

MARCELO JOSÉ REBOUÇAS

COSMOLOGIA FORA DO EQUILÍBRIO: UNIVERSO COM ROTAÇÃO

Tese de Mestrado

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

1977

A meus pais

AGRADECIMENTOS

- A Mário Novello, que nos orientou nesta tese e soube apontar inúmeras perspectivas de pesquisa. É, acima de tudo, um exemplo de trabalho, e qualquer palavra de agradecimento nos parece insuficiente.

- Aos meus pais Gaspar H. Rebouças e Nisete M. Rebouças, que apesar da humildade em que vivíamos, fizeram tudo para que pudesse estudar. A eles meu comovido e eterno agradecimento.

- A José M. Salim pelo apoio nas horas de desânimo e por algumas discussões e sugestões importantes.

- A Ivano D. Soares pela leitura de parte desta tese e algumas sugestões valiosas.

- A Carlos A. P. Galvão pela ajuda nos meus primeiros meses de C.B.P.F.

- À Wanda Arguelles Angelo pelo belo trabalho de datilografia.

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pela concessão da bolsa de estudo.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
LISTA DE FIGURAS	v
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - O FORMALISMO MATEMÁTICO	4
1.1 - Introdução	4
1.2 - Variedade Diferenciável	4
1.3 - Objetos Geométricos Sobre Uma Variedade	6
1.4 - Produto Exterior	11
1.5 - Derivada Exterior	14
1.6 - Derivada de Lie	15
1.6 - Cálculo com Formas: Introdução	22
1.8 - Primeira Equação de Estrutura de Cartan	25
1.9 - Segunda Equação de Estrutura de Cartan	31
1.10 - Identidade Para a Curvatura	34
CAPÍTULO 2 - QUANTIDADES CINEMÁTICAS	43
2.1 - Tensor de Projeção	43
2.2 - Geodésica e Parâmetro Afim	46
2.3 - Coordenadas Comoventes	47
2.4 - Quantidades Cinemáticas	49
CAPÍTULO 3 - UNIVERSO DE GÖDEL	54
3.1 - Introdução	54
3.2 - A Métrica de Gödel	54
3.3 - Cálculo das Tetradas	57
3.4 - O Tensor Momentum-Energia	58
3.5 - As Equações de Einstein	59
3.6 - A Expansão	60
3.7 - O Cisalhamento (Shear)	61
3.8 - A Rotação	63
3.9 - Isometrias	66

	<u>Pág.</u>
CAPÍTULO 4 - UNIVERSO FORA DO EQUILÍBRIO TÉRMICO	72
4.1 - O Tensor Momentum-Energia	72
4.2 - A Geometria	74
4.3 - As Curvaturas	78
4.4 - Componentes do Tensor Momentum Energia na Ba se de Tetradas	81
4.5 - As Equações de Einstein	82
4.6 - O Universo de Gödel como Limite	85
REFERÊNCIAS	88

RESUMO

Propomos uma nova forma para o tensor momentum energia associado ao fluido galático. Exibimos uma solução cosmológica exata das equações de Einstein, que apresenta expansão, "shear" e rotação, e cuja fonte é o tensor momentum energia proposto (fluido fora do equilíbrio térmico). Nosso universo tende assintoticamente ao cosmo de Gödel, podendo ser interpretado como um estágio anterior da geometria Gödeliana. Discutimos, finalmente, alguns aspectos ligados a estabilidade de universos com rotação.

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>		<u>Pág.</u>
1	5

Sob o familiar, descubram o insólito.
Sob o cotidiano, desvelem o inexplicável.
Que tudo que seja dito ser habitual,
Cause inquietação.

A Exeção e a Regra, Bertolt Brecht.

INTRODUÇÃO

No imenso conjunto de fenômenos que os físicos investigam, ocorre um pequeno número de interações fundamentais diferentes. Estudamos e observamos os efeitos das interações nucleares "fracas" e "fortes" das interações eletromagnéticas e das interações gravitacionais. De todas, a interação gravitacional, embora seja de longo alcance, é a mais débil. Apesar disto, devido ao fato das interações nucleares serem de curto alcance e grandes agregados de matéria serem eletricamente neutros, parece que os fenômenos "em larga escala" do Universo são mais fortemente afetados pela interação gravitacional. Se a gravidade é de fato a influência dominante, então, como uma teoria da gravidade, a Relatividade Geral deve ser capaz de fornecer a descrição em larga escala do Universo. O Problema Cosmológico, dentro da estrutura da Relatividade Geral, consiste em encontrar um modelo do Universo como um todo, o qual seja solução das equações de Einstein. Tal modelo tem por intenção somente o estudo em grande escala do universo. Assim, por exemplo, os processos de produção de energia que ocorrem no interior das estrelas são de origem nuclear, e efetivamente, não podem ser descritos pela Relatividade Geral. Um modelo cosmológico razoável necessita por conseguinte, ajustar fatos observacionais de natureza global. Aparentemente, são as soluções cosmológicas de Friedmann que se ajustam melhor aos dados observacionais acerca do universo em seu estágio atual. No entanto, todas as soluções tipo Friedmann possuem pelo menos uma singularidade, isto é, um momento da história do universo em que a curvatura do espaço-tempo e a densidade de matéria se tornam infinitos.

A hipótese de uma origem singular do universo é sustentada pela existência de uma radiação de "background" isotrópica, interpretada como remanescente de um estágio primordial da história do universo.

No estudo do universo em sua fase inicial (próxima à singularidade), tem-se feito algumas tentativas (13) e (15) de modo a incorporar efeitos de viscosidade, assumindo-se expressões ad hoc para os processos dissipativos. Têm sido usadas (14) relações fenomenológicas, emprestadas da mecânica dos fluidos, em alguns modelos cosmológicos. Neste trabalho, em vez de assumirmos relações ad hoc, tentamos um novo caminho que é tomar para tensor momentum energia o de um fluido fora do equilíbrio havendo, desta forma, fluxo de calor entre suas partes.

Em 1949, K. Gödel (10) apresentou um modelo cosmológico em que a congruência de geodésicas apesar de possuir rotação, não apresenta expansão, aceleração e shear. Inúmeras tentativas têm sido feitas, após a publicação deste trabalho, na busca de soluções cosmológicas das equações Einsteinianas mais gerais, isto é, que apresente todos os parâmetros cinemáticos (shear, expansão, etc...). No presente trabalho de Tese, exibimos uma solução cosmológica exata das equações de Einstein que tem aceleração, expansão, rotação e shear (na qual o conteúdo material do universo é um fluido fora do equilíbrio), e que tem como futuro o universo de Gödel. Desta forma, nosso modelo pode ser pensado como um estágio anterior ao cosmo de Gödel.

Segundo J. Silk (12) o modelo de K. Gödel é estável para perturbações no plano ortogonal a rotação ω^α é instável para perturbações na direção de ω^α . Mostramos que tal resultado não resiste a uma modificação no tipo de perturbações propostas por ele.

Os dois primeiros capítulos desta tese tratam essencialmente do

formalismo utilizado no restante de seu corpo. Agimos desta forma com a intenção de torná-la acessível a uma pessoa não especialista no assunto. No terceiro capítulo calculamos a métrica de Gödel e mostramos ser ela solução das equações de Einstein. Tínhamos em mente ao elaborar tal capítulo duas coisas: primeiro, ilustrar com detalhes de passagens mínimas o formalismo apresentado nos capítulos anteriores, e, segundo, apresentar alguns resultados para posterior comparações com o novo modelo cosmológico proposto no último capítulo. No capítulo 4, como discutimos acima, propomos uma nova forma para o tensor momentum-energia (fluido fora do equilíbrio térmico), exibimos uma solução exata das equações de Einstein e discutimos alguns aspectos importantes ligados a estabilidade do cosmo de Gödel.

CAPÍTULO 1

O FORMALISMO MATEMÁTICO

1.1 - Introdução

Nosso objetivo principal nesta parte da tese é fornecer os principais resultados da teoria das formas diferenciais sobre uma variedade Riemanniana quadridimensional. Agindo assim, estaremos fornecendo uma ferramenta matemática poderosa que será usada extensivamente durante todo este trabalho. Desejamos deixar aqui registrado que esta parte do trabalho foi escrita baseada nas notas de aula do curso de Cosmologia Relativista ministrado pelo Dr. Ivano D. Soares durante o primeiro semestre de 1977, no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Um tratamento completo do assunto aqui estudado poderá ser encontrado em Cohn e Cartan, referências (1) e (2).

1.2 - Variedade Diferenciável

Seja um conjunto de pontos M , tal que qualquer ponto $P \in M$ está contido em um subconjunto $U_\alpha \subset M$. Façamos a hipótese que existe uma aplicação biunívoca ϕ_α de U_α sobre um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n . Desta forma, fica definido um sistema de coordenadas sobre cada U_α no sentido de que podemos associar univocamente a cada ponto $P \in U_\alpha$, n números reais $\phi_\alpha(P) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$; a cada par (ϕ_α, U_α) chamaremos de "Carta" ou "Mapa" e ao conjunto U_α denominaremos de

"vizinhança de coordenada".

Pode ocorrer que $U_\alpha \cap U_\beta$ seja não vazio. Faremos a hipótese de que sempre que isto ocorrer existe uma aplicação contínua

$$\phi = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (1.2.1)$$

de um aberto do \mathbb{R}^m em um outro subconjunto aberto do \mathbb{R}^m (veja fig. (1); se M for tal que $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ a coleção $\{\phi_\alpha, U_\alpha\}$ chamaremos de "atlas". Se $\phi = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ for de classe C^k diremos que o atlas é C^k (*).

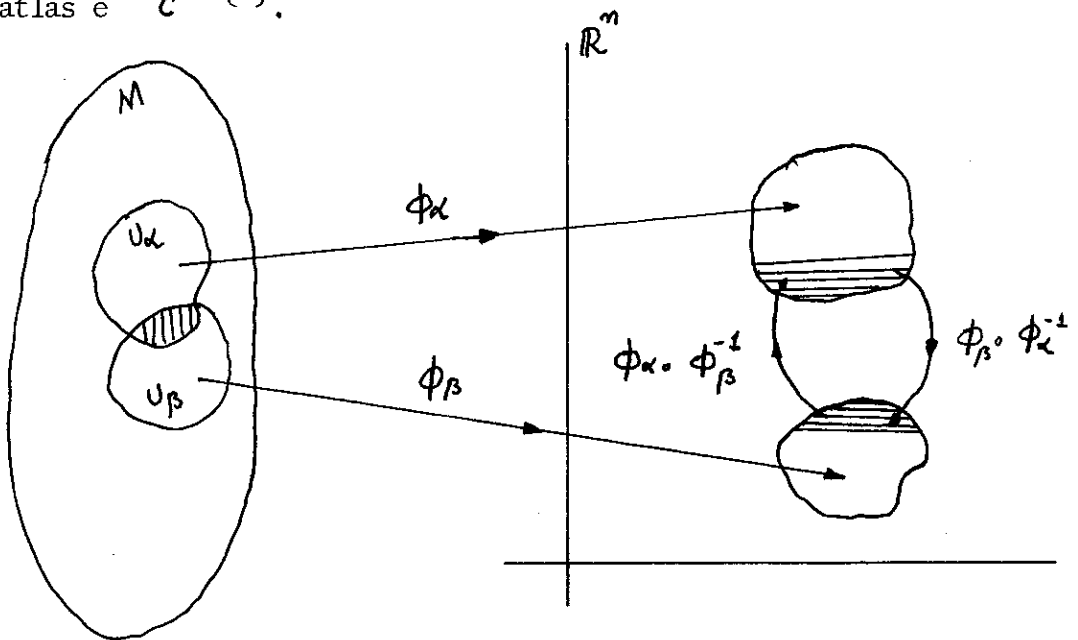


fig. 1

Posto isto, definimos uma "variedade diferenciável" n -dimensional M , de classe C^k ao conjunto M dotado de um atlas C^k .

(*) Dizemos que uma função é de classe C^k quando tem derivadas contínuas até ordem k .

1.3 - Objetos Geométricos Sobre Uma Variedade

Consideremos uma variedade diferenciável M . Seja P um ponto de M e $\{x^\alpha\}$ um sistema de coordenadas admissível em P . Um vetor tangente a M em P é, por definição, um objeto da forma

$$L = \lambda^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (1.3.1)$$

onde λ^α são constantes reais arbitrárias. É fácil mostrar que os vetores tangentes acima definidos constituem um espaço vetorial sobre os reais. Tal espaço é denominado de "espaço tangente" em P . e denotaremos por T_P . Se $\{x^\alpha\}$ é um sistema de coordenadas admissível em P , os vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\}$ formam uma base para o espaço T_P , denominada "base canônica", "base local" ou "base de coordenadas".

É importante observar que apesar da definição (1) envolver um particular sistema de coordenadas, pode-se mostrar, no entanto, que em um sistema de coordenadas arbitrário $\{x^\alpha\}$, um vetor tangente qualquer L , pode sempre ser expresso por

$$L = \lambda x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

que é da forma (1) onde $\lambda^\alpha = \lambda x^\alpha$.

Um campo de vetores tangentes L em M é definido como uma coleção de vetores tangentes L_P , um em cada ponto $P \in M$.

O Espaço dual T_P^* de T_P é, por definição, o espaço vetorial das formas lineares sobre T_P : $T_P^* : T_P \longrightarrow \mathcal{R}$.

Desta forma fica definido o produto bilinear sobre \mathcal{R}

$$\langle u, v \rangle \in \mathcal{R}$$

para todo $u \in \mathcal{T}_p$ e $v \in \mathcal{T}_p^*$

Sabemos da Álgebra Linear que \mathcal{T}_p e \mathcal{T}_p^* possuem a mesma dimensão e que se $\{e^\alpha, \alpha = 0, 1, 2, 3\}$ é uma base de \mathcal{T}_p , existe uma base $\{E_\beta, \beta = 0, 1, 2, 3\}$ de \mathcal{T}_p^* , tal que

$$\langle e^\alpha, E_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha \tag{1.3.2}$$

$\{E_\beta\}$ é chamada base dual da base $\{e^\alpha\}$ e é unívocamente determinada pela eq. (2).

Uma função qualquer f , diferenciável em P , define uma forma linear sobre \mathcal{T}_p por

$$L \longrightarrow Lf = \lambda^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

Este mapeamento de \mathcal{T}_p em \mathcal{R} é denotado por df , isto é, df é, por definição, o elemento de \mathcal{T}_p^* definido por

$$\langle L, df \rangle = Lf \tag{1.3.3}$$

Em particular, se $\{x^\alpha\}$ é um sistema de coordenadas admissível em P , os elementos $\{dx^\alpha\}$ constituem uma base para \mathcal{T}_p^* eles pertencem a \mathcal{T}_p^* e satisfazem a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, dx^\beta \right\rangle = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} \right)_P = \delta_\alpha^\beta$$

constituindo, desta forma, uma base dual à base canônica $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\}$. Os elementos de T_P^* são denominados de "diferenciais em P" e, pelo que foi dito acima, podem ser escritos na forma $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$

Usando a bilinearidade teremos:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \omega \right\rangle = \omega_\alpha \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, dx^\alpha \right\rangle = \omega_\alpha \delta_\alpha^\alpha = \omega_\alpha$$

e portanto

$$\omega = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \omega \right\rangle dx^\alpha \tag{1.3.4}$$

Analogamente, podemos mostrar que qualquer vetor $X \in T_P$, pode ser escrito como

$$X = \langle X, dx^\alpha \rangle \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_P \tag{1.3.5}$$

Usando as duas últimas equações mostra-se, por cálculo direto, que

$$\langle X, \omega \rangle = X^\alpha \omega_\alpha \tag{1.3.6}$$

para todo $X \in T_p$ e $\omega \in T_p^*$. Obviamente, T_p é o espaço dos vetores contravariantes em P e T_p^* o espaço dos vetores covariantes em P .

