hat3} = R_{\hat1\hat0\hat2}{}^{\hat3} = 8\pi\left(S'+\frac{\nu'}{2}S\right)e^{-\lambda/2}$$

$$R_{\hat2\hat3\hat3}{}^{\hat2} = -R_{\hat3\hat2\hat3}{}^{\hat2} = -R_{\hat2\hat3\hat2}{}^{\hat3} = R_{\hat3\hat2\hat2}{}^{\hat3} = \frac{e^{-\beta}}{r^2}+\frac{\dot\beta^2}{4}e^{-\nu}-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\beta'^2}{4}+\frac{\beta'}{r}\right)e^{-\lambda}+$$

$$+\,64\pi^2 S^2 .$$

Tensor de Ricci:

$$R_{\hat{0}\hat{0}}=\left(\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'}{r}+\frac{\beta'\nu'}{2}\right)e^{-\lambda}-\left(\frac{\ddot{\lambda}}{2}-\frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4}+\frac{\dot{\lambda}^2}{4}+\ddot{\beta}-\frac{\dot{\beta}\dot{\nu}}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\dot{\beta}^2}{2}\right)e^{-\nu}+128\pi^2S^2$$

$$R_{\hat{1}\hat{1}}=\left(-\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{\nu'^2}{4}-\beta''+\frac{\beta'\lambda'}{2}-\frac{\beta'^2}{2}+\frac{\lambda'}{r}-\frac{2\beta'}{r}\right)e^{-\lambda}+\left(\frac{\ddot{\lambda}}{2}-\frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{\dot{\lambda}^2}{4}+\frac{\dot{\beta}\dot{\lambda}}{2}\right)e^{-\nu}$$

$$R_{\hat{2}\hat{2}}=R_{\hat{3}\hat{3}}=\left(-\frac{\beta''}{2}+\frac{\beta'\lambda'}{4}-\frac{\beta'^2}{2}+\frac{\lambda'}{2r}-\frac{\beta'\nu'}{4}-\frac{\nu'}{2r}-\frac{2\beta'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)e^{-\lambda}+$$

$$+\left(\frac{\ddot{\beta}}{2}+\frac{\dot{\beta}^2}{2}-\frac{\dot{\beta}\dot{\nu}}{4}+\frac{\dot{\beta}\dot{\lambda}}{4}\right)e^{-\nu}+\frac{e^{-\beta}}{r^2}$$

$$R_{\hat{1}\hat{0}}=R_{\hat{0}\hat{1}}=-\left(\dot{\beta}'-\frac{\dot{\beta}\nu'}{2}+\frac{\dot{\beta}\beta'}{2}-\frac{\beta'\dot{\lambda}}{2}+\frac{\dot{\beta}}{r}-\frac{\dot{\lambda}}{r}\right)\cdot$$

$$\cdot\, e^{-(\nu+\lambda)/2}$$

$$R_{\hat{2}\hat{3}}=-R_{\hat{3}\hat{2}}=8\pi\left[\dot{S}+\left(\dot{\beta}+\frac{\dot{\lambda}}{2}\right)S\right]e^{-\nu/2}$$

Escalar de curvatura:

$$R=R_{\hat{0}\hat{0}}-R_{\hat{1}\hat{1}}-R_{\hat{2}\hat{2}}-R_{\hat{3}\hat{3}}=\left(\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{2}+\frac{\nu'^2}{2}+\beta'\nu'+\frac{2\nu'}{r}+\right.$$

$$\left.+2\beta''-\beta'\lambda'+\frac{3\beta'^2}{2}+\frac{6\beta'}{r}-\frac{2\lambda'}{r}+\frac{2}{r^2}\right)e^{-\lambda}-\left(\ddot{\lambda}-\frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2}+\frac{\dot{\lambda}^2}{2}+2\ddot{\beta}+\right.$$

$$\left.-\dot{\beta}\dot{\nu}+\frac{3\dot{\beta}^2}{2}+\dot{\beta}\dot{\lambda}\right)e^{-\nu}-2\frac{e^{-\beta}}{r^2}+128\pi^2S^2.$$

