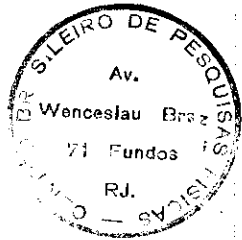


José Antonio e Souza

SISTEMAS DE EINSTEIN-KLEIN-GORDON
CDM FONTES DIFUSAS

TESE DE MESTRADO



CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

1976

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira, pela sua eficiente orientação.

- A meu pai e à minha avó paterna, pela dedicação que a mim tiveram.

- À minha esposa Maria Celia, pela paciência, compreensão e estímulo durante meus estudos.

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq por bolsas de estudo concedidas.

R E S U M O

Foi obtida uma classe de soluções aproximadas para as equações de Einstein, representando sistemas estáticos contendo dois campos escalares de curto alcance, sendo um do tipo atrativo e outro do tipo repulsivo. As fontes destes campos foram supostas difusas, esfericamente simétricas, e mantendo entre si uma razão constante. As soluções interiores obtidas para os campos escalares e suas fontes são finitas em todo o espaço e apresentam um valor extremo na origem, diminuindo de intensidade monotonicamente até a fronteira do sistema. Os campos escalares exteriores têm o comportamento característico dos campos de Yukawa. A imposição das condições usuais de continuidade para os campos escalares ocasionou uma restrição ao raio do sistema. O campo gravitacional resultante é regular em todo o espaço e tem comportamento assintótico idêntico ao da solução de Schwarzschild. Um exemplo numérico completo é apresentado.

SUMÁRIO

Folha de Rosto	I
Dedicatória	II
Agradecimentos	III
Resumo	IV
Lista de Ilustrações	VI
1. Introdução	1
2. Equações Fundamentais	7
3. Solução para os Campos Escalares	15
3.1 - Solução Interior	15
3.2 - Solução Exterior	17
3.3 - Condições de Contorno	17
4. Solução para os Potenciais Gravitacionais	21
4.1 - Solução Interior	21
4.2 - Solução Exterior	23
4.3 - Condições de Contorno	24
5. Conclusões	27
5.1 - O Sistema Físico Estudado	27
5.2 - Resenha dos Resultados Analíticos Obtidos	27
5.3 - Análise dos Resultados	28
5.4 - Estabilidade	29
5.5 - Um Exemplo Numérico	30
Referências	36

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. As fontes dos campos escalares, no limite de campos fracos, para $k_2 = 10k_1$, $\beta = 1/\sqrt{2}$ e $\sigma_1 > 0$ 33

Figura 2. Os campos escalares, no limite de campos fracos, para $k_2 = 10k_1$, $\beta = 1/\sqrt{2}$ e $\sigma_1 > 0$ 34

Figura 3. Os potenciais gravitacionais, no limite de campos fracos, para $k_2 = 10k_1$ e $\beta = 1/\sqrt{2}$ 35

SISTEMAS DE EINSTEIN-KLEIN-GORDON COM FONTES DIFUSAS

1. Introdução

Até poucos anos atrás, a maioria dos artigos encontrados na literatura admitia que a interação gravitacional era desprezível nos processos de formação de estruturas conhecidas pelo nome genérico de "partículas elementares". No entanto, já em 1935, Einstein e Rosen (1) chamavam a atenção para o fato de que não se deveria desprezar a interação gravitacional na descrição de tais estruturas. Mesmo assim, as poucas considerações relativísticas se restringiam, na maioria dos casos, ao uso da Teoria da Relatividade Especial, isto é, aceitava-se que todas as interações ocorriam num quadri-espaço de métrica pseudo-Euclidiana (espaço de Minkowski)(2).

A situação mudou, no entanto, em tempos mais recentes. Vários artigos, baseados em diferentes pontos de vista (3,4,5) parecem sugerir que a descrição da matéria em escala cosmológica possa ter grande similaridade com a descrição em escala diametralmente oposta. Usando suposições razoáveis, várias propriedades das partículas que interagem fortemente (hadrons) puderam ser deduzidas das equações de campo da Teoria da Relatividade Generalizada.