Definimos uma "forma diferencial" ω de primeira ordem (1-forma) sobre uma variedade M como uma coleção de diferenciais $\{\omega_p\}$ uma em cada ponto P (Campo Vetorial Covariante). Assim, por exemplo, uma coleção de diferenciais df , onde f é uma função analítica, é uma 1-forma sobre toda a variedade M . Podemos definir uma forma de ordem p qualquer (p-forma); para isto necessitamos do conceito de tensores ou campos tensoriais:

Podemos construir um "campo tensorial covariante" de ordem R , em $P \in M$ da seguinte forma: seja o produto cartesiano $\prod_{k=1}^R T_p^{(k)}$ construído com o espaço tangente a P e seja $f_{(R)}$ uma função R -linear de $\prod_{k=1}^R T_p^{(k)}$ em \mathbb{R}

$$f_{(R)} : T_p^{(1)} \times T_p^{(2)} \times \dots \times T_p^{(R)} \rightarrow \mathbb{R} \tag{1.3.7}$$

$$f_{(R)}(X_1, X_2, \dots, X_R) = \langle \omega^1, X_1 \rangle \langle \omega^2, X_2 \rangle \dots \langle \omega^R, X_R \rangle$$

qualquer que sejam os $X_k \in T_p^{(k)}$ e $\omega^k \in T_p^{(k)*}$. A função $f_{(R)}$, que denotaremos por

$$f_{(r)} = \omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \dots \otimes \omega^n \quad (1.3.8)$$

define um tensor covariante de ordem r em P . De modo geral, tomando uma base $\{E_{(\alpha)}^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n\}$ para o k -ésimo T_P^* , um tensor covariante de ordem r em P é dado por

$$f_{(r)} = C_{\alpha\beta\dots\mu} E_{(\alpha)}^\alpha \otimes E_{(\beta)}^\beta \otimes \dots \otimes E_{(\mu)}^\mu \quad (1.3.9)$$

De maneira inteiramente análoga, podemos definir um "tensor contravariante de ordem s " e tensores mistos (r -covariante e s -contravariante) em $P \in M$. Como sô iremos usar a definição de tensores covariantes, não faremos isto aqui. O leitor que desejar maiores detalhes sobre este tópico poderá consultar, por exemplo Hawking-Ellis e Kobayashi, referências (3) e (4).

Definimos um campo tensorial $\gamma_r^s(A)$ em ACM como uma coleção de tensores um em cada ponto $P \in ACM$. Assim, melhor dizendo, um campo tensorial é, por definição, uma função que, a cada ponto $P \in ACM$ associa um tensorior.

Uma classe de campos tensoriais particularmente importante é a classe dos campos tensoriais constituídos com tensores da forma $(0, r)$ ou γ_r^0 (0 -contravariante e r -covariante) que são antissimétricos em todas as r posições, isto é, que são totalmente antissimétricos. Tais campos constituem as chamadas formas de ordem p (p -formas). Numa dada carta, por exemplo, podemos escrever

$$\eta_{(n)} = \eta_{[\alpha\beta\dots p]}^{(x)} \omega_{(1)}^{\alpha} \otimes \omega_{(2)}^{\beta} \otimes \dots \otimes \omega_{(n)}^p \quad (1.3.10)$$

$$\alpha, \beta, \dots, p = 1, 2, \dots, n$$

tal que

$$\eta_{(n)}^{(P)} = \eta_{[\alpha\beta\dots p]}^{(x_P)} \omega_{(1)}^{\alpha} \otimes \omega_{(2)}^{\beta} \otimes \dots \otimes \omega_{(n)}^p \in \{ \gamma_n^0(P) \}$$

Tomando a mesma base $E_{(\alpha)}$ para todos os T_p podemos escrever a equação (10) como

$$\eta_{(n)} = \eta_{[\alpha,\beta\dots p]}^{(x)} E^{\alpha} \otimes E^{\beta} \otimes \dots \otimes E^p \quad (1.3.11)$$

Devemos chamar atenção para o fato que o produto \otimes é não comutativo.

Finalmente, desejamos observar que, numa base $\{ \partial/\partial x^{\alpha} \}$, o tensor antissimétrico associado a uma p-forma é dado por

$$\eta_{[\alpha\beta\dots p]} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^p} \mid \eta_{(n)} \right\rangle \quad (1.3.12)$$

1.4 - Produto Exterior

Sejam α, β e γ três 1-formas. Definimos o "produto exterior" ou Produto de Grassmann destas 1-formas, que denotaremos pelo símbolo \wedge , como a operação que goza das seguintes propriedades

- i) $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$
- ii) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ (1.4.1)
- iii) $\alpha \wedge (a\beta + b\gamma) = a(\alpha \wedge \beta) + b(\alpha \wedge \gamma)$ $a, b \in \mathbb{R}$
- iv) $\alpha \wedge \alpha = 0$

Assim, o produto exterior é não comutativo, associativo e distributivo.

Como vimos anteriormente, num sistema de coordenadas admissível em P , podemos expressar as 1-formas α e β por

$$\alpha = \alpha_\lambda dx^\lambda$$
$$\beta = \beta_\rho dx^\rho$$

Desta forma, numa dada carta, podemos escrever

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \alpha_\lambda dx^\lambda \wedge \beta_\rho dx^\rho = \alpha_\lambda \beta_\rho dx^\lambda \wedge dx^\rho = \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_\lambda \beta_\rho - \alpha_\rho \beta_\lambda) dx^\lambda \wedge dx^\rho \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

ou seja, apenas a parte antissimétrica $\alpha \wedge \beta$ contribui para o produto exterior $\alpha \wedge \beta$. Da definição de uma p-forma dada anteriormente, é evidente que $\alpha \wedge \beta$ define uma 2-forma e que o produto $dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}$ constitui uma base para as 2-formas, de maneira que uma 2-forma geral pode ser escrita como

$$\eta = \eta_{\alpha\beta}(x) dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}$$

Analogamente, de acordo com a definição de uma p-forma, uma n-forma pode ser escrita como

$$\omega = \eta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x) dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n} \quad (1.4.3)$$

onde $dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}$ é o produto exterior de ordem n totalmente antissimétrico, e constitui uma base para as n-formas.

Com o uso da última equação, as seguintes propriedades podem ser verificadas diretamente

- i) se α é uma p-forma e β uma q-forma. O produto $\alpha \wedge \beta$ é uma forma de ordem $p + q$ (p + q-forma).
- ii) o produto mencionado na propriedade (i) satisfaz a relação

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \quad (1.4.4)$$

Observe que se p e q forem ímpares, o produto $\alpha \wedge \beta$ anti-comuta e comuta em caso contrário.

Para finalizar, desejamos observar que o objeto totalmente antis

simétrico $\eta_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ se transforma como um tensor covariante de ordem n sob mudança de coordenadas admissíveis em P .

1.5 - Derivada Exterior

A estrutura do cálculo diferencial sobre as formas é baseada no conceito da operação de derivação exterior. Esta operação é representada por um operador linear d , e definida do seguinte modo: seja a n -forma diferenciável

$$w = \eta_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x) dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \dots dx^{\alpha_n}$$

sua derivada exterior dw é, por definição, a $n+1$ -forma

$$dw = \frac{\partial \eta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}}{\partial x^\beta} dx^\beta dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} \dots dx^{\alpha_n}$$

Assim, por exemplo, o operador d atuando sobre as 0-formas f (funções definidas na variedade M) fornece como resultado as 1-formas^(*)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

definidos anteriormente.

Pode-se mostrar sem dificuldade que se α e β são formas de ordem p e q respectivamente, então:

(*) Em todo este trabalho de tese consideramos, por hipótese, que as funções encontradas são diferenciáveis o necessário para que nos as afirmações sejam válidas.

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \quad (1.5.2)$$

Como consequência imediata da definição de derivada exterior tem-se que

$$d(dw) \equiv d^2w = 0 \quad (1.5.3)$$

para qualquer p-forma w .

1.6 - Derivada de Lie

Seja M uma variedade diferenciável e sejam X e Y dois campos vetoriais definidos em M . O comutador $[X, Y]$ é definido por

$$[X, Y] = XY - YX \quad (1.6.1)$$

Numa base canônica podemos escrever

$$X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (1.6.2)$$

$$Y = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 [X, Y] &= X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(Y^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) - Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(X^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = \\
 &= \left(X^\alpha Y^\beta_{, \alpha} - Y^\alpha X^\beta_{, \alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad (1.6.3)
 \end{aligned}$$

o que mostra que o comutador $[X, Y]$ é um campo vetorial. As componentes de tal campo são dadas por

$$[X, Y]^p = [X, Y](x^p) = X^\alpha Y^p_{, \alpha} - Y^\alpha X^p_{, \alpha} \quad (1.6.4)$$

Por definição, a "derivada de Lie" de um campo vetorial Y em relação a um campo vetorial X é

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad (1.6.5)$$

Em termos de componentes

$$\left(\mathcal{L}_X Y \right)^p = X^\alpha Y^p_{, \alpha} - Y^\alpha X^p_{, \alpha} \quad (1.6.6)$$

Podemos também definir a derivada de Lie de uma 1-forma ω em relação a um campo vetorial X . Para isto, calculemos

$$\begin{aligned}
 \langle \omega, [X, Y] \rangle &= \langle \omega, XY - YX \rangle = \\
 &= \omega_\beta (X^\alpha Y^\beta_{, \alpha} - Y^\alpha X^\beta_{, \alpha}) \langle \frac{\partial}{\partial x^\beta}, dx^\beta \rangle = \\
 &= \omega_\beta Y^\beta_{, \alpha} X^\alpha - Y^\alpha X^\beta_{, \alpha} \omega_\beta
 \end{aligned}$$

ou

$$\langle \omega, [X, Y] \rangle = (\omega_\beta Y^\beta)_{, \alpha} X^\alpha - Y^\beta (\omega_{\beta, \alpha} X^\alpha + X^\alpha_{, \beta} \omega_\alpha)$$

ou ainda

$$\langle \omega, [X, Y] \rangle = X \langle Y, \omega \rangle - Y^\beta (\omega_{\beta, \alpha} X^\alpha + X^\alpha_{, \beta} \omega_\alpha) \quad (1.6.7)$$

Definimos a derivada de Lie de uma 1-forma ω em relação a um campo vetorial X por

$$\mathcal{L}_X \omega = (\omega_{\beta, \alpha} X^\alpha + X^\alpha_{, \beta} \omega_\alpha) dx^\beta \quad (1.6.8)$$

Da definição acima e da eq. (1.6.7) podemos extrair uma definição independente de coordenada da derivada de Lie de uma 1-forma ω em relação a um campo vetorial dada por

$$\begin{aligned}
 \langle \underline{Y}, \mathcal{L}_{\underline{X}} \omega \rangle &= \left\langle Y^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}, (\omega_{\rho\alpha} x^\alpha + x^\alpha_{, \rho} \omega_\alpha) dx^\rho \right\rangle = \\
 &= Y^\beta (\omega_{\rho\alpha} x^\alpha + x^\alpha_{, \rho} \omega_\alpha) \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\beta}, dx^\rho \right\rangle = \\
 &= Y^\rho (\omega_{\rho\alpha} x^\alpha + x^\alpha_{, \rho} \omega_\alpha) = \\
 &= X \langle \underline{Y}, \omega \rangle - \langle \omega, [\underline{X}, \underline{Y}] \rangle
 \end{aligned}$$

ou mais brevemente

$$\langle \underline{Y}, \mathcal{L}_{\underline{X}} \omega \rangle = X \langle \underline{Y}, \omega \rangle - \langle \omega, [\underline{X}, \underline{Y}] \rangle \quad (1.6.9)$$

onde \underline{X} e \underline{Y} são dois campos arbitrários sobre a variedade.

Podemos mostrar das definições (5) e (9) que a derivada de Lie $\mathcal{L}_{\underline{X}}$ obedece a regra de Leibnitz e que a derivada de Lie de uma função escalar é a derivada simples na direção ao longo de \underline{X} , isto é, num da do sistema de coordenadas

$$\mathcal{L}_{\underline{X}} Y^\alpha z^\beta = Y^\alpha (\mathcal{L}_{\underline{X}} z^\beta) + z^\beta (\mathcal{L}_{\underline{X}} Y^\alpha) \quad (1.6.10)$$

$$\mathcal{L}_{\underline{X}} (Y_\alpha z^\alpha) = (Y^\alpha z_\alpha)_{, \rho} X^\rho \quad (1.6.11)$$

onde Y^α , X^ρ e z^β são componentes de campos vetoriais arbitrários, definidos em M .

Podemos definir a derivada de Lie de outra maneira. A vantagem

que existe numa tal definição é que ela nos permite fazer uma imagem geométrica da operação de derivação (de Lie). Faremos isto agora.

Considerar uma transformação infinitesimal que leve um ponto P de coordenadas x^α em um ponto P' de coordenadas x'^α , dada por

$$x'^\alpha = x^\alpha + \epsilon X^\alpha(x) \quad (1.6.12)$$

onde $X^\alpha(x)$ são as componentes de um campo vetorial X , gerador da transformação linear. Esta transformação induzirá um deslocamento de objetos geométricos definidos em P . Assim, por exemplo, se $Y(x)$ for um campo vetorial definido em P e em sua vizinhança (pelo menos), o novo vetor $Y'(P')$, resultante do deslocamento de $Y(x)$ para o ponto infinitesimalmente próximo P' pode ser calculado por

$$Y'^\alpha(P') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} Y^\beta(P) \quad (1.6.13)$$

pois podemos pensar na transformação infinitesimal como uma mudança de coordenados. Pela eq. (1), teremos

$$Y'(P') = \left(Y^\alpha(P) + \epsilon X^\alpha_{, \beta}(P) Y^\beta(P) \right) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (1.6.14)$$

É importante observar que, neste caso, $Y(P)$ é deslocado "inalteradamente" para P' e que em geral, $Y'(P')$ não coincide com o valor do campo no ponto P' , isto é, não coincide com $Y(P')$.

Posto isto, definimos alternativamente, a derivada de Lie de um campo vetorial Y em relação a um campo vetorial X como

$$\left(\mathcal{L}_X Y \right)^P = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Y^P(x') - Y^P(x)}{\epsilon} \quad (1.6.15)$$

Desta forma, a derivada de Lie "mede" a variação ao longo da direção definida por X , do campo Y , por um deslocamento do tipo (12). De outra forma, a operação de derivação de Lie de um campo vetorial Y em relação a um campo vetorial X , é em essência uma operação de "comparação". Compara-se o valor do campo vetorial Y no ponto P' ($Y(P')$) com o vetor $Y'(P')$ obtido de $Y(P)$ por um deslocamento inalterado (de P para P') ao longo da direção X .

Usando-se desenvolvimento em série mostra-se que a definição (15) coincide com a expressão (6) como era esperado.

A derivada de Lie de uma 1-forma, neste contexto, aparece como consequência da definição da derivada de Lie para escalares (0-formas) que é

$$\mathcal{L}_X \phi(x) = X^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$$

Desta definição, segue-se imediatamente que

$$\mathcal{L}_X (Y^\alpha \omega_\alpha) = (Y^\alpha \omega_\alpha)_{, \beta} X^\beta$$

ou

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_X Y^\alpha \right) \omega_\alpha + \left(\mathcal{L}_X \omega_\alpha \right) Y^\alpha = \\ & = Y^\alpha_{, \beta} X^\beta \omega_\alpha + Y^\alpha \omega_{\alpha, \beta} X^\beta \end{aligned}$$

ou ainda usando a eq. (6)

$$\left(\mathcal{L}_X \omega_\alpha \right) Y^\alpha = \left(\omega_{\alpha 1 \beta} X^\beta + X^\beta{}_{1 \alpha} \omega_\beta \right) Y^\alpha$$

como Y é arbitrário, teremos:

$$\mathcal{L}_X \omega_\alpha = \left(\omega_{\alpha 1 \beta} X^\beta + X^\beta{}_{1 \alpha} \omega_\beta \right)$$

que numa base $\{dx^\alpha\}$ se reduz a expressão (8).