Tensor de Einstein:

$$G_{\hat{0}\hat{0}} = R_{\hat{0}\hat{0}} - \frac{1}{2}R$$

$$= -\left(\beta'' - \frac{\beta'\lambda'}{2} + \frac{3}{4}\beta'^2 + 3\frac{\beta'}{r} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-\lambda} + \left(\frac{\dot{\beta}^2}{4} + \frac{\dot{\beta}\dot{\lambda}}{2}\right)e^{-\nu} + \frac{e^{-\beta}}{r^2} + 64\pi^2 S^2$$

$$G_{\hat{1}\hat{1}} = R_{\hat{1}\hat{1}} + \frac{1}{2}R$$

$$= \left(\frac{\beta'^2}{4} + \frac{\beta'}{r} + \frac{\beta'\nu'}{2} + \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-\lambda} - \left(\ddot{\beta} - \frac{\dot{\beta}\dot{\nu}}{2} + \frac{3}{4}\dot{\beta}^2\right)e^{-\nu} + \frac{e^{-\beta}}{r^2} + 64\pi^2 S^2$$

$$G_{\hat{2}\hat{2}} = R_{\hat{2}\hat{2}} + \frac{1}{2}R$$

$$= \left(\frac{\beta''}{2} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'\lambda'}{4} + \frac{\beta'\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{\nu'}{2r} + \frac{\beta'}{r} + \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right)e^{-\lambda} +$$

$$+ \left(-\frac{\ddot{\beta}}{2} - \frac{\dot{\beta}^2}{4} + \frac{\dot{\beta}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\beta}\dot{\lambda}}{4} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right)e^{-\nu} + 64\pi^2 S^2$$

$$G_{\hat{3}\hat{3}} = G_{\hat{2}\hat{2}}$$

$$G_{\hat{0}\hat{1}} = R_{\hat{0}\hat{1}} = -\left(\dot{\beta}' - \frac{\dot{\beta}\nu'}{2} + \frac{\dot{\beta}\beta'}{2} - \frac{\beta'\dot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\beta}}{r} - \frac{\dot{\lambda}}{r}\right)e^{-\nu/2-\lambda/2}$$

$$G_{\hat{1}\hat{0}} = G_{\hat{0}\hat{1}}$$

$$G_{\hat{2}\hat{3}} = R_{\hat{2}\hat{3}} = 8\pi\left[\dot{S} + \left(\dot{\beta} + \frac{\dot{\lambda}}{2}\right)S\right]e^{-\nu/2}$$

$$G_{\hat{3}\hat{2}} = -G_{\hat{2}\hat{3}}$$

Bibliografia e referências.

ADAMOWICZ, W. (1975), "Equivalence between the Einstein-Cartan and general relativity theories in the linear approximation for a classical model of spin", Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. sci. math. astr. phys. 23, 1203.

ADAMS, R.C. e J.M. COHEN (1975), "Analytic stellar models in general relativity", Ap. J. 198, 507.

ADAMS, R.C. e J.M. COHEN (1977), "Analytic supernova models and black holes", Int. J. Theor. Phys. 16, 35.

ADAMS, R.C., J.M. COHEN, R.J. ADLER e C. SHEFFIELD (1973), "Analytic neutron-star models", Phys. Rev. D 8, 1651.

ADAMS, R.C., J.M. COHEN, R.J. ADLER e C. SHEFFIELD (1974), "Analytic pulsar models", Ap. J. 192, 525.

ADLER, R.J. (1974), "A fluid sphere in general relativity", J. Math. Phys. 15, 727.

ADLER, R., M. BAZIN e M. SCHIFFER (1975), Introduction to General Relativity, 2a. edição, McGraw-Hill, Nova Iorque.

ARKUSZEWSKI, W., W. KOPCZYŃSKI e V.N. PONOMARIEV (1974), "On the linearized Einstein-Cartan theory", Ann. Inst. Henri Poincaré A21, 89.

ARKUSZEWSKI, W., W. KOPCZYŃSKI e V.N. PONOMARIEV (1975), "Matching conditions in the Einstein-Cartan theory of gravitation", Commun. Math. Phys. 45, 183.