Atualmente encontramos na literatura uma expectativa de que a Relatividade Generalizada possa ajudar a elucidar problemas tais como o da "estrutura" e o do espectro de massa das partículas elementares. Para isto são procuradas soluções das equações de Einstein, para distribuições de massa e/ou energia,

sem singularidades, e que sejam compatíveis com um relativo equilíbrio do sistema, além de levar a valores fisicamente razoáveis para as quantidades características do sistema; numa primeira aproximação, tais distribuições são supostas estáticas e esfericamente simétricas.

Como é evidente que um sistema não pode ficar em equilíbrio apenas sob a influência da atração gravitacional mútua entre suas partes, algum outro mecanismo deve fornecer uma repulsão entre as partes do sistema. Na primeira solução estática, esfericamente simétrica, para espaço não vazio, das equações de Einstein, deduzida por Schwarzschild (6) em 1916, o colapso gravitacional de uma distribuição de fluido incompressível era evitado pela presença do termo de pressão no tensor energia-momentum, pressão esta cujo efeito é contrabalançar a atração gravitacional. Devemos porém nos lembrar que pressão é um conceito macroscópico, no sentido em que é suposta como o resultado médio de interações entre as partes do sistema; no modelo de um gás perfeito, por exemplo, a pressão é considerada como resultado dos choques das moléculas do gás entre si e com as paredes do recipiente que o contém. Isto implica em dizer que a pressão é causada pela energia cinética média das moléculas do gás, supostas em movimento aleatório permanente; um mecanismo algo semelhante previne o colapso gravitacional de esfera de fluido perfeito de Schwarzschild.

Agora, para que uma partícula faça jus ao adjetivo "elementar" não deve ser formada por outras partículas, ou seja, não deve possuir estrutura interna, no sentido em que, por exemplo, um gás possui estrutura molecular. Quando falamos aqui em partes da distribuição, queremos dizer uma divisão apenas

idealizada, da mesma forma que se isola um elemento de fluido incompressível na dedução da fórmula da diferença de pressão entre dois pontos do fluido. Portanto, não parece fisicamente recomendável a introdução do conceito de pressão no estudo de sistemas elementares.

Evitando esse conceito de pressão Einstein, em 1939(7), introduziu a idéia de aglomerados de partículas, com simetria esférica, em movimentos circulares de orientação aleatória em torno de um centro de simetria. Deste modo o colapso gravitacional do sistema era evitado pela inércia da matéria. A finalidade da consideração desses aglomerados foi apenas a da obtenção de certos resultados concernentes aos raios e massas dos sistemas; embora esses aglomerados dispensem um termo de pressão para a manutenção de seu equilíbrio, ainda assim apresentam a inconveniência referida no parágrafo anterior.

Outro efeito repulsivo poderia ser devido a densidades de cargas elétricas de mesmo sinal, distribuídas de tal modo que anulassem a atração gravitacional. Tais sistemas foram considerados por Bonnor (8) em 1960. O problema que aparece em tais considerações é que o equilíbrio do sistema só é possível se as densidades de carga elétrica e de massa estiverem entre si numa razão constante e universal, ou seja, se todos os sistemas deste tipo tiverem a mesma relação carga/massa. É óbvio que esta consequência não está em acordo com os dados experimentais.

Foram obtidas distribuições com razão carga/massa arbitrária por Som et al. (9) supondo que o sistema estava em equilíbrio sob a influência da interação gravitacional, da repulsão eletrostática e de um campo escalar de longo alcance, do tipo considerado por Buchdahl (10) em 1959 e Wolk et al. (11) em

1975. Entretanto, os sistemas idênticos assim obtidos se caracterizam por uma apatia mútua assintótica, ou seja, duas distribuições esféricas deste tipo não manifestam uma interação mútua global; suas interações gravitacional, eletrostática e escalar de longo alcance se cancelam mutuamente.

Conforme foi ressaltado recentemente por Teixeira et al. (12) (1975), a introdução de campos escalares de curto alcance parece mais apropriada à descrição de sistemas elementares. As soluções encontradas, para distribuições estáticas e esféricamente simétricas de matéria, são estáveis no limite de campos fracos, e as partes da distribuição são consideradas fontes primárias de gravitação e de campos escalares repulsivos de curto alcance. Parece apropriado aqui definir o que chamaremos daqui por diante de campo repulsivo e de campo atrativo. Um campo será chamada de repulsivo se duas fontes deste campo, com o mesmo sinal, se repelirem. Nesta nomenclatura o campo eletrostático, por exemplo, é repulsivo. Se, por outro lado, duas fontes do campo com o mesmo sinal se atraírem, ele será chamado de campo atrativo. Um exemplo de tal campo é o gravitacional Newtoniano.