Podemos definir também a derivada de Lie para um tensor de ordem arbitrária

$$\mathcal{L}_X T_{\gamma \rho \dots}^{\alpha \beta \dots}(x) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T_{\gamma \rho \dots}^{\alpha \beta \dots}(x) - T_{\gamma \rho \dots}^{\alpha \beta \dots}(x - \epsilon X)}{\epsilon} \quad (1.6.16)$$

que se reduz a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X T_{\gamma \rho \dots}^{\alpha \beta \dots}(x) &= T_{\gamma \rho \dots 1 \sigma}^{\alpha \beta \dots} X^\sigma - X^\alpha{}_{1 \lambda} T_{\gamma \rho \dots}^{\lambda \beta \dots} - \\ &- X^\beta{}_{1 \lambda} T_{\gamma \rho}^{\alpha \lambda} - \dots + X^\lambda{}_{1 \rho} T_{\lambda \rho \dots}^{\alpha \beta \dots} + X^\lambda{}_{1 \alpha} T_{\gamma \lambda \dots}^{\alpha \beta \dots} + \dots \end{aligned} \quad (1.6.17)$$

para ver isto usa-se desenvolvimento em série. É importante notar que podemos interpretar geometricamente a eq. (17) de maneira análoga a que fizemos

mos com vetores.

1.7 - Cálculo Com Formas: Introdução

No que se segue consideraremos uma variedade Riemanniana quadri-
mensional, localmente Lorentziana, determinada pela métrica $g_{\alpha\beta}^{(x)}$,
num dado sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$.

Considere o operador de distância dado por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}^{(x)} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.7.1)$$

num dado sistema de coordenados. Façamos a seguinte construção: num dado
ponto da variedade x^α , tomemos uma base de quatro vetores linearmente
independente

$$\left\{ e_{(A)}^\alpha(x) \mid A = 0, 1, 2, 3 \right\} \quad (1.7.2)$$

Desta forma, um vetor qualquer X^α , definido no ponto, tem componentes
 X^A dadas por

$$X^\alpha = e_{(A)}^\alpha X^A \quad (1.7.3)$$

na base (2). Em particular, os vetores dx^α (1-formas) têm componentes
 θ^A , nesta base, dadas por

$$dx^\alpha = e_{(A)}^\alpha \theta^A \quad (1.7.4)$$

Usando este fato, podemos escrever o elemento de linha (1) como

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta \theta^A \theta^B \quad (1.7.5)$$

Podemos sempre escolher a base (2) de forma que

$$g_{\alpha\beta} e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta = \eta_{AB} = \text{diag} (+1, -1, -1, -1) \quad (1.7.6)$$

isto é, $e_{(0)}^\alpha$ tipo tempo e $e_{(i)}^\alpha$ ($i = 1, 2, 3$) tipo espaço, e mutuamente ortogonais.

Devemos chamar atenção para o fato que a escolha (6) não é única (embora seja conveniente na maioria dos casos) e nem impõe restrição alguma sobre as componentes da métrica.

Com a escolha (6) o elemento de linha ds^2 assume, localmente, a forma Lorentziana

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad (1.7.7)$$

A matriz η_{AB} pode ser pensada como as componentes do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ na base local $\{ e_{(A)}^\alpha, e_{(B)}^\beta \mid A, B = 0, 1, 2, 3 \}$.

Como os vetores $\{ e_{(A)}^\alpha \}$ são linearmente independentes, a matriz 4×4 $(e_{(A)}^\alpha)$ é inversível. Tomando nesta matriz α como índice de linha e (A) como índice de coluna, poderemos representar a sua inversa por $(e_{\alpha}^{(A)})$, onde $(A) =$ índice de linha e $\alpha =$ índice de coluna. De maneira que

$$e_{(A)}^\alpha e_{\alpha}^{(B)} = \delta_{AB} \quad (1.7.8)$$

Desta forma da eq. (6) poderemos escrever

$$g_{\kappa\beta} e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta e_\rho^{(A)} = \eta_{AB} e_\rho^{(A)} \quad (1.7.10)$$

e usando a eq. (9), temos finalmente

$$e_{\rho(B)} \equiv g_{\rho\beta} e_{(B)}^\beta = \eta_{AB} e_\rho^{(A)} \quad (1.7.11)$$

Se definirmos a inversa de η_{AB} por $\eta^{AB} = \text{diag.}(+1, -1, -1, -1)$, da equação (7) obtemos

$$e_\rho^{(A)} = \eta^{AB} e_{\rho(B)} \quad (1.7.12)$$

Desta forma das eqs. (11) e (12) verificamos que os índices latinos maiúsculos - que denominaremos "índices de tetradas" - são levantados e abaixados com η^{AB} e η_{AB} , respectivamente. Assim, relativamente aos índices de tetradas as matrizes η^{AB} e η_{AB} fazem o papel de métrica.

Tomando a equação

$$g_{\kappa\beta} e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta = \eta_{AB}$$

e multiplicando por η^{BC} , teremos:

$$\eta^{BC} g_{\kappa\beta} e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta = \delta_A^C$$

ou ainda

e finalmente

$$e_{(A)}^\alpha e_\alpha^{(C)} = \delta_A^C \quad (1.7.13)$$

Desta forma, a eq. (4) pode ser invertida fornecendo

$$\theta^A = e_\alpha^{(A)} dx^\alpha \quad (1.7.14)$$

Para concluir, desejamos registrar o fato que a expressão (6) fica inalterada por transações de Lorentz locais $L_{(x)}^A_B$ definidas por

$$L_{(x)}^A_B \eta_{AC} L_D^{(x)C} = \eta_{BD} \quad (1.7.15)$$

que correspondem a uma transformação na base local

$$e_\alpha^{(A)} \longrightarrow \tilde{e}_\alpha^{(A)(x)} = L_{(x)}^A_B e_\alpha^{(B)(x)} \quad (1.7.16)$$

Tais transformações correspondem a uma rotação na base de tetradas de modo que as tetradas ficam definidas a menos de uma rotação de Lorentz local, que pode ser feita independentemente em cada ponto da variedade.

1.8 - Primeira Equação de Estrutura de Cartan

Seja o elemento infinitesimal de distância dado por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}^{(x)} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.8.1)$$

num sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$, onde dx^α são 1-formas duais à base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right\}$. Conforme foi visto, por uma escolha de tetradas podemos sempre escrever a eq. acima como

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad (1.8.2)$$

onde

$$\theta^A = e_{\alpha}^{(A)} dx^\alpha \quad (1.8.3)$$

$$dx^\alpha = e_{(A)}^{\alpha} \theta^A \quad (1.8.4)$$

Diferenciando exteriormente θ^A dado na eq. (3), teremos

$$d\theta^A = e_{\alpha \parallel \beta}^{(A)} dx^\beta \wedge dx^\alpha \quad (1.8.5)$$

Numa variedade em que a conexão é simétrica $\Gamma_{\alpha\rho}^\lambda = \Gamma_{\rho\alpha}^\lambda$ (variedade sem torção), devido as propriedades de simetria do produto de Grassmann $dx^\beta \wedge dx^\alpha$, podemos escrever a eq. (5) como

$$d\theta^A = e_{\alpha \parallel \beta}^{(A)} dx^\beta \wedge dx^\alpha \quad (1.8.6)$$

usando a eq. (3) podemos escrever

$$d\theta^A = e_{\alpha \parallel \beta}^{(A)} e_{(B)}^\beta e_{(C)}^\alpha \theta^B \wedge \theta^C \quad (1.8.7)$$

Definindo os objetos

$$\gamma^A_{BC} = - e^{(A)}_{\alpha} \wedge e^{\alpha}_{(B)} e^{\beta}_{(C)} \quad (1.8.8)$$

que são conhecidos como "coeficientes de rotação de Ricci", podemos escrever $d\theta^A$ como

$$d\theta^A = - \gamma^A_{CB} \theta^B \wedge \theta^C = \gamma^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C \quad (1.8.9)$$

Definindo as "1-formas de rotação" por

$$\omega^A_B = \gamma^A_{BC} \theta^C \quad (1.8.10)$$

podemos escrever finalmente

$$d\theta^A = - \omega^A_B \wedge \theta^B \quad (1.8.11)$$

que é conhecida como "Primeira Equação de Estrutura de Cartan".

Seja $\{\theta^A\}$ uma base de 1-formas associada à base de tetradas $\{e^{\alpha}_{(A)}\}$. Nesta base a métrica $g_{\alpha\beta}$ tem componentes

$$g_{AB} = e^{\alpha}_{(A)} e^{\beta}_{(B)} g_{\alpha\beta} \quad (1.8.12)$$

Como g_{AB} é um escalar

$$d(g_{AB}) = (g_{AB})_{;P} dx^P = (g_{AB})_{||P} dx^P$$

de modo que diferenciando exteriormente a eq. (12) e usando que $\mathcal{J}_{\alpha\beta||\rho} = 0$, teremos

$$\begin{aligned} d(g_{AB}) &= e_{(A)||\rho}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} g_{\alpha\beta} dx^{\rho} + e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)||\rho}^{\beta} g_{\alpha\beta} dx^{\rho} = \\ &= e_{(A)||\rho}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} e_{(C)}^{\rho} \theta^c g_{\alpha\beta} + e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)||\rho}^{\beta} e_{(C)}^{\rho} \theta^c g_{\alpha\beta} = \\ &= \gamma_{ABC} \theta^c + \gamma_{BAC} \theta^c \end{aligned} \tag{1.8.13}$$

Usando a definição de ω^A_B , teremos

$$d(g_{AB}) = \omega_{AB} + \omega_{BA} \tag{1.8.14}$$

De acordo com esta última equação podemos concluir que se a base $\{e_{(A)}^{\alpha(x)}\}$ for escolhida de maneira que $g_{AB} = \text{constante}$, a 1-forma de rotação obedecerá a simetria

$$\omega_{AB} = -\omega_{BA} \tag{1.8.15}$$

Para uma dada base $\{\theta^A\}$ os coeficientes de rotação ω^A_B são univocamente definidos pelas eqs. (11) e (15). Faremos tal demonstração devido ao fato de que, com ela, evidencia-se como veremos no final, uma maneira direta para o cálculo dos ω^A_B , os quais serão extremamente importantes na determinação das 2-formas de curvatura e, conseqüentemente na determinação das curvaturas de uma dada métrica (veja Segunda Equação de

Cartan).

Recapitulando, desejamos mostrar que se $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$, então os ω^A_B são univocamente determinados pela eq. (11). Com efeito, da eq. (10), que reescrevemos

$$\omega^A_B = \gamma^A_{BC} \theta^C \quad (1.8.16)$$

dada a hipótese $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$, concluímos de saída que γ_{ABC} é antissimétrico nos 2 primeiros índices. De acordo com a eq. (16) podemos escrever a eq. (11) como

$$d\theta^A = -\omega^A_B \wedge \theta^B = -\gamma^A_{BC} \theta^C \wedge \theta^B \quad (1.8.17)$$

Devido à simetria do produto externo $\theta^C \wedge \theta^B$, esta equação pode ser posta como

$$d\theta^A = \frac{1}{2} (\gamma^A_{BC} - \gamma^A_{CB}) \theta^B \wedge \theta^C \quad (1.8.18)$$

Definindo

$$C_{ABC} = \gamma_{ABC} - \gamma_{ACB} \quad (1.8.19)$$

teremos

$$d\theta^A = \frac{1}{2} C^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C \quad (1.8.20)$$

Como, por hipótese, $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$, a eq. (19) pode ser resolvida pa

ra γ_{ABC} . Para isto escrevemos

$$C_{ABC} = \gamma_{ABC} - \gamma_{ACB} \quad (1.8.21)$$

$$C_{BAC} = \gamma_{BAC} - \gamma_{BCA} \quad (1.8.22)$$

$$C_{CAB} = \gamma_{CAB} - \gamma_{CBA} \quad (1.8.23)$$

Somando as duas últimas e subtraindo a primeira destas eqs., teremos

$$C_{BAC} + C_{CAB} - C_{ABC} = -2 \gamma_{ABC} \quad (1.8.24)$$

onde usamos que $\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC}$. Assim

$$\gamma_{ABC} = \frac{1}{2} (C_{ABC} - C_{BAC} - C_{CAB}) \quad (1.8.25)$$

Desta forma, os γ_{ABC} ou equivalentemente os ω_B^A (veja eq. (16)) são unicamente determinados pelos coeficientes C_{BC}^A da eq. (20) ou equivalente pela eq. (11) como queríamos demonstrar.

Como observamos no início, com tal demonstração evidencia-se o seguinte fato: conhecidas as expressões para os $d\theta^A$, podemos de acordo com a eq. (2) ler diretamente os C_{BC}^A . De posse destes, podemos com o uso da eq. (25) obter os γ_{ABC} e, em consequência, os ω_B^A de acordo com a eq. (16). Na prática, em geral, intuimos os ω_B^A diretamente das expressões dos $d\theta^A$ ao invés de usarmos a eq. (2). Devemos, no entanto, chamar atenção para o fato de que quando lidamos com métricas que possuem termos cruzados (Universos com rotação, por exemplo) tal tarefa, ou

seja, intuir os ω^A_B se torna terrivelmente dificultosa.

Evidentemente, da definição dos C_{ABC} , a simetria $C_{ABC} = -C_{ACB}$, é satisfeita. Usando tal simetria é possível mostrar que os γ_{ABC} satisfazem a simetria $\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC}$.

1.9 - Segunda Equação de Estrutura de Cartan

Seja a 1-forma de rotação

$$\omega^A_B = \gamma^A_{BC} \theta^C = \gamma^A_{BC} e^{(C)}_\alpha dx^\alpha \quad (1.9.1)$$

Diferenciando exteriormente

$$d\omega^A_B = (\gamma^A_{BC} e^{(C)}_\alpha)_{||\rho} dx^\rho \wedge dx^\alpha$$

Mas

$$\begin{aligned} (\gamma^A_{BC} e^{(C)}_\alpha)_{||\rho} &= - (e^{(A)}_{\mu||\nu} e^{(\mu)}_{(B)} e^{(\nu)}_{(C)} e^{(C)}_\alpha)_{||\rho} = \\ &= - (e^{(A)}_{\mu||\alpha} e^{(\mu)}_{(B)})_{||\rho} = - e^{(A)}_{\mu||\alpha||\rho} e^{(\mu)}_{(B)} - e^{(A)}_{\mu||\alpha} e^{(\mu)}_{(B)||\rho} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} d\omega^A_B &= - e^{(A)}_{\mu||\alpha||\rho} e^{(\mu)}_{(B)} dx^\rho \wedge dx^\alpha + \\ &+ e^{(A)}_{\mu||\alpha} e^{(\mu)}_{(B)||\rho} dx^\rho \wedge dx^\alpha \quad (1.9.2) \end{aligned}$$

O tensor de curvatura $R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta}$ é, como sabemos, definido por

$$V_{\mu||\alpha||\beta} - V_{\mu||\beta||\alpha} = R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta} V_{\lambda} \quad (1.9.3)$$

para um campo vetorial qualquer V^{μ} . Usando esta definição e o fato de que $dx^{\kappa} = e^{\kappa}_{(A)} \theta^A$, teremos

$$\begin{aligned} d\omega^A_B &= \frac{1}{2} R^{\lambda}_{\mu\kappa\rho} e^{\mu}_{(B)} e^{\lambda}_{(A)} e^{\rho}_{(D)} e^{\kappa}_{(C)} \theta^D \wedge \theta^C - \\ &\quad - e^{\mu}_{(B)} e^{\lambda}_{(A)} e^{\rho}_{(E)} e^{\kappa}_{(F)} \theta^E \wedge \theta^F \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

Como

$$\begin{aligned} e^{\mu}_{(B)} e^{\lambda}_{(A)} e^{\rho}_{(D)} e^{\kappa}_{(C)} \theta^D \wedge \theta^C &= g^{\mu\kappa} \delta^{\nu}_{\alpha} e_{\nu(B)} e^{\alpha}_{(A)} e^{\rho}_{(D)} e^{\kappa}_{(C)} \theta^D \wedge \theta^C = \\ &= g^{\mu\kappa} e^{\nu}_{(D)} e^{\alpha}_{(A)} e_{\nu(B)} e^{\alpha}_{(C)} \theta^D \wedge \theta^C = \\ &= e^{(D)\mu} e^{\nu}_{(D)} e_{\nu(B)} e^{\alpha}_{(A)} e^{\alpha}_{(C)} \theta^D \wedge \theta^C \end{aligned} \quad (1.9.5)$$

teremos

$$\begin{aligned} d\omega^A_B &= \frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^D \wedge \theta^C + \\ &\quad + e^{(A)\mu} e^{(D)\nu} e^{\rho}_{(D)} e_{\nu(B)} e^{\alpha}_{(E)} e^{\mu}_{(F)} \theta^E \wedge \theta^F \end{aligned} \quad (1.9.6)$$

Usando a definição dos coeficientes de rotação de Ricci γ^A_{BC} :

$$d\omega^A_B = -\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D - \gamma^{AD}_F \gamma_{BDE} \theta^E \wedge \theta^F \quad (1.9.7)$$

ou ainda

$$d\omega^A_B = -\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D + \omega_{BD} \wedge \omega^{AD} \quad (1.9.8)$$

onde usamos a eq. (1.8.16).