BANERJI, S. (1978), "Bounce of spheres in Einstein-Cartan theory", GRG 9, 783.

BAYIN, S.S. (1978), "Solutions of Einstein's field equations for static fluid spheres", Phys. Rev. D 18, 2745.

BELINFANTE, F.J. (1939), "On the spin angular momentum of mesons", Physica 6, 887.

BOWERS, R.L. e E.P.T. LIANG (1974), "Anisotropic spheres in general relativity", Ap. J. 188, 657.

CAMENZIND, M. (1978), "Weak and strong source of gravity: An SO(1,3)-gauge theory of gravity", Phys. Rev. D 18, 1068.

CANUTO, V. (1974), "Equation of state at ultrahigh densities", Ann. Rev. Astr. Astrophys. 12, 167.

CARTAN, É. (1922), "Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion", C. R. Acad. Sci. (Paris) 174, 593.

CARTAN, É. (1923), "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée I.", Ann. Éc. Norm. Sup. 40,325.

CARTAN, É. (1924), "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée I (suite)", Ann. Éc. Norm. Sup. 41, 1.

CARTAN, É. (1925), "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée II", Ann. Éc. Norm. Sup. 42, 17.

CHANDRASEKHAR, S. (1939), An Introduction to the study of Stellar Structure, University of Chicago Press, Chicago.

CHO, Y.M. (1976a), "Gauge theory of Poincaré symmetry", Phys. Rev. D 14, 3335.

CHO, Y.M. (1976b), "Gauge theory, gravitation and symmetry", Phys. Rev. D 14, 3341.

CORINALDESI, E. e A. PAPAPETROU (1951), "Spinning test-particles in general relativity. II.", Proc. Roy. Soc. (Londres) A 209, 259.

DATE, T.H. e L. RADHAKRISHNA (1977), "Relativistic spheres filled with isentropic magnetofluids", Acta Phys. Pol. B 8, 713.

DATTA, B.K. (1971a), "Spinor fields in general relativity. I: Noether's theorem and the conservation laws in Riemann-Cartan space", Nuovo Cimento 6B, 1.

DATTA, B.K. (1971b), "Spinor fields in general relativity. II: Generalized field equations and application to the Dirac field", Nuovo Cimento, 6B, 16.

DESER, S. e B. ZUMINO (1976), "Consistent supergravity", Phys. Lett. 62B, 335.

EINSTEIN, A. (1956), The Meaning of Relativity, 6a. edição, rev., Chapmann and Hall, Londres.

EINSTEIN, A., L. INFELD e B. HOFFMANN (1938), "The gravitational equations and the problem of motion", Ann. Math. 39, 65.

EHLERS, J. (1961), "Contributions to the relativistic mechanics of continuous media", Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abh. Math.-Nat. Kl. 11, 793.

ELLIS, G.F.R. (1971), "Relativistic cosmology", in Proceedings of the International School of Physics "Enrico

Fermi", Course 47 (1969), "General Relativity and Cosmology", B.K. Sachs, ed., Academic Press, Nova Iorque, pág. 104.

FAULKES, M.C. (1969a), "Non-static fluid spheres in general relativity", Progr. Theor. Phys. 42, 1139.

FAULKES, M.C. (1969b), "Charged spheres in general relativity", Can. J. Phys. 47, 1989.

FLANDERS, H. (1963), Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, Academic Press, Nova Iorque.

GALVÃO, C.A.P. (1975), Relatividade Geral com Spin e Torção: Teoria de Einstein-Cartan, notas mimeografadas, CBPF.

GALVÃO, C.A.P. (1976), Gravitação e Cosmologia em Espaços com Torção, Tese de Doutorado, CBPF.

GALVÃO, C.A.P. (1977), Teoria Clássica de Campos, notas mimeografadas, CBPF.

GLASS, E.N. e S.P. GOLDMAN (1978), "Relativistic spherical stars reformulated", J. Math. Phys. 19, 856.

GOLDBERG, J.N. (1962), "The equations of motion", in Gravitation: An Introduction to current research, L. Witten, ed., Wiley, pág. 102.

GOLDMAN, S.P. (1978), "Physical solutions to general-relativistic fluid spheres", Ap. J. 226, 1079.