No entanto, parece que não foi ainda explorado em toda a sua plenitude um aspecto da Relatividade Geral, o de que todos os campos podem ser considerados como fonte de gravitação, via tensor energia-momentum; então, distribuições de energia, que não contenham matéria, no sentido usual de massa de repouso, podem, no entanto, produzir campos gravitacionais com um comportamento assintótico fisicamente razoável. Bem recentemente (setembro de 1976) Souza e Teixeira (17) estudaram uma distribuição em equilíbrio estático de duas densidades de fonte. A

primeira, produzindo um campo escalar de longo alcance, atrativo, e a outra associada a um campo escalar de alcance finito, do tipo repulsivo. O campo gravitacional produzido por essa distribuição apresentou-se regular em todo o espaço, e com um comportamento assintótico do tipo Schwarzschild. Entretanto, também o campo escalar de longo alcance apresenta um potencial assintótico atrativo do tipo hiperbólico (proporcional ao inverso da distância), competindo portanto com o gravitacional. Embora tal resultado não constitua demérito total, procurou-se nesta tese estudar um sistema cujo único campo presente a longas distâncias fosse o gravitacional.

Na seção 2, obtivemos a expressão do tensor energia-momentum apropriado a uma distribuição de energia, com simetria esférica, estática, e cujas partes são fontes de campos escalar de curto alcance repulsivo e atrativo. Levando em conta a simetria, foram obtidas as equações de Einstein para o sistema. Em vista da dificuldade em obter uma solução exata para o sistema, foi feita uma aproximação de 1ª ordem, para campos fracos, tendo então as equações para os campos escalares ficado desacopladas das equações para o campo gravitacional.

Na seção 3, foram obtidas soluções para os campos escalares, regulares em todo o espaço, e com um comportamento assintótico idêntico ao de um potencial de Yukawa.

Na seção 4 foram então resolvidas as equações para o campo gravitacional. Foram obtidas soluções também regulares em todo o espaço, com um comportamento assintótico idêntico ao da solução de Schwarzschild.

Finalmente, na seção 5, foram feitas análises do sistema físico estudado, dos resultados obtidos e uma resenha das

expressões analíticas encontradas, com a identificação de um parâmetro em potências do qual as densidades e os campos foram expandidos para a obtenção das equações aproximadas para os campos escalares e o campo gravitacional.

2. Equações Fundamentais

As equações de campo de Einstein são

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} R \delta^{\mu}_{\nu} = - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu}_{\nu} , \quad (2.1)$$

onde G é a constante de gravitação Newtoniana, ou equivalente - mente

$$R^{\mu}_{\nu} = - \frac{8\pi G}{c^4} (T^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} T \delta^{\mu}_{\nu}) . \quad (2.2)$$

Para obtermos a expressão do tensor energia -momentum T^{μ}_{ν} apropriado ao sistema físico que queremos estudar vamos usar a definição (13)

$$\delta \int \mathcal{L} dx^4 = \frac{8\pi G}{c^4} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} dx^4 , \quad (2.3)$$

onde variamos os $g^{\mu\nu}$ e mantemos fixos os campos escalares.

Uma densidade Lagrangeana conveniente para um campo escalar de curto alcance é

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} (2S|_{\alpha} s|^{\alpha} - 2k^2 S^2 + 4\sigma S) , \quad (2.4)$$

onde σ é a densidade de fonte do campo escalar, e a barra simples indica derivada ordinária. Estamos designando por k o inverso do alcance do campo.

$$k = \frac{1}{\ell} \quad (2.5)$$

Inicialmente vamos verificar que a densidade Lagrangeana eq. (2.4) é satisfatória para a obtenção da equação do campo escalar, substituindo-a na equação de Euler-Lagrange

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} \right) |_{\nu} |_{\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} = 0 ; \quad (2.6)$$

como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S|_{\nu}} = 4\sqrt{-g} S|_{\nu} \quad , \quad (2.7)$$

e como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} = \sqrt{-g}(-4k^2 S + 4\sigma) \quad , \quad (2.8)$$

vem que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} S|_{\nu})|_{\nu} + k^2 S = \sigma \quad . \quad (2.9)$$

Esta é a equação para o campo escalar de curto alcance, com fonte (equação de Klein-Gordon); em notação covariante escrevemos

$$S||_{\nu} + k^2 S = \sigma \quad , \quad (2.9')$$

onde a barra dupla significa derivada covariante.