Podemos ainda escrever

$$-\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D = d\omega^A_B + \omega^A_D \wedge \omega^D_B \quad (1.9.9)$$

Definindo as 2-formas de curvatura por

$$\Omega^A_B = -\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \quad (1.9.10)$$

teremos finalmente

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \quad (1.9.11)$$

que é conhecida como Segunda Equação de Estrutura de Cartan.

Tendo calculado os ω^A_B e $d\omega^A_B$, verificamos desta última equação que teremos os Ω^A_B e, usando a definição (10) podemos obter por uma leitura direta as componentes da curvatura R^A_{BCD} , onde

$$R^A{}_{BCD} = R^{\lambda}{}_{\mu\kappa\rho} e^{\mu}{}_{(B)} e^{\kappa}{}_{(C)} e^{\rho}{}_{(D)} e_{\lambda}{}^{(A)} \quad (1.9.12)$$

conforme usamos na demonstração que acabamos de fazer.

1.10 - Identities Para a Curvatura

Podemos mostrar facilmente, partindo da Segunda Equação de Estrutura de Cartan

$$\Omega^c{}_B = d\omega^c{}_B + \omega^c{}_E \wedge \omega^E{}_B \quad (1.10.1)$$

a simetria $\Omega_{AB} = -\Omega_{BA}$, para a 2-forma de curvatura. Com efeito, contraindo a equação acima com g_{cA} , teremos

$$\Omega_{AB} = g_{cA} d\omega^c{}_B + \omega^c{}_E \wedge \omega^E{}_B \quad (1.10.2)$$

Usando a eq. (1.5.2), onde $\alpha = f$, isto é, onde α é uma zero-forma, podemos escrever

$$\Omega_{AB} = d(g_{cA} \omega^c{}_B) - dg_{cA} \wedge \omega^c{}_B + \omega_{cA} \wedge \omega^c{}_B$$

Mas

$$dg_{cA} = \omega_{cA} + \omega_{Ac} \quad (1.10.3)$$

Logo

$$\Omega_{AB} = d\omega_{AB} - (\omega_{CA} + \omega_{AC}) \wedge \omega_B^C + \omega_{AE} \wedge \omega_B^E \quad (1.10.4)$$

De maneira inteiramente análoga, teremos:

$$\Omega_{BA} = d\omega_{BA} - (\omega_{CB} + \omega_{BC}) \wedge \omega_A^C + \omega_{BE} \wedge \omega_A^E \quad (1.10.5)$$

Somando estas equações, resulta

$$\begin{aligned} \Omega_{AB} + \Omega_{BA} &= d(\omega_{AB} + \omega_{BA}) - \omega_{CA} \wedge \omega_B^C \\ &\quad - \omega_{CB} \wedge \omega_A^C = d(\omega_{AB} + \omega_{BA}) = \\ &= d(dg_{AB}) = 0 \end{aligned}$$

Conseqüentemente

$$\Omega_{AB} = -\Omega_{BA} \quad (1.10.6)$$

Uma segunda identidade para a 2-forma de curvatura Ω_{AB} pode ser obtida. Tal identidade aparece, no formalismo de Cartan, como condição de integrabilidade das 2-formas $d\theta^A$, como veremos.

Uma p-forma α é dita integrável se existe uma (p-1)-forma tal que

$$\alpha = d\omega \quad (1.10.7)$$

Desta forma, a condição de integrabilidade da p-forma α pode ser expressa como

$$d\alpha = d^2\omega = 0 \quad (1.10.8)$$

Assim, a condição de integrabilidade das 2-formas $d\theta^A$ é expressa pela identidade

$$d^2\theta^A = 0 \quad (1.10.9)$$

Estamos agora em condições de mostrar a segunda identidade relativa à forma de Curvatura Ω_{AB} . Derivando exteriormente a Primeira Equação de Estrutura de Cartan

$$d(d\theta^A) = d(-\omega^A_B \wedge \theta^B)$$

Usando a condição de integrabilidade (9) e a eq. (1.5.2), resulta

$$-d\omega^A_B \wedge \theta^B - (-1)^1 \omega^A_B \wedge d\theta^B = 0$$

Usando a Primeira e a Segunda Equação de Estrutura de Cartan

$$(-\Omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B) \wedge \theta^B + \omega^A_B \wedge (-\omega^B_C \wedge \theta^C) = 0$$

ou

$$\Omega^A_B \wedge \theta^B = 0 \quad (1.10.10)$$

Pode-se mostrar que todas as simetrias do tensor de curvatura es
tão contidos nas equações

$$\Omega_{AB} = -\Omega_{BA} \quad (1.10.11)$$

$$\Omega^A_B \wedge \theta^B = 0 \quad (1.10.12)$$

onde

$$\Omega^A_B = -\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \quad (1.10.13)$$

Mostraremos este fato agora. Evidentemente, das eqs. (11) e (12), tere
mos

$$R_{ABCD} = -R_{BAED} \quad (1.10.14)$$

$$R_{ABCD} = -R_{ABDC} \quad (1.10.15)$$

Multiplicando exteriormente a eq. (13) por θ^B , teremos

$$R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \wedge \theta^B = 0 \quad (1.10.16)$$

onde usamos a eq. (12). Assim, teremos a identidade cíclica, ou seja, a
eq. (16) nos diz que

$$R^A_{[BCD]} = 0 \quad (1.10.17)$$

ou equivalentemente

$$R_{A[BCD]} = 0 \quad (1.10.18)$$

Usando as simetrias registradas nas equações (14), (15) e (18), podemos mostrar que R_{ABCD} é simétrico com relação a troca dos pares de índices, digo $R_{ABCD} = R_{CDAB}$. Com efeito: A eq.(18) nos permite escrever

$$R_{A[BCD]} = 0 \quad (1.10.19)$$

$$R_{B[ACD]} = 0 \quad (1.10.20)$$

ou equivalente

$$R_{ABCD} + R_{ADBC} + R_{ACDB} = 0 \quad (1.10.21)$$

$$R_{BACD} + R_{BDAC} + R_{BCDA} = 0 \quad (1.10.22)$$

Subtraindo a eq. (22) da eq. (21), teremos:

$$2R_{ABCD} + R_{ADBC} + R_{ACDB} - R_{BDAC} - R_{BCDA} = 0$$

onde usamos a simetria (14). Utilizando ainda esta simetria podemos escrever

$$2R_{ABCD} - R_{DABC} - R_{CADB} - R_{BDAC} - R_{BCDA} = 0$$

ou

$$2R_{ABCD} - (R_{DABC} + R_{DBCA}) - (R_{CADB} + R_{CBAD}) = 0$$

Mas, pela identidade cíclica, podemos ainda escrever

$$2R_{ABCD} + R_{DCAB} + R_{CDBA} = 0$$

ou

$$2(R_{ABCD} - R_{CDAB}) = 0$$

portanto

$$R_{ABCD} = R_{CDAB} \quad (1.10.23)$$

como queríamos demonstrar.

As identidades de Bianchi podem ser obtidas a partir da Segunda Equação de Estrutura eq. (1.9.11) como se segue. Derivando exteriormente a eq. (1.9.11), teremos:

$$\begin{aligned} d\Omega^A_B &= d(dw^A_B) + d(w^A_C \wedge w^C_B) = \\ &= dw^A_C \wedge w^C_B - w^A_C \wedge dw^C_B \end{aligned}$$

usando novamente a eq. (1.9.11), teremos

$$d\Omega^A_B = (\Omega^A_C - \omega^A_E \wedge \omega^E_C) \wedge \omega^C_B - \omega^A_C \wedge (\Omega^C_B - \omega^C_E \wedge \omega^E_B)$$

ou

$$d\Omega^A_B = \Omega^A_C \wedge \omega^C_B - \omega^A_C \wedge \Omega^C_B \quad (1.10.24)$$

As identidades (23) implicam na forma usual das identidades de Bianchi, como veremos agora. Usando as eqs. (1.9.10) e (1.9.12) teremos:

$$\begin{aligned} d\Omega^A_B &= d\left(-\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D\right) = \\ &= -\frac{1}{2} d\left(R^{\lambda}_{\mu\kappa\beta} e^{\mu}_{(B)} e^{\kappa}_{(C)} e^{\beta}_{(D)} e^{\lambda}_{(A)} e^{\delta}_{(C)} e^{\gamma}_{(D)} dx^{\delta} \wedge dx^{\gamma}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} R^{\lambda}_{\mu\delta\gamma} e^{\mu}_{(B)} e^{\lambda}_{(A)} dx^{\delta} \wedge dx^{\gamma} \\ &\quad - \frac{1}{2} R^{\lambda}_{\mu\delta\gamma} e^{\mu}_{(B)} e^{\lambda}_{(A)} dx^{\delta} \wedge dx^{\gamma} \\ &\quad - \frac{1}{2} R^{\lambda}_{\mu\delta\gamma} e^{\mu}_{(B)} e^{\lambda}_{(A)} dx^{\delta} \wedge dx^{\gamma} \end{aligned} \quad (1.10.25)$$

o outro termo, isto é

$$\Omega^A_C \wedge \omega^C_B = -\frac{1}{2} (R^A_{CEF} \theta^E \wedge \theta^F) \wedge \gamma^C_{BD} \theta^D =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \left(R_{\mu\kappa\beta}^{\gamma} e_{\gamma}^{(A)} e_{(C)}^{\mu} e_{(E)}^{\kappa} e_{(F)}^{\beta} e_{\delta}^{(E)} e_{\gamma}^{(F)} dx^{\delta} \wedge dx^{\gamma} \right) \wedge \\
 &\quad \wedge \left(-e_{\alpha\parallel\beta}^c e_{(B)}^{\alpha} e_{(P)}^{\beta} e_{\rho}^{(P)} dx^{\rho} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} R_{\mu\delta\gamma}^{\gamma} e_{\gamma}^{(A)} e_{(C)}^{\mu} e_{\alpha\parallel\rho}^{(C)} e_{(B)}^{\alpha} dx^{\rho} \wedge dx^{\delta} \wedge dx^{\gamma} \\
 &= -\frac{1}{2} R_{\mu\delta\gamma}^{\gamma} e_{\gamma}^{(A)} e_{(B)\parallel\rho}^{\mu} \tag{1.10.26}
 \end{aligned}$$

pois

$$e_{(C)}^{\mu} e_{(B)}^{\alpha} e_{\alpha\parallel\rho}^{(C)} = -e_{(B)\parallel\rho}^{\mu}$$

O termo que falta pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 \omega^A_c \wedge \Omega^c_B &= -\frac{1}{2} \gamma_{cQ}^A \theta^Q \wedge R^c_{BQH} \theta^H = \\
 &= -\frac{1}{2} \left(-e_{\alpha\parallel\beta}^{(A)} e_{(C)}^{\alpha} e_{(Q)}^{\beta} e_{\rho}^{(Q)} dx^{\rho} \right) \wedge \\
 &\wedge R_{\mu\kappa\beta}^{\gamma} e_{\gamma}^{(C)} e_{(B)}^{\mu} e_{(G)}^{\kappa} e_{(H)}^{\beta} e_{\delta}^{(G)} e_{\gamma}^{(H)} dx^{\delta} \wedge dx^{\gamma} = \\
 &= \frac{1}{2} R_{\mu\delta\gamma}^{\gamma} e_{\gamma\parallel\rho}^A e_{(B)}^{\mu} dx^{\rho} \wedge dx^{\delta} \wedge dx^{\gamma} \tag{1.10.27}
 \end{aligned}$$

Escrevendo a eq. (24) na forma

$$d\Omega^A_B - \Omega^A_c \wedge \omega^c_B + \omega^A_c \wedge \Omega^c_B = 0$$

e usando os resultados (25), (26) e (27), resulta

$$-\frac{1}{2} R_{\mu}^{\lambda} \delta_{\lambda \rho} e_{(B)}^{\mu} e_{(A)}^{\rho} dx^{\lambda} dx^{\rho} dx^{\sigma} = 0$$

Contraindo com $e_{\alpha}^{(B)}$ e $e_{(A)}^{\beta}$, teremos finalmente

$$R_{\alpha}^{\beta} [\delta_{\lambda \rho}] = 0 \tag{1.10.28}$$

que é a forma usual das identidades de Bianchi.

CAPÍTULO 2

QUANTIDADES CINEMÁTICAS

2.1 - Tensor de Projeção

Seja uma variedade M_4 , e seja V^α um campo vetorial definido nesta variedade. Tal campo determina em cada ponto P , um subespaço H , do espaço tangente em P , que denotaremos por T_P ($H \subset T_P$), constituído pelos vetores ortogonais a V^α (3). No caso do campo vetorial satisfazer a determinadas propriedades (5), teremos determinada uma hipersuperfície $S \subset M_4$. O subespaço H , determinado por V^α poderá ser de três tipos:

- i) Se $g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta < 0$, o subespaço é dito ser "tipo tempo" e, neste caso, a métrica do subespaço será Lorentziana.
- ii) Se $g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta > 0$, o subespaço é dito "tipo espaço" e, neste caso, a métrica do subespaço é positiva definida.
- iii) Se $g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = 0$, o subespaço é dito "tipo nulo" e sua métrica será degenerada.

Trataremos, a partir deste ponto, apenas o caso em que o subespaço H é do tipo espaço e tal que o campo vetorial V^α é normalizado, $g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = 1$. Neste caso, podemos associar a H , uma classe

de observadores com quadrivelocidade V^α e H será dito "referencial inercial" do observador correspondente (6).

Usando V^α podemos construir o tensor $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta$, que possui as seguintes propriedades:

- i) É um operador de projeção. Com efeito, usando a definição de $h_{\alpha\beta}$ e o fato que $V_\alpha V^\alpha = g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = \perp$ podemos mostrar diretamente que:

$$h^\alpha_\beta h^\beta_\gamma = h^\alpha_\gamma$$

- ii) Tal projetor, projeta ortogonalmente a V^α . Com efeito, seja X^α um campo vetorial em M_4 . Anotemos por $\perp X^\alpha = h^\alpha_\beta X^\beta$, a sua projeção em H. O produto escalar

$$\begin{aligned} V_\beta \perp X^\beta &= g_{\alpha\beta} V^\alpha h^\beta_\gamma X^\gamma = \\ &= V_\beta (\delta^\beta_\gamma - V^\beta V_\gamma) X^\gamma = 0 \end{aligned}$$

o que nos mostra que $h_{\alpha\beta}$ projetor ortogonalmente a V^α .