HALBWACHS, F. (1960), Théorie Relativiste des Fluides à Spin, Gauthier-Villars, Paris.

HAWKING, S.W. e G.F.R. ELLIS (1973), The Large-Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press, Cambridge.

HAYASHI, K. e R. SASAKI (1978), "Spinor electrodynamics in the Riemann-Cartan space and dynamical theory of axial vector torsion propagation in vacuum", Nuovo Cimento, 45B, 205.

HEHL, F.W. (1971), "How does one measure torsion of space-time?", Phys. Lett. 36A, 225.

HEHL, F.W. (1973), "Spin and torsion in general relativity: I. Foundations", GRG 4, 333.

HEHL, F.W. (1974), "Spin and torsion in general relativity: II. Geometry and field equations", GRG 5, 491.

HEHL, F.W. e B.K. DATTA (1971), "Nonlinear spinor equation and asymmetric connection in general relativity", J. Math. Phys. 12, 1334.

HEHL, F.W. e P. von der HEYDE (1973), "Spin and the structure of space-time", Ann. Inst. Henri Poincaré A19,179.

HEHL, F.W., P. von der HEYDE e G.D. KERLICK (1974), "General relativity with spin and torsion and its deviations from Einstein's theory", Phys. Rev. D 10, 1066.

HEHL, F.W., P. von der HEYDE, G.D. KERLICK e J. M. NESTER (1976), "General relativity with spin and torsion:Foundations and prospects", Rev. Mod. Phys. 48, 393.

HICKS, N.J. (1965), Notes on Differential Geometry, Van Nostrand, Nova Jérsei.

HOJMAN, S. (1978), "Lagrangian theory of the motion of spinning particles in torsion gravitational theories", Phys. Rev. D 18, 2741.

HOJMAN, S., M. ROSENBAUM, M.P. RYAN (1979), "Propagating torsion and gravitation", Phys. Rev. 19, 430.

HOJMAN, S., M. ROSENBAUM, M.P. RYAN e L. C. SHEPLEY (1978), "Gauge invariance, minimal coupling, and torsion",Phys. Rev. D 17, 3141.

INFELD, L. e J. PLEBAŃSKI (1960), Motion and Relativity, Pergamon Press, Oxford e PWN, Varsóvia.

INOMATA, A. (1978), "Effect of the self-induced torsion of the Dirac sources on gravitational singularities",Phys. Rev. D 18, 3552.

KAEMPFFER, F.A. (1978), "Self-consistent torsion potentials", Phys. Rev. D 18, 2727.

KASUYA, M. (1978), "The Einstein-Cartan theory of gravitation in a Hamiltonian form", Progr. Theor. Phys. 60,167.

KERLICK, G.D. (1973), "The effect of intrinsic spin on neutron stars in the Einstein-Cartan theory of gravity", Ap. J. 185, 631.

KERLICK, G.D. (1975), "Cosmology and particle pair production via gravitational spin-spin interaction in the Einstein-Cartan-Sciama-Kibble theory of gravity", Phys. Rev. D 12, 3004.

KERLICK, G.D. (1976), "'Bouncing' of simple cosmological models with torsion", Ann. Phys. 99,127.

KIBBLE, T.W.B. (1961), "Lorentz invariance and the gravitational field", J. Math. Phys. 2, 212.

KOPCZYŃSKI, W. (1972), "A non-singular universe with torsion", Phys. Lett. 39A, 219.

KUCHOWICZ, B. (1975a), "Methods of deriving exact solutions of spherical symmetry in the Einstein-Cartan theory for a perfect fluid with a 'classical description' of spin", Acta Phys. Polon. B 6, 173.

KUCHOWICZ, B. (1975b), "The Einstein-Cartan equations in astrophysically interesting situations. I. The case of spherical symmetry", Acta Phys. Polon. B 6, 555.

KUCHOWICZ, B. (1975c), "Flat anisotropic models of the universe with torsion and without singularity", J. Phys. A 8, L29.

KUCHOWICZ, B. (1978), "Friedman-like cosmological models without singularity", GRG 9, 511.