Vamos agora substituir $\mathcal{L} = \sqrt{-g} \mathcal{L}'$ dada pela eq.(2.4) na definição, eq. (2.3), do tensor energia-momentum. Como

$$\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}') = \mathcal{L}' \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}' \quad , \quad (2.10)$$

e como

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad , \quad (2.11)$$

vem, usando \mathcal{L}' para a região exterior ($\sigma = 0$), que

$$\delta(\mathcal{L}' \sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (2S|_{\alpha} S|_{\alpha} - 2k^2 S) + \sqrt{-g} (2S|_{\mu} S|_{\nu} \delta g^{\mu\nu}) \quad , \quad (2.12)$$

ou seja, que

$$\delta \mathcal{L} = \sqrt{-g} (2S|_{\mu} S|_{\nu} - S|_{\alpha} S|_{\alpha} g_{\mu\nu} + k^2 S^2 g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} \quad . \quad (2.13)$$

Entrando com este valor na definição, eq. (2.3) e tomando a variação da integral como a integral da variação, obtemos finalmente a expressão do tensor energia-momentum

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} (2S_{|\mu} S_{|\nu} - S_{|\alpha} S^{|\alpha} g_{\mu\nu} + k^2 S^2 g_{\mu\nu}) \quad , \quad (2.14)$$

cujo traço é

$$T \equiv T_{\mu}^{\mu} = \frac{c^4}{8\pi G} (-2S^{|\alpha} S_{|\alpha} + 4k^2 S^2) \quad . \quad (2.15)$$

No caso da distribuição que estamos considerando, precisamos de duas equações do tipo eq. (2.9'), uma para o campo escalar atrativo S_1 e outra para o repulsivo S_2 ; e o tensor energia-momentum vai ser a soma de duas expressões do tipo eq. (2.14), levando em conta os sinais associados aos campos repulsivo e atrativo (14). Assim, a evolução do nosso sistema é descrita por

$$R^{\mu}_{\nu} = - \frac{8\pi G}{c^4} (T^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} T \delta^{\mu}_{\nu}) \quad , \quad (2.16)$$

$$S_1^{||\nu}{}_{||\nu} + k_1^2 S_1 = - \sigma_1 \quad , \quad (2.17)$$

$$S_2^{||\nu}{}_{||\nu} + k_2^2 S_2 = \sigma_2 \quad , \quad (2.18)$$

$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} (2S_1^{|\mu} S_{1|\nu} - S_1^{|\alpha} S_{1|\alpha} \delta^{\mu}_{\nu} + k_1^2 S_1^2 \delta^{\mu}_{\nu}) - \frac{c^4}{8\pi G} (2S_2^{|\mu} S_{2|\nu} - S_2^{|\alpha} S_{2|\alpha} \delta^{\mu}_{\nu} + k_2^2 S_2^2 \delta^{\mu}_{\nu}) \quad . \quad (2.19)$$

Esta expressão de T^{μ}_{ν} não apresenta uma dependência explícita nas fontes σ_1 e σ_2 , pois usamos a densidade Lagrangeana exterior para o cálculo do tensor energia-momentum; entretan

to, quando usarmos o tensor energia-momentum interior a distribuição estaremos empregando na expressão eq. (2.19) os campos escalares interiores, que satisfazem às eqs. (2.17) e (2.18) com as respectivas fontes não nulas ($\sigma \neq 0$); para o tensor energia-momentum exterior a distribuição usaremos as eqs. (2.17) e (2.18) para calcular os campos escalares exteriores, com as respectivas fontes igualadas a zero. Assim sendo, ocorre uma dependência implícita do tensor energia-momentum interior nas fontes σ_1 e σ_2 .