- iii) O tensor $h_{\alpha\beta}$ é métrica do subespaço H. A construção acima nos permite escrever o elemento infinitesimal de linha em M_4 (distância no sentido topológico entre dois pontos P e Q de M_4 , infinitesimalmente próximos) como

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + (V_\alpha dx^\alpha)^2$$

Assim, a distância entre P e Q fica dividida em uma dis

tância puramente espacial $dl = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ e um intervalo de tempo $dt = V_\alpha dx^\alpha$, o que mostra ser $h_{\alpha\beta}$ a métrica do subespaço H.

iv) o traço h do tensor $h_{\alpha\beta}$ é igual a 3. Com efeito, por definição

$$\begin{aligned} h &= h^\alpha_\alpha = g^{\alpha\beta} (g_{\beta\alpha} - V_\alpha V_\beta) = \\ &= \delta^\alpha_\alpha - g^{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta = 3 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

onde usamos que

$$V^\alpha V_\alpha = 1$$

por hipótese.

v) O tensor $h_{\alpha\beta}$ determina univocamente em S uma afinidade. Como mencionamos sob certas condições^(*) os subespaços locais $H \subset T_p$ juntam-se dando origem a uma hipersuperfície $S \subset M_4$; é nesta S que $h_{\alpha\beta}$ determina univocamente uma afinidade. Para mostrar isto recordamos que numa variedade com torsão nula a afinidade é univocamente determinada pela condição

$$g_{\alpha\beta} \parallel p = 0 \quad (2.1.4)$$

Tendo isto em conta, temos que mostrar que, em S , não há

(*) Isto ocorre se e somente se o fluido possui rotação nula; veja referência (7).

torção e que a derivada covariante de $h_{\alpha\beta}$ é nula. Com efeito:

Anotando por $\nabla_\alpha X_\beta = X_{\beta||\alpha}$ a derivada covariante do vetor X_β , a derivada covariante de $h_{\alpha\beta}$ com relação a afinidade induzida em S será

$$h_\alpha{}^\beta h_\gamma{}^\delta \nabla_\beta \perp X_\delta \equiv {}^3\nabla \perp X_\gamma$$

Por cálculo direto mostra-se que

$$a) \quad {}^3\nabla_\beta {}^3\nabla_\alpha f - {}^3\nabla_\alpha {}^3\nabla_\beta f = h_\alpha{}^\gamma h_\beta{}^\delta (f_{||\gamma||\delta} - f_{||\delta||\gamma}) = 0$$

o que mostra que, em S , não há torção.

$$b) \quad {}^3\nabla_\alpha h_{\beta\gamma} = h_\alpha{}^\delta h_\beta{}^\epsilon h_\gamma{}^\zeta h_{\epsilon\zeta||\delta} = 0, \text{ o que mostra que, em } S, \text{ a derivada covariante de } h_{\alpha\beta} \text{ é nula.}$$

Logo, está mostrada a propriedade.

Utilizaremos $h_{\alpha\beta}$ e V^α para decompor objetos geométricos - em suas partes ortogonais e paralelos a V^α . Na cosmologia escolhe-se V^α como velocidade média do conteúdo material do universo e a decomposição acima adquire um significado físico determinado. Falaremos disto na seção seguinte.

2.2 - Geodésica e Parâmetro Afim

Seja $x^\alpha(t)$ uma representação paramétrica de uma curva Δ definida numa variedade M_4 . Considere um campo vetorial $X^\alpha(t)$ definido sobre a curva Δ . A derivada covariante desse vetor ao longo da curva Δ é definida por (8)

$$\frac{DX^\alpha}{Dt} = X^\alpha{}_{||\beta} V^\beta, \quad V^\beta = \frac{dx^\beta}{dt} \quad (2.2.1)$$

O vetor X^α é dito paralelamente transportado sobre a curva $x^\alpha(t)$ se

$$\frac{DX^\alpha}{Dt} = 0 \quad (2.2.2)$$

Um campo vetorial particularmente importante definido sobre a curva $x^\alpha(t)$ é o campo dos vetores tangentes à $x^\alpha(t)$ em cada ponto: $V^\alpha = dx^\alpha/dt$. Com ele podemos definir geodésicas. Com efeito, dizemos que a curva $x^\alpha(t)$ é geodésica se DV^α/Dt for paralelo a $V^\alpha = dx^\alpha/dt$, isto é

$$\frac{DV^\alpha}{Dt} = f V^\alpha \quad (2.2.3)$$

onde f é uma função escalar. É sempre possível encontrar um novo parâmetro $s(t)$, tal que a equação acima se reduz a (9)

$$\frac{DV^\alpha}{Ds} = \frac{dV^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha V^\beta V^\sigma = 0 \quad (2.2.4)$$

o parâmetro s é denominado "parâmetro afim" e a equação acima é a equação de movimento de uma partícula no campo gravitacional.

2.3 - Coordenadas Comoventes

O Princípio da Covariância Geral é um dos fundamentos básicos da Relatividade Geral. De acordo com este princípio, deveríamos tratar as leis físicas sem a necessidade de explicitarmos o sistema de coordenadas utilizado. A Cosmologia, na maioria das vezes, se vê compelida a adotar uma coordenada tempo global o que significa no abandono de um tratamento

covariante geral. Este é o preço que temos que pagar pela simplicidade dos modelos cosmológicos e pela descrição da realidade física de uma maneira matemática mais simples e conveniente.

Os dados observacionais que dispomos indicam que, em escala da ordem de 10^8 anos luz, o nosso Universo, no seu estágio atual, apresenta um alto grau de homogeneidade e isotropia e se expande, isto é, suas galáxias se afastam de nós com velocidades próximas à da luz, sendo as velocidades aleatórias em relação a este movimento médio, muito pequenas. Podemos assim, admitir uma velocidade média de recessão das galáxias, e tratar o conteúdo material do universo como um fluido. Isto é o que é feito convencionalmente na cosmologia.

Na maioria dos casos simplificamos grandemente o tratamento de problemas cosmológicos com o uso de um sistema de coordenadas onde as galáxias, ou o conteúdo material do universo, estão, em média, em repouso. Tal sistema é denominado "Sistema de Coordenadas Comoventes" e o definiremos, agora, de uma maneira mais formal.

Anotaremos um ponto da variedade espaço tempo (evento) M_4 , por x^α , $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Seja S uma hipersuperfície do tipo espaço e tal que sobre S qualquer ponto tenha a mesma coordenada temporal x^0 . Os diferentes pontos sobre S são caracterizados por diferentes coordenadas espaciais x^i , $i = 1, 2, 3$. Por cada ponto de S considere geodésicas, γ , ortogonais a S com parâmetro afim s . Assim, podemos caracterizar qualquer ponto x^α , da variedade espaço tempo fornecendo x^i e o parâmetro s sobre a geodésica γ que contém x^α . As coordenadas $\{x^i = cte., s\}$ são ditas comoventes e o sistema assim definido é denominado de "Sistema de Coordenadas Comoventes".

A velocidade de um observador movendo-se ao longo de (ligado ao

conteúdo material do universo) é dada pelo vetor tangente à curva:

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \Big|_{x^i = \text{cte.}} \quad (2.3.1)$$

que, em coordenadas comovetes, evidentemente se reduz $v^\alpha = \delta^\alpha_0$

2.4 - Quantidades Cinemáticas

Uma curva, γ , definida numa variedade M_4 é uma aplicação de um conjunto aberto do R^1 em M_4 . Anotamos por $\gamma: s \in A \subset R^1 \rightarrow \gamma(s)$, onde A é, evidentemente, o conjunto aberto de R^1 .

Chamaremos de "Congruência de Curvas", Γ , a uma família de curvas $\gamma(s, t)$, definidas em M_4 , de tal modo que por cada ponto passe uma e somente uma curva; o parâmetro t serve como marca para se identificar as diferentes curvas da congruência.

Consideraremos uma congruência de curvas $\gamma(s, t)$, onde s é um parâmetro afim ao longo das curvas, e tal que num sistema de coordenadas local $\{x^\alpha\}$, a congruência tenha por coordenadas $x^\alpha(s, t)$. Tomaremos o parâmetro s como sendo o comprimento ao longo das curvas da congruência, de modo que o vetor tangente $v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ tem módulo unitário, pois $g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 1$. Posto isto, considere dois pontos vizinhos P e Q tais que $P(s_0, t_0) \in \gamma(s, t_0)$ e $Q(s_0, t_0 + \Delta t) \in \gamma(s, t_0 + \Delta t)$. O vetor que conecta P e Q , que denominaremos de "vetor conexão", tem por componentes

$$Z^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \Big|_{\substack{s=s_0 \\ t=t_0}} \Delta t \quad (2.4.1)$$

e está associado à distância (topológica) entre P e Q. A distância (no sentido físico) entre os pontos P e Q é a projeção do vetor conexão z^α no referencial da partícula que tem por linha de universo a curva $\gamma(s, t_0)$, isto é, $\perp z^\alpha = h^\alpha_\beta z^\beta$. Chamaremos $\perp z^\alpha$ de vetor posição relativa.

A velocidade relativa entre P e Q será dada pela variação da posição relativa $\perp z^\alpha$, ou seja

$$\begin{aligned} \perp \frac{D}{Ds} \perp z^\alpha &= h^\alpha_\beta (h^\beta_\gamma z^\gamma)_{||\delta} v^\delta = \\ &= h^\alpha_\beta h^\beta_{\gamma||\delta} v^\delta z^\gamma + h^\alpha_\gamma z^\gamma_{||\delta} v^\delta \end{aligned}$$

Mas, podemos escrever as parcelas do 2º membro da equação acima como:

$$h^\alpha_\beta h^\beta_{\gamma||\delta} v^\delta v^\gamma = - \dot{v}^\alpha v_\beta z^\beta$$

onde $\dot{v}^\alpha = v^\alpha_{||\delta} v^\delta \equiv \frac{Dv^\alpha}{Ds}$,

e $h^\alpha_\gamma z^\gamma_{||\delta} v^\delta = h^\alpha_\beta v^\beta_{||\gamma} z^\gamma$

onde usamos o fato^(*) que $z^\alpha_{||\beta} v^\beta = v^\alpha_{||\beta} z^\beta$

Desta forma teremos

$$\perp \frac{D}{Ds} \perp z^\alpha = (h^\alpha_\beta v^\beta_{||\gamma} - v^\alpha_{||\beta} v^\beta_{||\gamma}) z^\gamma =$$

(*) Isto se deve ao fato que $\mathcal{L} z = 0$ e ao fato de que a conexão é simétrica. Veja referências (5) e (7).

$$= \left[h_{\beta}^{\alpha} V_{||\gamma}^{\beta} - (\delta_{\beta}^{\alpha} - V^{\alpha} V_{\beta}) V_{||\delta}^{\beta} V^{\delta} V_{\gamma} \right] z^{\gamma} =$$

$$= h_{\beta}^{\alpha} h_{\delta}^{\gamma} V_{||\gamma}^{\beta} h_{\alpha}^{\delta} z^{\alpha}$$

Definindo

$$h_{\delta}^{\alpha} h_{\beta}^{\gamma} V_{||\gamma}^{\beta} \equiv V_{\beta}^{\alpha}$$

Teremos finalmente que

$$\perp \frac{D}{Ds} \perp z^{\alpha} = V_{\beta}^{\alpha} \perp z^{\beta} \quad (2.4.2)$$

Podemos discutir melhor esta relação separando V_{β}^{α} em suas partes simétrica e antissimétrica:

$$V_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta} \quad (2.4.3)$$

onde

$$\theta_{\alpha\beta} \equiv V_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\lambda} h_{\beta}^{\epsilon} (V_{\lambda||\epsilon} + V_{\epsilon||\lambda}) \quad (2.4.4)$$

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv V_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\lambda} h_{\beta}^{\epsilon} (V_{\lambda||\epsilon} - V_{\epsilon||\lambda}) \quad (2.4.5)$$

Ao tensor $\theta_{\alpha\beta}$ dá-se o nome de "tensor de expansão" e a $\omega_{\alpha\beta}$ chama-se "tensor de rotação". O tensor de expansão $\theta_{\alpha\beta}$ pode ainda ser decomposto em duas partes, uma das quais (chamada de "shear") possui traço nulo

$$\theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \theta$$

onde

$$\theta = \theta^\alpha{}_\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} h^\alpha{}_\alpha h^\beta{}_\beta (V_{\alpha\parallel\epsilon} + V_{\epsilon\parallel\alpha}) = V^\alpha{}_{\parallel\alpha} \quad (2.4.6)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \theta \quad (2.4.7)$$

e portanto

$$T_{\parallel} \sigma_{\alpha\beta} = \sigma^\alpha{}_\alpha = 0$$

Da definição de $\theta_{\alpha\beta}$ e $\omega_{\alpha\beta}$ verifica-se facilmente que

$$\theta_{\alpha\beta} V^\beta = 0 \quad (2.4.8)$$

$$\omega_{\alpha\beta} V^\beta = 0$$

O traço do tensor de expansão, $\theta_{\alpha\beta}$, que anotamos por θ , está associado à variação do volume do tri-espaço (5) e por esta razão é denominado de "expansão".

O tensor $\sigma_{\alpha\beta}$, que denominaremos de cisalhamento (shear em ingles), determina a distorção que ocorre no fluxo do fluido (estamos aqui pensando num fluxo de partículas em vez de pontos na variedade M_4) e que deixa o volume invariante (5).

O tensor $\omega_{\alpha\beta}$ está associado à rotação rígida sofrida pelas - linhas de fluxo do fluido (5). Podemos também representar $\omega_{\alpha\beta}$ por meio de um vetor ω^α , denominado de "vetor de rotação" e univocamente definido a partir do $\omega_{\alpha\beta}$ por

$$\omega^\alpha \equiv \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} V_\beta \omega_{\gamma\delta} \quad (2.4.9)$$

onde

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2.4.10)$$

sendo $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ o símbolo de Levi-Civita e $g = \det(g_{\alpha\beta})$.

O vetor ω^α pertence ao subespaço H e sua direção é a do eixo de rotação instântanea da matéria (5).

CAPÍTULO 3

UNIVERSO DE GÖDEL

3.1 - Introdução

Em 1949, Kurt Gödel apresentou um modelo cosmológico, solução das equações de Einstein com constante cosmológica, que constitui um poderoso estímulo à investigação de soluções exatas mais complexas das equações de campo Einsteinianas. Gödel exibiu uma solução na qual a matéria é tratada como um fluido perfeito, sem pressão, com densidade ρ constante $(T_{\mu\nu} = \rho v_{\mu} v_{\nu})$. Tal modelo cosmológico será o objeto de nosso estudo nesta parte deste trabalho, tendo em vista comparações, que faremos adiante, com um novo modelo do universo por nós encontrado.