LANDAU, L.D. e E.M. LIFSHITZ (1975), The Classical Theory of Fields, 4a. edição em inglês, Pergamon Press, Oxford.

LICHNEROWICZ, A. (1955), Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme, Masson et Cie.,Paris.

LOVELOCK, D. e H. RUND (1975), Tensors, Differential Forms, and Variational Principles, Wiley, Nova Iorque.

MISNER, C.W. (1969), "Gravitational collapse", in Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics (1968), "Astrophysics and General Relativity", Vol. 1, M. Chrétien, S. Deser, J. Goldstein, eds., Gordon and Breach, Nova Iorque, pág. 113.

MISNER, C.W., K.S. THORNE e J.A. WHEELER (1973), Gravitation, Freeman, São Francisco.

NDUKA, A. (1977a), "Charged static fluid spheres in Einstein-Cartan theory", GRG 8, 371.

NDUKA, A. (1977b), "Some exact solutions of charged general relativistic fluid spheres", Acta Phys. Polon. B 8, 75.

NDUKA, A. (1978), "Static solutions of Einstein's field equa tions for charged spheres of fluid", Acta Phys. Polon. 9, 569.

NESTER, J.M. (1977), "Effective equivalence of the Einstein-Cartan and Einstein theories of gravity", Phys. Rev. D 16, 2395.

NESTER, J.M. e J. ISENBERG (1977), "Torsion singularities", Phys. Rev. D 15, 2078.

NOVELLO, M. (1978a), "Tópicos de gravitação", Escola de Cos mologia e Gravitação, CBPF, Rio de Janeiro.

NOVELLO, M. (1978b), "Cosmologia relativista", Escola de Cos mologia e Gravitação, CBPF, Rio de Janeiro.

O'CONNELL, R.F. (1974), "Spin, rotation and C, P, and T effects in the gravitational interaction and related experiments", in Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course 56 (1972), "Experimen tal Gravitation", B. Bertotti, ed., Academic Press, No va Iorque, pág. 496.

O'CONNELL, R.F. (1976), "Contact interactions in the Einstein and Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK) theories of gravitation", Phys. Rev. Lett. 37, 1653; errata:38, 298 (1977).

O'CONNELL, R.F. (1977), "Attractive spin-spin contact inter actions in the Einstein-Cartan-Sciama-Kibble torsion theory of gravitation", Phys. Rev. D 16, 1247.

OPPENHEIMER, J.R. e G.M. VOLKOFF (1939), "On massive neutron cores", Phys. Rev. 55, 374.

PAPAPETROU, A. (1951), "Spinning test-particles in general relativity. I", Proc. Roy. Soc. (Londres) A 209, 248.

PRASANNA, A.R. (1975a), "Static fluid spheres in Einstein-Cartan theory", Phys. Rev. D 11, 2076.

PRASANNA, A.R. (1975b), "Static cylinder of perfect fluid with nonzero spin density", Phys. Rev. D 11, 2083.

PRASANNA, A.R. (1975c), "Maxwell's equations in Riemann-Cartan space U_4", Phys. Lett. 54A, 17.

PRASANNA, A.R. (1975d), "Cylindrically symmetric matter distribution with a magnetic field in Einstein-Cartan theory, Pramāna 5, 289.

PRASANNA, A. R. (1977), "Solutions of Einstein-Cartan equations",in Proceedings of the First Marcel Grossman Meetting on General Relativity (1975), R. Ruffini, ed., North Holland, Amsterdam.

RAYCHAUDHURI, A.K. (1955), "Relativistic cosmology. I", Phys. Rev. 98, 1123.

RAYCHAUDHURI, A.K. (1975), "Einstein-Cartan cosmologies with a magnetic field", Phys. Rev. D 12, 952.

RAYCHAUDHURI, A.K. e S. BANERJI (1977), "Einstein-Cartan spheres", Phys. Rev. D 16, 281.

ROSENFELD, L. (1940), "Sur le tenseur d'impulsion-ēnergie", Mēm. Acad. Roy. Belgique, Cl. sc., tome 18, fasc. 6.

RYAN, M.P. e L.C. SHEPLEY (1975), Homogeneous Relativistic Cosmologies, Princeton University Press, Princeton, Nova Jērsei.