3.2 - A Métrica de Gödel

O elemento de linha proposto por Gödel em seu artigo: "An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation", pode ser escrita como

$$ds^2 = dt^2 + 2 e^{\alpha x} dy dt + \frac{1}{2} e^{2\alpha x} dy^2 - dx^2 - dz^2 \quad (3.2.1)$$

Tal métrica pode ser escrita numa outra forma, a saber:

$$ds^2 = (dt + e^{\alpha x} dy)^2 - \frac{1}{2} e^{2\alpha x} dy^2 - dx^2 - dz^2 \quad (3.2.2)$$

Se escolhermos as 1-formas θ^A , de forma que

$$\begin{aligned}
 \theta^0 &= dt + e^{\kappa x} dy & dt &= \theta^0 - e^{\kappa x} dy \\
 \theta^1 &= dx & dx &= \theta^1 \\
 \theta^2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\kappa x} dy & dy &= \sqrt{2} e^{-\kappa x} \theta^2 \\
 \theta^3 &= dz & dz &= \theta^3
 \end{aligned}
 \tag{3.2.3}$$

podemos escrever a eq. (2), como

$$ds^2 = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2
 \tag{3.2.4}$$

ou

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B
 \tag{3.2.5}$$

onde a matriz η_{AB} é diagonal da forma

$$\eta_{AB} = \text{diag} (+1, -1, -1, -1)
 \tag{3.2.6}$$

Usando a eq. (1.5.2) $d(f\Omega) = f d\Omega + df \lrcorner \Omega$, onde f

uma zero forma e Ω uma q-forma, resulta

$$\begin{aligned}
 d\theta^0 &= \kappa \sqrt{2} \theta^1 \lrcorner \theta^2 \\
 d\theta^1 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.2.7}$$

$$d\theta^2 = \alpha \theta^1 \wedge \theta^2$$

(3.2.7)

$$d\theta^3 = 0$$

e, por inspeção, obtemos as 1-formas de rotação não nulas

$$\omega^0_1 = \omega^1_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \theta^2$$

$$\omega^0_2 = \omega^2_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \theta^1$$

(3.2.8)

$$\omega^1_2 = -\omega^2_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \theta^0 - \alpha \theta^2$$

Utilizando a Segunda Equação de Estrutura de Cartan:

$$\Omega^A_B =$$

$= d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B$, podemos encontrar as 2-formas de curvatura não nulas

$$\Omega^0_1 = -\frac{1}{2} \alpha^2 (\theta^0 \wedge \theta^1)$$

$$\Omega^0_2 = -\frac{1}{2} \alpha^2 (\theta^0 \wedge \theta^2)$$

(3.2.9)

$$\Omega^1_2 = \frac{1}{2} \alpha^2 (\theta^1 \wedge \theta^2)$$

As componentes não nulas do tensor de curvatura R^A_{BCD} podem ser obtidas diretamente com o uso da eq. (1.9.10)

$$R^0_{101} = \frac{1}{2} \alpha^2$$

$$R^0_{202} = \frac{1}{2} \alpha^2 \quad (3.2.10)$$

$$R^1_{212} = -\frac{1}{2} \alpha^2$$

Assim, a única componente não nula do tensor de Ricci, $R_{AB} =$
 $\eta^{CD} R_{CADB} = R^D_{ADB}$, é

$$R_{00} = -\alpha^2 \quad (3.2.11)$$

Portanto

$$R = R_{00} = -\alpha^2 \quad (3.2.12)$$

3.3 - Cálculo das Tetradas

Para que possamos escrever o tensor momentum-energia na base de tetradas, necessitamos calcular as tetradas $e^{(A)}$. Devido a escolha (3.2.3) extraímos diretamente os $e^{(A)}$ não nulos

$$e^{(0)}_0 = e^{(1)}_1 = e^{(3)}_3 = 1$$

$$e^{(0)}_2 = e^{\alpha x} \quad (3.3.1)$$

$$e^{(2)}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\alpha x}$$

Utilizando a propriedade $e_{\alpha}^{(\beta)} e_{(\gamma)}^{\alpha} = \delta_{\gamma}^{\beta}$, teremos

$$e_{(0)}^0 = e_{(1)}^1 = e_{(3)}^3 = 1$$

$$e_{(2)}^0 = -\sqrt{2} \tag{3.3.2}$$

$$e_{(2)}^2 = \sqrt{2} e^{-\alpha x}$$

sendo todos os outros $e_{(\alpha)}^{\alpha}$, não escritos acima, nulos.

3.4 - O Tensor Momentum-Energia

O tensor momentum-energia de um fluido perfeito, sem pressão, com densidade $\rho = \text{constante}$, proposto por Gödel, numa base de coordenadas, pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu} = \rho v_{\mu} v_{\nu} \tag{3.4.1}$$

Em coordenadas comoventes

$$T_{\mu\nu} = \rho v^{\mu} v_{\nu} = \rho \delta_0^{\mu} \delta_0^{\nu} \tag{3.4.2}$$

ou

$$T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu 0} g_{\nu 0} \tag{3.4.3}$$

que, usando a eq. (3.2.1), nos fornece para componentes não nulas de $T_{\mu\nu}$ as seguintes

$$T_{00} = \rho$$

$$T_{02} = e^{\alpha x} \rho \quad (3.4.4)$$

$$T_{22} = \rho e^{2\alpha x}$$

Projetando $T_{\mu\nu}$ na base de tetradas

$$T_{AB} = e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} T_{\alpha\beta} \quad (3.4.5)$$

com o uso das eqs. (3.3.2), resulta que a única componente não nula é

$$T_{00} = \rho \quad (3.4.6)$$

3.5 - As Equações de Einstein

O conjunto de equações de Einstein na base de tetrada

$$R_{AB} - \frac{1}{2} R g_{AB} + \Lambda g_{AB} = - T_{AB} \quad (3.5.1)$$

se reduz, dado a nossa escolha de tetrada e as eqs. (3.2.11) e (3.4.6), a

$$R_{00} - \frac{1}{2} R_{00} + \Lambda = - T_{00} = -\rho \quad (3.5.2)$$

$$\frac{1}{2} R_{00} - \Lambda = 0 \quad (3.5.3)$$

É evidente, portanto, que a métrica de Gödel é de fato solução se

$$R_{00} = -\alpha^2 = 2\Lambda \quad (3.5.4)$$

$$R_{00} = -T_{00} \quad \text{ou} \quad \alpha^2 = \rho \quad (3.5.5)$$

É importante notar que a eq. (3.5.5) expressa o fato de que a densidade ρ é sempre positiva.

Discutiremos, a seguir, algumas propriedades do Universo de Gödel. O leitor que desejar maiores detalhes poderá encontrá-los em Gödel, Kundt e Silk, referências (10), (11) e (12).

3.6 - A Expansão

O Universo de Gödel não tem expansão. Para ver isto, considere a eq. (2.4.7), ou seja

$$\theta = \nabla^\alpha_{||\alpha} = \nabla^\alpha_{|\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} \nabla^\beta \quad (3.6.1)$$

Tomando

$$\nabla^\alpha = \delta^\alpha_0 \quad (3.6.2)$$

Teremos

$$\theta = \Gamma^\alpha_{0\alpha} \quad (3.6.3)$$

Utilizando a eq. (3.2.1), podemos calcular os $\Gamma^\alpha_{0\alpha}$. Isto foi feito e

encontramos

$$\Pi_{00}^0 = \Pi_{01}^1 = \Pi_{02}^2 = \Pi_{03}^3 = 0 \quad (3.6.4)$$

conseqüentemente $\theta = 0$ o que mostra que o Universo de Gödel é desprovido de expansão.

3.7 - O Cisalhamento (Shear)

O Universo de Gödel não possui shear. Para ver isto considere as eqs. (2.4.4) e (2.4.6). A equação (2.4.6) pode ser também escrita como

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h_{(\mu}^{\alpha} h_{\nu)}^{\beta} v_{\alpha\beta} - \frac{\theta}{3} h_{\mu\nu} \quad (3.7.1)$$

Da eq. (3.2.1) podemos escrever que

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot & e^{\alpha x} & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ e^{\alpha x} & \cdot & e^{2x}/2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix} \quad (3.7.2)$$

Se chamamos de g ao determinante da matriz $g_{\mu\nu}$, teremos:

$$\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\alpha x} \quad (3.7.3)$$

A matriz inversa $g^{\mu\nu}$ será

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & 2e^{-\alpha x} & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ 2e^{-\alpha x} & \cdot & -2e^{-2\alpha x} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7.4)$$

Escolhendo

$$v^\mu = \delta_0^\mu \quad (3.7.5)$$

teremos

$$v_\mu = g_{\mu 0} = (1, 0, e^{\alpha x}, 0) \quad (3.7.6)$$

e, de acordo com a eq. (2) o projetor

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu$$

será

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -e^{2\alpha}/2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix} \quad (3.7.7)$$

A matriz mixta h_{μ}^{ν} , terá apenas os elementos não nulos seguintes

$$h_1^1 = h_2^2 = h_3^3 = 1 \quad (3.7.8)$$

Utilizando a matriz (2), a escolha (5), a definição do "shear" (1) e o fato de que $\theta = 0$, encontramos que

$$\sigma_{\mu\nu} = 0 \quad (3.7.9)$$

isto é, o universo de Gödel não possui cisalhamento.

3.8 - A Rotação

O Universo de Gödel possui rotação. Para mostrar isto, considere a eq. (2.4.5). Ela pode também ser escrita como

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h[\mu^\lambda h_{\nu}]^\alpha V_{\lambda\mu\alpha} \quad (3.8.1)$$

Como

$$V_{\lambda\mu\alpha} = g_{\lambda\epsilon} V^{\epsilon}_{\mu\alpha} = g_{\lambda\epsilon} (V^{\epsilon}_{\mu\alpha} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\epsilon} V^{\sigma})$$

para a escolha (3.7.5), teremos

$$V_{\lambda\mu\alpha} = g_{\lambda\epsilon} \Gamma_{\alpha 0}^{\epsilon} = \frac{1}{2} g_{\lambda\epsilon} g^{\epsilon\delta} (g_{\alpha\delta 10} + g_{0\delta 1\alpha} - g_{0\alpha 1\delta})$$

e portanto

$$V_{\lambda\mu\alpha} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\lambda 10} + g_{0\lambda 1\alpha} - g_{0\alpha 1\lambda}) \quad (3.8.2)$$

Tendo-se em conta a matriz (3.7.7) e usando as eqs. (3.8.1) e (3.8.2), encontramos que a única componente não nula do tensor de rotação é

$$\omega_{12} = -\frac{1}{2} \alpha e^{\alpha x} \quad (3.8.3)$$

Mas

$$\omega^{\alpha\beta} = g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma} \omega_{\lambda\sigma} \quad (3.8.4)$$

Desta forma

$$\omega^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \cdot & -\alpha & \cdot & \cdot \\ \alpha & \cdot & -\alpha e^{-\alpha x} & \cdot \\ \cdot & \alpha e^{-\alpha x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad (3.8.5)$$

O vetor de rotação ω_μ é, de acordo com a eq. (2.4.6) dado por

$$\omega_\mu = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\rho\mu} \omega^{\alpha\beta} v^\rho \quad (3.8.6)$$

onde

$$\eta_{\alpha\beta\rho\mu} = \sqrt{-g} \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu} \quad (3.8.7)$$

sendo $\epsilon_{\alpha\beta\rho\mu}$ o símbolo de Levi-Civita, totalmente antissimétrico.

Usando as eqs. (3.7.3), (3.7.5), (5), (6) e (7) encontramos que a única componente, não nula, do vetor de rotação ω^α é

$$\omega_3 = -\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \quad (3.8.8)$$

Portanto

$$\omega_\alpha = \left(0, 0, 0, -\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \right) \quad (3.8.9)$$

ou

$$\omega^\alpha = \left(0, 0, 0, -\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \right) \quad (3.8.10)$$

o que mostra que o Universo de Gödel possui rotação. É importante observar que para a escolha de tetrada feita por nós anteriormente, o vetor de rotação ω^A pode ser escrito também como

$$\omega^A = \left(0, 0, 0, -\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \right) \quad (3.8.11)$$

isto se deve ao fato que o único vetor $e_\alpha^{(A)}$, com $\alpha = 3$, não nulo é o $e_3^{(3)} = 1$.

3.9 - Isometrias da Métrica de Gödel

Uma transformação infinitesimal do tipo

$$x^\alpha \longrightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \epsilon \xi^\alpha(x) \quad (3.9.1)$$

é, por definição, uma "isometria" se

$$\int_{\vec{\xi}(P)} g_{\mu\nu}(x) = 0 \quad (3.9.2)$$

a equação acima pode ser escrita

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}(P)} g_{\mu\nu}^{(x)} \equiv \xi_{\mu||\nu} + \xi_{\nu||\mu} = 0 \quad (3.9.3)$$

A palavra isometria provem do fato sob uma transformação do tipo (1) tal que (3) é satisfeita, o elemento infinitesimal $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ (métrica ds^2) permanece inalterado.

Os \mathfrak{p} -vetores que satisfazem independentemente a eq. (3) são chamados vetores de Killing e as transformações construídas com estes vetores geram um grupo (grupo de simetria da métrica $g_{\mu\nu}^{(x)}$). Assim, de terminar as isometrias da métrica $g_{\mu\nu}$, corresponde a determinar todas as soluções linearmente independentes das equações de Killing

$$\xi_{\alpha||\beta} + \xi_{\beta||\alpha} = 0 \quad (3.9.3)$$

Por simplicidade de cálculo trabalharemos numa base de tetradas. Para isto necessitamos escrever a eq. (4) noutra forma. Faremos isto agora. "Multiplicando" tal equação por $e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta$ teremos

$$e_{(B)}^\beta e_{(A)}^\alpha \xi_{\alpha||\beta} + e_{(B)}^\beta e_{(A)}^\alpha \xi_{\beta||\alpha} = 0 \quad (3.9.4)$$

O primeiro termo desta equação pode ser escrito noutra forma

$$\begin{aligned} e_{(B)}^\beta e_{(A)}^\alpha \xi_{\alpha||\beta} &= (e_{(A)}^\alpha \xi_\alpha)_{||\beta} e_{(B)}^\beta - e_{(A)||\beta}^\alpha e_{(B)}^\beta \xi_\alpha = \\ &= (e_{(A)}^\alpha \xi_\alpha)_{|\beta} e_{(B)}^\beta - e_{\alpha(A)||\beta} e_{(B)}^\beta \xi^\alpha = \end{aligned}$$

$$= (e_{(A)}^\alpha \xi_\alpha)_{|\beta} e_{(B)}^\beta - e_{\alpha(A) || \beta} e_{(B)}^\beta e_{(C)}^\alpha \xi^C$$

Usando a eq. (1.8.8), teremos

$$e_{(B)}^\beta e_{(A)}^\alpha \xi_{\alpha || \beta} = \partial_B \xi_A + \gamma_{ACB} \xi^C \quad (3.9.5)$$

onde

$$\partial_B \xi_A = e_{(B)}^\beta \frac{\partial \xi_A}{\partial x^\beta}$$

Procedendo de maneira inteiramente análoga o segundo termo da eq. (4) pode ser escrito como

$$e_{(B)}^\beta e_{(A)}^\alpha \xi_{\beta || \alpha} = \partial_A \xi_B + \gamma_{BCA} \xi^C \quad (3.9.6)$$

onde

$$\partial_A \xi_B = e_{(A)}^\alpha \frac{\partial \xi_B}{\partial x^\alpha}$$

Assim, de acordo com as eqs. (4), (5) e (6) a equação de Killing pode ser escrita como

$$\partial_B \xi_A + \partial_A \xi_B + (\gamma_{ACB} + \gamma_{BCA}) \xi^C \quad (3.9.7)$$

onde

$$\partial_B \xi_A = e_{(B)}^\beta \frac{\partial \xi_A}{\partial x^\beta} \quad (3.9.8)$$

Usando a eq. $\omega^A_B = \gamma^A_{Bc} \theta^c$, podemos, a partir dos ω^A_B , ler diretamente os γ^A_{Bc} . Assim, de acordo com a eq. (3.2.8) resulta

$$\begin{aligned} \gamma^0_{12} &= \gamma^1_{02} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \\ \gamma^0_{21} &= \gamma^2_{01} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \\ \gamma^1_{20} &= -\gamma^2_{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \\ \gamma^1_{22} &= -\gamma^2_{12} = -\alpha \end{aligned} \quad (3.9.9)$$

O conjunto de equações de Killing (7) de acordo com as eqs. (9), (8) e (3.3.1) resulta ser

$$\xi_{010} = 0$$

$$\xi_{111} = 0$$

$$\xi_{313} = 0$$

$$\xi_{113} + \xi_{311} = 0$$

$$\xi_{013} + \xi_{310} = 0$$

$$\xi_{110} + \xi_{011} + \alpha\sqrt{2} \xi_2 = 0$$

$$\xi_{010} - e^{-\alpha x} \xi_{012} + \alpha \xi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{210} = 0$$

$$\xi_{110} - e^{-\alpha x} \xi_{112} - \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{211} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \xi_2 = 0$$

$$\xi_{210} - e^{-\alpha x} \xi_{212} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \xi_1 = 0$$

$$\xi_{310} - e^{-\alpha x} \xi_{312} - \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{213} = 0$$

Integrando estas equações, verificamos que a métrica (3.2.1) admite as isometrias especificadas pelo seguinte vetor de Killing

$$\begin{aligned} \xi_{(A)} = & \left[a_1 - a_2 \alpha y e^{\alpha x} + a_3 e^{\alpha x} - a_5 (e^{-\alpha x} + \frac{1}{2} \alpha^2 y e^{\alpha x}); \right. \\ & - a_2 - a_5 \alpha y ; \frac{a_2}{\sqrt{2}} \alpha y e^{\alpha x} - \frac{a_3}{\sqrt{2}} e^{\alpha x} - \frac{a_5}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} \\ & \left. + \frac{a_5}{2\sqrt{2}} \alpha^2 y^2 e^{\alpha x} ; a_4 \right] \end{aligned} \quad (3.9.11)$$

onde os a_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) são constantes reais arbitrárias.

Numa base de coordenados (3.2.1), o vetor acima, de acordo com a eq.

(3.9.11), é escrito como:

$$\begin{aligned} \xi^\alpha = & \left[a_1 - 2a_5 e^{\alpha x} ; a_2 + a_5 \alpha y ; a_3 - a_2 \alpha y \right. \\ & \left. + a_5 (e^{-2\alpha x} - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2) ; a_4 \right] \end{aligned} \quad (3.9.12)$$

Utilizando a base local natural $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\}$, podemos expressar os geradores das transformações de isometria (11) como

$$X_{(i)} = \xi_{(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{3.9.13}$$

onde $\xi_{(i)}^\alpha$ são vetores independentes contidos em (12), associados a ca da parâmetro independente a_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) . Temos:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial y}$$

(3.9.14)

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$X_5 = -2 e^{\alpha x} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha y \frac{\partial}{\partial x} - \left(e^{-2\alpha x} - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2 \right) \frac{\partial}{\partial y}$$

Minha voz ficou na espreita, na espera.
Quem dera abrir meu peito, cantar feliz.
Preparei para você uma lua cheia
E você não veio e você não quis.
Meu violão ficou tão triste, pudera!
Quisera abrir janelas, fazer serão.
Mas você me navegou mares tão diversos
E eu fiquei sem versos e eu fiquei em vão ...

"Lua Cheia", Chico Buarque de Holanda.

CAPÍTULO 4

UNIVERSO FORA DO EQUILÍBRIO TÉRMICO

Neste capítulo^(*), apresentamos uma solução cosmológica exata das equações de Einstein que tem expansão, shear e rotação. A fonte de nossa geometria é um fluido fora do equilíbrio. Nosso modelo, tende assintoticamente ao universo de Gödel, podendo ser interpretado então como sendo um estágio anterior ao cosmo de Gödel. No final do capítulo discutimos alguns resultados relativos à estabilidade de universos com rotação, analisando, em particular, aspectos do trabalho de Silk (12).

4.1 - O Tensor Momentum Energia

A grande maioria dos modelos cosmológicos estudados até nossos dias, tratam o conteúdo material do universo como um fluido perfeito de densidade ρ e pressão p . No entanto, um grande número de soluções cosmológicas das equações de Einstein possuem, pelo menos uma singularidade, isto é, um momento da história do universo em que a curvatura do espaço-tempo e a densidade de matéria se tornam infinitos. No estudo do universo em sua fase primeira (próximo a singularidade), tem-se feito algumas tentativas mais realísticas de modo a incorporar ao tensor momentum energia os efeitos da viscosidade do fluido galático (13,15). Expressões emprestadas da mecânica

(*) Esta parte da Tese foi enviada para publicação no *Astrophysical Journal*.

dos fluidos como, por exemplo, $p' = p + B V^\alpha_{;\alpha}$, que adiciona à pressão p um termo proporcional a expansão através de um coeficiente de viscosidade B , têm sido (15) propostas. Relações ad hoc inspiradas na fluidodinâmica ($\pi_{\mu\nu} = \lambda \sigma_{\mu\nu}$) foram usadas por Misner (14) na descrição de um gas de neutrinos em certos modelos cosmológicos. Neste trabalho, em vez de assumirmos relações ad hoc desta forma, tentamos um novo caminho que explicaremos a seguir.

Seja V^α a velocidade do conteúdo material do universo. Trabalharemos num sistema de coordenadas comovendo-se com ele, isto é, escolheremos $V^\alpha = \delta^\alpha_0$. Consideraremos o tensor momentum energia de um fluido fora do equilíbrio, isto é, de um fluido em que o equilíbrio térmico não foi atingido, havendo, desta forma, fluxo de calor q^α entre suas partes

$$T_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta - p h_{\alpha\beta} + q(\alpha V_\beta) \quad (4.1.1)$$

onde $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta$. A quantidade q^α obedece a condição

$$q^\alpha V_\alpha = 0 \quad (4.1.2)$$

O fluido galático tem em geral, shear expansão, aceleração $\dot{V}^\alpha = V^\alpha_{;\mu} V^\mu$ e rotação (veja eqs. (2.4.7) e (2.4.9)). Com os vetores V^α , \dot{V}^α e ω^α construímos o vetor

$$\eta^\alpha = \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \dot{V}_\beta \omega_\mu V_\nu \quad (4.1.3)$$

onde $\eta^{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$, sendo $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ o símbolo de Levi-Civita. O vetor η^α assim construído é evidentemente, ortogonal a V^α , \dot{V}^α e ω^α . Assim, os vetores η^α , \dot{V}^α e

ω^α constituem uma base para o subespaço H ortogonal a V^α (veja capítulo 2). Chamaremos esta base de Base Cinemática (base-C). Devido a propriedade (2), podemos expandir o fluxo de calor q^α na base-C, e teremos:

$$q^\alpha = \eta \dot{v}^\alpha + \psi \omega^\alpha + \varphi \eta^\alpha_{\mu\nu\lambda} \dot{v}^\mu \omega^\nu V^\lambda \quad (4.1.4)$$

onde η , ψ e φ são funções escalares arbitrárias. Tal decomposição tem a vantagem de não assumir relações fenomenológicas a priori (permitindo-nos impor condições adicionais sobre q^α) e de ser inteiramente geral, desde que \dot{v}^α e ω^α não sejam paralelos.

Tentaremos explorar esta decomposição e apresentaremos um modelo cosmológico fora do equilíbrio. Com a decomposição (4) nosso tensor momentum energia é escrito como

$$T_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta - p h_{\alpha\beta} + q(\alpha V_\beta) \quad (4.1.5)$$

onde

$$q^\alpha = \eta \dot{v}^\alpha + \psi \omega^\alpha + \varphi \eta^\alpha_{\mu\nu\lambda} \dot{v}^\mu \omega^\nu V^\lambda \quad (4.1.6)$$

4.2 - A Geometria

Em 1949 K. Gödel apresentou um modelo cosmológico, solução das equações de Einstein com termo cosmológico, em que a congruência de geodésicas δ_0^α , não possui expansão, aceleração e shear, mas apresenta uma rotação ω^α constante (veja capítulo 3) relativa ao compasso de inércia. Depois da publicação deste trabalho, diversas tentativas têm sido feitas na busca de uma solução mais geral das equações Einsteinianas que, além da rotação, apresente expansão, aceleração e shear. Um importante passo esperado pela cosmologia em seu estágio atual

é a obtenção de um modelo cosmológico que apresente todos os parâmetros cinemáticos (expansão, shear, etc.) e que tenha como futuro o Universo de Friedmann. Tal modelo se ajustará razoavelmente bem aos dados observacionais que dispomos — já que tende a Friedmann — e nos trará, assim esperamos, uma gama considerável de informações sobre a história passada do universo, sobre o universo em sua fase primeira.

Apesar de não dispormos de forte suporte observacional, existe uma expectativa de que o fluido galático em sua fase primeira, apresente aspectos bastante gerais tais como efeitos de viscosidade, condução térmica, aceleração, shear, expansão, rotação, etc. O tensor momentum-energia proposto na seção anterior é, de certa forma, uma tentativa nesta linha de raciocínio. Para que seja possível a construção da base cinemática, nossa geometria deverá apresentar expansão, aceleração e rotação. Propomos a geometria descrita por

$$ds^2 = dt^2 + 2A(x,t) dy dt - B(x,t) dy^2 - F^2(t) dx^2 - H^2(t) dz^2 \quad (4.2.1)$$

Desta forma podemos extrair

$$g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot & A & \cdot \\ \cdot & -F^2 & \cdot & \cdot \\ A & \cdot & -B & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -H^2 \end{vmatrix} \quad (4.2.2)$$

denotando o determinante de $g_{\alpha\beta}$ por \mathcal{G} , teremos

$$g = -F^2 H^2 (A^2 + B) \quad (4.2.3)$$

Com o uso da eq. (4.2.3) podemos calcular a matriz inversa $g^{\alpha\beta}$ da matriz (4.2.2). Encontramos:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} B/\Delta & \cdot & A/\Delta & \cdot \\ \cdot & -1/F^2 & \cdot & \cdot \\ A/\Delta & \cdot & -1/\Delta & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1/H^2 \end{vmatrix} \quad (4.2.4)$$

onde $\Delta = A^2 + B$. Veremos agora que a geometria (4.2.1) apresenta aceleração, expansão, rotação e shear. Na verdade, ao propormos de saída a métrica da forma (4.2.1) já esperávamos que, a congruência de geodésicas $v^\alpha = \delta_0^\alpha$ da geometria resultante apresentasse todos os parâmetros cinemáticos. Foi esta nossa motivação inicial.

- A Aceleração

Representaremos por v^α a velocidade do conteúdo material do nosso universo e escolheremos um sistema de coordenadas comovendo-se com ele. Isto é, escolheremos

$$v^\alpha = \delta_0^\alpha \quad (4.2.5)$$

Desta forma

$$v^\alpha = g^\alpha_0 = (1, 0, A, 0) \quad (4.2.6)$$

onde usamos a eq. (4.2.2).

Devido a escolha (4.2.5), a aceleração $\dot{v}^\alpha = v^\alpha_{;\lambda} v^\lambda$, será dada por

$$\dot{v}^\alpha = T^\alpha_{00} \quad (4.2.7)$$

Utilizando as eqs. (4.2.2) e (4.2.4), calculamos as conexões Γ_{00}^{α} , e encontramos

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{A\dot{A}}{\Delta} \quad \Gamma_{00}^2 = -\frac{\dot{A}}{\Delta}$$

$$\Gamma_{00}^1 = \Gamma_{00}^3 = 0$$

Assim, a aceleração será dada por

$$\dot{v}^{\alpha} = \left(\frac{A\dot{A}}{\Delta}, 0, -\frac{\dot{A}}{\Delta}, 0 \right) \quad (4.2.8)$$

- A Expansão

No sistema de coordenadas escolhido (eq. (4.2.5)) a expansão $\theta = v^{\alpha}{}_{||\alpha}$, será escrita na forma

$$\theta = \Gamma_{0\alpha}^{\alpha} \quad (4.2.9)$$

Calculamos as conexões e obtivemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^1 &= \dot{F}/F & \Gamma_{02}^2 &= \dot{B}/2\Delta \\ \Gamma_{03}^3 &= \dot{H}/H & \Gamma_{00}^0 &= A\dot{A}/\Delta \end{aligned}$$

Assim, a expansão será

$$\theta = \frac{\dot{F}}{F} + \frac{\dot{H}}{H} + \frac{A\dot{A}}{\Delta} + \frac{\dot{B}}{2\Delta} \quad (4.2.10)$$

- A Rotação

A presença do termo cruzado na métrica (4.2.1) já nos indicava a existência da rotação que calcularemos agora explicitamente.

A partir da matriz (4.2.2) podemos construir o projetor $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - v_{\alpha}v_{\beta}$. Encontramos

$$h_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -F^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\Delta & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -H^2 \end{vmatrix} \quad (4.2.11)$$

ou

$$h_{\alpha\beta} = \text{diag} (0, -F^2, -\Delta, -H^2) \quad (4.2.12)$$

O tensor de rotação $\omega_{\mu\nu} = h_{\mu}^{\lambda} h_{\nu}^{\kappa} V_{[\lambda\mu\alpha]}$ terá como componente não nula a seguinte

$$\omega_{12} = -A'/2 \quad (4.2.13)$$

Assim, o vetor de rotação $\omega_{\mu} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\sigma\rho} \omega^{\nu\sigma} v^{\rho}$ terá componentes dadas por

$$\omega^{\alpha} = (0, 0, 0, \Omega) \quad (4.2.14)$$

onde

$$\Omega = \frac{A'}{2FH\sqrt{\Delta}}$$

- O Shear

Utilizando as eqs. (4.2.12) e (4.2.6), podemos calcular o shear $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h_{\mu}^{\lambda} h_{\nu}^{\kappa} V_{[\lambda\mu\alpha]} - \frac{\theta}{3} h_{\mu\nu}$. Suas componentes diferentes de zero são

$$\begin{aligned} \sigma_1^1 &= \frac{\dot{F}}{F} - \frac{\theta}{3} \\ \sigma_2^2 &= \frac{\dot{B}}{2\Delta} + \frac{A\dot{A}}{\Delta} - \frac{\theta}{3} \\ \sigma_3^3 &= \frac{\dot{H}}{H} - \frac{\theta}{3} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Desta forma, conforme mencionamos anteriormente, a métrica (4.2.1) apresenta aceleração, rotação, expansão e shear, pretando-se por conseguinte, a uma decomposição do tipo da eq. (4.1.4).

4.3 - As Curvaturas

Escolhendo as 1-formas θ^A de forma que

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt + A dy & dt &= \theta^0 - A \Delta^{-1/2} \theta^2 \\ \theta^1 &= F dx & dx &= F^{-1} \theta^1 \\ \theta^2 &= \sqrt{\Delta} dy & dy &= \Delta^{-1/2} \theta^2 \\ \theta^3 &= H dz & dz &= H^{-1} \theta^3 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

onde $\Delta = A^2 + B$. Podemos escrever a eq. (4.2.1) como

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad (4.3.2)$$

onde

$$\eta_{AB} = \text{diag} (+1, -1, -1, -1) \quad (4.3.3)$$

Das eqs. (4.3.1), resulta

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= \frac{\dot{A}}{\sqrt{\Delta}} \theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{A'}{F\sqrt{\Delta'}} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^1 &= \frac{\dot{F}}{F} \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{A}{\sqrt{\Delta}} \frac{\dot{F}}{F} \theta^2 \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 &= \frac{\dot{\Delta}}{2\Delta} \theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{1}{2F} \frac{\Delta'}{\Delta} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 &= \frac{\dot{H}}{H} \theta^0 \wedge \theta^3 - \frac{A}{\sqrt{\Delta'}} \frac{\dot{H}}{H} \theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

onde o ponto (\cdot) denota derivada com relação a t e a linha ($'$) derivada com relação a x.

Por inspeção obtemos

$$\begin{aligned} \omega^0_1 &= \frac{\dot{F}}{F} \theta^1 + \frac{1}{2F} \frac{A'}{\sqrt{\Delta}} \theta^2 \\ \omega^0_2 &= -\frac{\dot{A}}{\sqrt{\Delta}} \theta^0 + \frac{1}{2} \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \theta^2 - \frac{1}{2F} \frac{A'}{\sqrt{\Delta}} \theta^1 \\ \omega^0_3 &= \frac{\dot{H}}{H} \theta^3 \\ \omega^1_2 &= \frac{1}{2F} \frac{A'}{\sqrt{\Delta}} \theta^0 - \frac{A}{\sqrt{\Delta}} \frac{\dot{F}}{F} \theta^1 - \frac{1}{2F} \frac{\Delta'}{\Delta} \theta^2 \\ \omega^2_3 &= \frac{\dot{H}}{H} \frac{A}{\sqrt{\Delta}} \theta^3 \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

onde os ω^A_B não anotados são nulos e a simetria $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$ é satisfeita.