SCHOUTEN, J.A. (1954), Ricci Calculus, 2a. edição, Springer-Verlag, Berlim.

SCIAMA, D.W. (1962), "On the analogy between charge and spin in general relativity", in Recent Developments in General Relativity, Pergamon Press, Oxford e PWN, Varsóvia.

SINGH, T. e R.B.S. YADAV (1978), "Some exact solutions of charged fluid spheres in general relativity", Acta Phys. Polon. B 9, 475.

SKINNER, R. e I. WEBB (1977), "Junction conditions for the Einstein-Cartan theory", Acta Phys. Polon. B 8, 81.

SOPER, D.E. (1976), Classical Field Theory, Wiley, Nova Iorque.

SOARES, I.D. (1978), "O cálculo de formas diferenciais e a equação de Dirac em espaços curvos", Escola de Cosmologia e Gravitação, CBPF, Rio de Janeiro.

SPIVAK, M. (1970), Differential Geometry, Vol. II, Publish or Perish, Boston.

STEWART, J. e P. HÁJÍČEK (1973), "Can spin avert singularities?", Nature (Phys. Sci.) 244, 96.

SUH, Y.B. (1978), "Remarks on the static spherically symmetric solutions in Einstein-Cartan theory", Progr. Theor. Phys. 59, 1852.

SZCZYRBA, W. (1978), "The canonical variables, the symplectic structure and the initial value formulation of the generalized Einstein-Cartan theory of gravity", Comm. Math. Phys. 60, 215.

TAFEL, J, (1973), "A non-singular homogeneous universe with torsion", Phys. Lett. 45A, 341.

TAUB, A.H. (1968), "Restricted motions of gravitating spheres", Ann. Inst. Henri Poincaré A 9, 153.

TOLMAN, R.C. (1934), Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Clarendon Press, Oxford.

TOLMAN, R.C. (1939), "Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid", Phys. Rev. 55, 364.

TONNELAT, M.A. (1965), Les Théories Unitaires de l'Électromagnétisme et de la Gravitation, Gauthier-Villars, Paris.

TRAUTMAN, A. (1972a), "On the Einstein-Cartan equations. I", Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. sci. math. astr. phys. 20, 185.

TRAUTMAN, A. (1972b), "On the Einstein-Cartan equations. II", Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. sci. math. astr. phys. 20, 503.

TRAUTMAN, A. (1972c), "On the Einstein-Cartan equations.III", Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. sci. math. astr. phys. 20, 895.

TRAUTMAN, A. (1973a), "On the Einstein-Cartan equations. IV", Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. sci. math. astr. phys. 21, 345.

TRAUTMAN, A. (1973b), "Spin and torsion may avert gravitational singularities", Nature (Phys. Sci.) 242, 7.

VAIDYA, P.C. (1943), "The external field of a radiating star in general relativity", Curr. Sci. (India) 12, 183.

VAIDYA, P.C. (1951), "Nonstatic solutions of Einstein's field equations for spheres of fluids radiating energy", Phys. Rev. 83, 10.

VAIDYA, P.C. (1955), "The general relativity field of a radiating star", Bull. Calcutta Math. Soc. **47**, 77.

von der HEYDE (1975), "The equivalence principle in the U_4 theory of gravitation", Lett. Nuovo Cimento **14**, 250.

von der HEYDE e F.W. HEHL (1977), "On gravitation in microphysics: Is Einstein's form of general relativity still valid for classical fields with spin?", in Proceedings of the First Marcel Grossman Meeting on General Relativity (1975), R. Ruffini, ed., North Holland, Amsterdam, pág. 255.

WEYSSENHOFF, J. e A. RAABE (1947), "Relativistic dynamics of spin-fluids and spin-particles", Acta Phys. Polon. **9**,7.

“MODELOS ESTELARES NA TEORIA GRAVITACIONAL DE EINSTEIN-CARTYAN”

CESAR LINHARES DA FONSECA JUNIOR

Tese de mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Carlos A. P. Galvão/Presidente-CBPF

Fernando de Felice-Univ. de Padova Itália

Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira-CBPF

Rio de Janeiro 25 de junho de 1979