A partir dos valores encontrados em (4.3.5) calculamos as 2-formas de curvatura Ω^A_B e, com o uso da eq.(1.9.10) encontramos os R^A_{Bcd} não nulos:

$$\begin{aligned} R^0_{101} &= \frac{1}{4} \frac{A'^2}{F^2\Delta} + \frac{A\dot{A}}{\Delta} \frac{\dot{F}}{F} - \frac{\ddot{F}}{F} \\ R^0_{102} &= \frac{1}{2} \frac{\Delta'}{\Delta^{3/2}} \frac{\dot{A}}{F} - \frac{1}{2} \left(\frac{A'}{F\sqrt{\Delta}} \right)' - \frac{1}{2} \frac{\dot{\Delta}}{\Delta^{3/2}} \frac{A'}{F} \\ R^0_{112} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{\Delta}}{\Delta^{3/2}} \frac{A\dot{F}}{F} - \frac{1}{2F^2} \left(\frac{A'}{\sqrt{\Delta}} \right)' - \frac{A}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{\dot{F}}{F} \right)' - \frac{A}{\sqrt{\Delta}} \frac{\dot{F}^2}{F^2} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

$$R^0_{202} = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\Delta}}{\Delta} + \frac{1}{4} \frac{\dot{\Delta}^2}{\Delta^2} + \frac{A}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{\dot{A}}{\sqrt{\Delta}} \right)' + \frac{\dot{A}^2}{\Delta} + \frac{1}{4} \frac{A'^2}{F^2 \Delta}$$

$$R^0_{212} = -\frac{3}{2F} \left(\frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \right)' - \frac{1}{4F} \frac{\dot{\Delta} \Delta'}{\Delta^2} + \frac{1}{F} \frac{\dot{A} A'}{\Delta} + \frac{1}{2} \frac{\dot{F}}{F^2} \frac{\Delta'}{\Delta} + \frac{1}{2} \frac{A}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{A'}{F \sqrt{\Delta}} \right)'$$

$$R^0_{303} = -\frac{\ddot{H}}{H} + \frac{\dot{H}}{H} \frac{A \dot{A}}{\Delta}$$

$$R^0_{313} = \frac{1}{2} \frac{\dot{H}}{H} \frac{A A'}{F \Delta}$$

$$R^0_{323} = \frac{A}{\sqrt{\Delta}} \frac{\ddot{H}}{H} - \frac{1}{2} \frac{\dot{H}}{H} \frac{A \dot{\Delta}}{\Delta^{3/2}} \quad (4.3.6)$$

$$R^1_{212} = \frac{1}{2F^2} \left(\frac{\Delta'}{\Delta} \right)' + \frac{1}{4F^2} \frac{\Delta'^2}{\Delta^2} - \frac{3}{4} \frac{A'^2}{F^2 \Delta} - \frac{1}{2} \frac{\dot{F}}{F} \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} + \frac{A}{\Delta} \frac{\ddot{F}}{F} + \frac{\dot{F}}{F} \frac{A}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{A}{\sqrt{\Delta}} \right)'$$

$$R^1_{313} = -\frac{\dot{F}}{F} \frac{\dot{H}}{H} + \frac{A^2}{\Delta} \frac{\dot{F}}{F} \frac{\dot{H}}{H}$$

$$R^1_{323} = -\frac{1}{2} \frac{A'}{F \sqrt{\Delta}} \frac{\dot{H}}{H} + \frac{1}{2} \frac{\Delta'}{\Delta^{3/2}} \frac{A}{F} \frac{\dot{H}}{H}$$

$$R^2_{323} = \frac{A}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{\dot{H}}{H} \frac{A}{\sqrt{\Delta}} \right)' + \frac{A^2}{\Delta} \left(\frac{\dot{H}}{H} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\dot{\Delta}}{\Delta}$$

A escolha (1) das 1-formas θ^A é equivalente a tomarmos uma classe de observadores localmente estacionários representados pelos vetores de base $e_{\alpha}^{(A)}$ ((A) = índice de tetrada; α = índice de coordenada), dados por

$$\begin{aligned} e_0^{(0)} &= 1 & e_2^{(0)} &= A \\ e_1^{(1)} &= F & e_2^{(2)} &= \sqrt{\Delta} \\ e_3^{(3)} &= H \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

ou, de acordo com a eq. (1.7.13):

$$\begin{aligned} e_{(0)}^0 &= 1 & e_{(1)}^1 &= 1/F \\ e_{(2)}^0 &= -A/\sqrt{\Delta} & e_{(2)}^2 &= 1/\sqrt{\Delta} \\ e_{(3)}^3 &= 1/H \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Devemos lembrar o fato que as curvaturas dadas pela eq. (4.3.6) são referidas a base local caracterizada pela eq. (4.3.7).

4.4 - Componentes do Tensor Momentum Energia na Base de Tetrada

Com o uso da eq. (4.3.6) podemos calcular a componente R_{03} do tensor de Ricci $R_{AB} = R^C_{ACB}$, e encontramos

$$R_{03} = 0 \quad (4.4.1)$$

Tal condição (eq. (4.4.1)) nos obriga a tomar o fluxo de calor q^{α} no plano perpendicular à rotação ω^{α} . Tal fato nos impõe, de outra forma, que a função ψ da decomposição (4.1.4) é nula. Assim, as componentes covariantes q_{α} na base cinemática são dadas por

$$q_{\alpha} = \left(0, \frac{\psi}{2} \frac{\dot{A} A'}{\Delta}, \eta \dot{A}, 0 \right) \quad (4.4.2)$$

onde usamos as eqs. (4.2.3), (4.2.8), (4.2.14), (4.2.6), (4.1.16) e que

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\lambda} = \sqrt{-g} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}$$

sendo $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}$ o símbolo de Levi-Civita.

Com o uso das eqs. (4.1.15) e (4.1.16) calculamos as componentes não nulas do tensor momentum energia no sistema comovente e encontramos

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho & T_{01} &= \varphi \frac{\dot{A}A'}{2\Delta} \\ T_{02} &= \rho A + \eta \dot{A} & & \\ T_{11} &= \beta F^2 & T_{33} &= \beta H^2 \\ T_{22} &= \rho A^2 + \beta \Delta + 2\eta A\dot{A} \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Na base local caracterizados pelos vetores $e_{\alpha}^{(A)}$ da da eq. (4.3.7), tais componentes tornam-se:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho & T_{01} &= \varphi \frac{\dot{A}A'}{2F\Delta} \\ T_{02} &= \eta \frac{\dot{A}}{\sqrt{\Delta}} & T_{11} = T_{22} = T_{33} &= \beta \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

4.5 - As Equações de Einstein

Devido ao fato de $T_{12} = 0$, a primeira das equações de Einstein é

$$R_{12} = 0 \quad (4.5.1)$$

De acordo com a eq. (4.3.6), teremos a seguinte equação diferencial correspondente a $R_{12} = 0$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{H}{F} A' (A^2 + B)^{1/2} \right] - \frac{(B' + 2AA')}{\sqrt{A^2 + B}} \frac{1}{F} \frac{d}{dt} (AH) = 0 \quad (4.5.2)$$

Se tomarmos

$$B = (m-1)A^2 \quad (4.5.3)$$

$$m = \text{constante.}$$

a eq. (4.5.2) se reduz a

$$\frac{A'}{A} = \frac{1}{m^*} HF \quad (4.5.4)$$

onde m^* é uma constante.

Uma propriedade notável da geometria (4.2.1) é que a condição de proporcionalidade (4.5.3) garante-nos que a função $A(x, t)$ seja separável. Chamaremos de Universo Tipo Gödel a qualquer geometria da forma (4.2.1) em que a condição (4.5.3) é satisfeita. A motivação para este nome reside no fato de que no Universo de Gödel tais condições são preenchidas.

Escrevendo $A(x, t)$ na forma

$$A(x, t) = A_1(x) A_2(t) \quad (4.5.5)$$

a eq. (4.5.4) pode ser integrada de maneira imediata e obtemos

$$A(x, t) = A_0 e^{cx} A_2(t) \quad (4.5.6)$$

onde A_0 e c são constantes arbitrárias. Além disto obtemos também da eq. (4.5.4) que o produto $H.F$ é constante

$$HF = cm^*$$

Tendo em conta a eq. (4.3.6) e usando a eq. (4.5.3), calculamos as componentes restantes, não nulas, do tensor de Ricci R_{AB} , e encontramos:

$$\begin{aligned} R_{01} &= c \left(\frac{m-1}{m} \right) \frac{1}{F} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{F}}{F} \right) \\ R_{02} &= - \frac{2}{\sqrt{m}} \frac{\dot{F}^2}{F^2} \\ R_{11} &= \frac{m-1}{m} \left[\frac{\dot{F}^2}{F^2} - \frac{\ddot{F}}{F} - \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{F}}{F} \right] + \frac{2m-1}{2m} \frac{c^2}{F^2} \\ R_{00} &= \frac{m-1}{m} \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{c^2}{2m} \frac{1}{F^2} + 2 \frac{\dot{F}^2}{F^2} \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

$$R_{22} = - \left(\frac{m-1}{m} \right) \frac{\ddot{A}}{A} + \left(\frac{1-2m}{2m} \right) \frac{c^2}{F^2} + \frac{2}{m} \frac{\dot{F}^2}{F^2}$$

$$R_{33} = \left(\frac{m-1}{m} \right) \left(\frac{\ddot{F}}{F} + \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{F}^2}{F^2} \right)$$

e o escalar de curvatura

$$R = 2 \left(\frac{m-1}{m} \right) \frac{\dot{F}^2}{F^2} + 2 \left(\frac{m-1}{m} \right) \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{1}{m} \frac{c^2}{F} \quad (4.5.8)$$

A condição $T_{11} = T_{22} = T_{33}$ nos conduz, via eqs. de Einstein que

$$R_{11} = R_{22} \quad (4.5.9)$$

$$R_{11} = R_{33} \quad (4.5.10)$$

ou equivalentemente

$$2(m-1) \left[\frac{\ddot{F}}{F} + \frac{\dot{F}}{F} \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{F}^2}{F^2} \right] - \left(\frac{2m-1}{2} \right) \frac{c^2}{F^2} = 0 \quad (4.5.11)$$

$$(m-1) \left[\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{F}^2}{F^2} - \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{F}}{F} - \frac{\ddot{F}}{F} \right] + (2m-1) \frac{c^2}{F^2} - 2 \frac{\dot{F}^2}{F^2} = 0 \quad (4.5.12)$$

Uma solução destas equações pode ser encontrada se tomarmos $F=1$. Neste caso, a constante m terá o valor $1/2$ e das equações acima resulta que

$$A_2(t) = \theta_0 t + 1 \quad (4.5.13)$$

onde θ_0 é uma constante. Desta forma as eqs. de Einstein diagonal serão:

$$p + \Lambda = c^2/2 \quad (4.5.14)$$

$$p - \Lambda = c^2/2 \quad (4.5.15)$$

É importante observar que teremos solução mesmo quando $\Lambda = 0$. Neste caso

$$p = \rho = c^2/2 \quad (4.5.16)$$

No caso em que $\Lambda \neq 0$, mas $p = 0$, teremos

$$p = c^2 = -2\Lambda \quad (4.5.17)$$

que se reduzem às relações encontradas para o universo de Gödel (veja eqs. (3.5.4) e (3.5.5)). Relembramos que o ten

o tensor momentum energia de Gödel é o de um fluido perfeito sem pressão.

No caso geral, com uma equação de estado $p = \epsilon \rho$, teremos:

$$\rho = \frac{c^2}{1 + \epsilon} \quad (4.5.18)$$

$$\Lambda = \frac{c^2}{2} \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \quad (4.5.19)$$

Finalmente, as equações de Einstein restantes, ou seja:

$$R_{01} = -T_{01} \quad (4.5.20)$$

$$R_{02} = -T_{02} \quad (4.5.21)$$

relacionam os coeficientes η e φ com a geometria fornecendo

$$\varphi = 1 \quad (4.5.22)$$

$$\eta = 0 \quad (4.5.23)$$

que completa o conjunto de equações de Einstein.

4.5 - O Universo de Gödel como Limite

De acordo com o visto na seção anterior, podemos agora calcular a quantidade total de calor dada por

$$Q = \int \rho \, dV$$

Utilizando a eq. (4.4.2), resulta

$$Q = \frac{Q_0}{(\theta_0 t + 1)^2} \quad (4.6.2)$$

onde $Q_0 = \text{constante}$.

Usando a eq. (4.2.10), teremos para a expansão

$$\theta = \frac{\theta_0}{\theta_0 t + 1} \quad (4.6.3)$$

Podemos agora reconhecer θ_0 como o valor assumido pela expansão na origem do tempo.

Finalmente, de acordo com a eq. (4.2.15) o shear

terá componentes $\sigma_1^1 = \sigma_3^3 = - \frac{\theta_0}{3(\theta_0 t + 1)}$ (4.6.4)

$$\sigma_2^2 = \frac{2}{3} \frac{\theta_0}{\theta_0 t + 1} \quad (4.6.5)$$

Observando as eqs. (4.6.2), (4.6.3), (4.6.4) e (4.6.5) podemos concluir que com o passar do tempo nosso modelo evolui para uma situação de maior equilíbrio: a troca de calor entre suas partes decresce com o tempo. A anisotropia, por sua vez, tende a desaparecer. Assintoticamente, o fluido tende ao comportamento típico de um fluido perfeito. Vemos assim que nosso modelo evolui para o Universo de Gödel (veja capítulo 3) pela eliminação de suas irregularidades.

O importante fato de nosso modelo poder ser pensado como um estágio anterior do Universo de Gödel mostra que o modelo de Gödel é estável para um dado conjunto de perturbações, na direção da rotação ω^α . Compararemos tal fato com o resultado obtido por J. Silk em seu trabalho "Local Irregularities in a Gödel Universe". Segundo ele, o modelo de K. Gödel é estável para perturbações no plano ortogonal à rotação ω^α e instável para perturbações na direção de ω^α . Contudo, Silk obteve tal resultado apenas para flutuações na densidade e pressão, ou seja, limitando as perturbações de forma a não alterar as condições de fluido perfeito. O resultado por ele obtido, contudo, não resiste a uma modificação no tipo de flutuações de modo a incluir perturbações que modifiquem o comportamento do fluido galáctico, afastando-o de um fluido perfeito, conforme acabamos de analisar.

REFERÊNCIAS

- (1) - Cohn, P.M. - "Lie Groups" - 1a. Edição, Cambridge University Press (1957), Capítulos 1 e 4.
- (2) - Cartan, H. - "Differential Forms" - 1a. Edição, Kershow (1971).
- (3) - Hawking, S.W.; Ellis, G.F.R - "The Large Scale Structure of Space-Time" - 1a. Edição, University Press (1974), Capítulo 1.
- (4) - Kobayashi, S. and Nomizu, K. - "Foundations of Differential Geometry" - 1a. Edição, John Wiley (1963), Capítulos 1 e 2.
- (5) - Ellis, G.F.R. - "Relativistic Cosmology" - Scuola Internazionale de Fisica Enrico Fermi, Academic Press (1971), Couse XLVII.
- (6) - Novello, M. - "Tópicos de Cosmologia Relativista" - Monografia - XXXIV, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (1974), Capítulo 3.
- (7) - Salim, J.M. - "Monopolos Gravitacionais" - Tese de Mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (1976), Capítulo 1 e Apêndice.
- (8) - Adler, R.; Bazin, M.; Schiffer, M. - "Introduction to General Relativity, 2a. Edição, McGraw-Hill Company (1965), Capítulo 3.
- (9) - Synge, J. L. - "Relativity: The General Theory" - 1a. Edição, North Holland Publishing Company (1960), Capítulos 1 e 2.
- (10) - Gödel, K. - "An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equation of Gravitation" - Rev. Mod. Phys., 21, (1949), 447.
- (11) - Kundt, W. - "Trägheitsbahnen in einem von Gödel angegebenen Kosmologischen Modell" - Zeitschrift für Physik, 145 (1956), 612.
- (12) - Silk, J. - "Local Irregularities in a Gödel Universe" - Astrophys. J., 143 (1966), 689.
- (13) - Murphy, G. - "Big-Bang Model Without Singularities" - Phys. Rev., D 8 (1973), 4231.
- (14) - Misner, C.W. - "The Isotropy of the Universe" - Astrophys. J., - 151 (1968), 431.
- (15) - Belinskii, V.A.; Khalatnikov, I.M. - "Influence of Viscosity on

the Character of Cosmological Evolution" - Sov. Phys. JEPT, 42
(1976), 205.

“COSMOLOGIA FORA DO EQUILÍBRIO: UNIVERSO COM ROTAÇÃO”

MARCELO JOSÉ REBOUÇAS

Tese de mestrado apresentada no Centro
Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho
Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico, fazendo parte da Banca Exa-
minadora os seguintes Professores:

Mario Novello - Presidente-CBPF

Morari Mohan Som-UFRJ

Ivano Damião Soares-CBPF

Rio de Janeiro 24 de novembro de 1977