Como nossa distribuição é estática e tem simetria esférica, usaremos um elemento de linha do tipo

$$(ds)^2 = e^{2\eta}(dx^0)^2 - e^{2\alpha}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2\sin^2\theta(d\phi)^2, \quad (2.20)$$

onde η e α , assim como S_1 , S_2 , σ_1 e σ_2 , são funções apenas da coordenada radial r .

As componentes do tensor R^μ_ν para a métrica, eq.(2.20) são (15)

$$R^0_0 = -e^{-2\alpha} \left[\eta'' - \eta'\alpha' + \eta'^2 + 2\eta'/r \right], \quad (2.21)$$

$$R^1_1 = -e^{-2\alpha} \left[\eta'' - \eta'\alpha' + \eta'^2 - 2\alpha'/r \right], \quad (2.22)$$

$$R^2_2 = R^3_3 = -r^{-2} \left[e^{-2\alpha}(1+r\eta' - r\alpha') - 1 \right], \quad (2.23)$$

onde as ' significam derivadas em relação a r , e onde $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$.

Levando em conta que S_1 e S_2 sō dependem da coordenada radial, obtemos das eqs. (2.14) e (2.15) as seguintes expressões para as componentes não nulas de $T^\mu_\nu - \frac{1}{2} T\delta^\mu_\nu$:

$$T^0_0 - \frac{1}{2} T = \frac{c^4}{8\pi G} \left[k_2^2 S_2^2 - k_1^2 S_1^2 \right], \quad (2.24)$$

$$T^1_1 - \frac{1}{2} T = \frac{c^4}{8\pi G} \left[2e^{-2\alpha} (S_1'^2 - S_2'^2) - k_1^2 S_1^2 + k_2^2 S_2^2 \right], \quad (2.25)$$

$$T^2_2 - \frac{1}{2} T = T^3_3 - \frac{1}{2} T = \frac{c^4}{8\pi G} \left[k_2^2 S_2^2 - k_1^2 S_1^2 \right]. \quad (2.26)$$

Para a adequação das equações dos campos escalares, eqs. (2.17) e (2.18) a métrica dada pela eq. (2.20) lembramos que

$$S^{\parallel\mu}_{\parallel\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} S_{|\mu})_{|\nu}, \quad (2.27)$$

onde g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, ou seja

$$\sqrt{-g} = R^2 \sin\theta e^{\eta+\alpha}.$$

Assim sendo, e como S_1 e S_2 são ambas funções de apenas $x^1 = r$, vem que

$$\begin{aligned} S^{\parallel\mu}_{\parallel\mu} &= \frac{e^{-\eta-\alpha}}{r^2 \sin\theta} \left[e^{\eta+\alpha} r^2 \sin\theta (-e^{-2\alpha}) S_1' \right]' = \\ &= \frac{e^{-\eta-\alpha}}{r^2} \left[e^{\eta-\alpha} r^2 S_1' \right]'. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Levando agora as componentes de $T^\mu_\nu - \frac{1}{2} T \delta^\mu_\nu$ e de R^μ_ν na eq. (2.2), e levando a eq. (2.28) nas eqs. (2.17) e (2.18) obtemos as equações de Einstein

$$-e^{-2\alpha} \left[\eta'' - \eta' \alpha' + \eta'^2 + 2\eta'/r \right] = k_1^2 S_1^2 - k_2^2 S_2^2, \quad (2.29)$$

$$-e^{-2\alpha} \left[\eta'' - \eta' \alpha' + \eta'^2 - 2\alpha'/r \right] = -2e^{-2\alpha} (S_1'^2 - S_2'^2) + k_1^2 S_1^2 - k_2^2 S_2^2, \quad (2.30)$$

$$-r^{-2} \left[e^{-2\alpha} (1 + r\eta' - r\alpha') - 1 \right] = k_1^2 S_1^2 - k_2^2 S_2^2, \quad (2.31)$$

e as equações dos campos escalares

$$\frac{e^{-\eta-\alpha}}{r^2} \left[e^{\eta-\alpha} r^2 S_1' \right]' - k_1^2 S_1 = \sigma_1 \quad , \quad (2.32)$$

$$\frac{e^{-\eta-\alpha}}{r^2} \left[e^{\eta-\alpha} r^2 S_2' \right]' - k_2^2 S_2 = -\sigma_2 \quad . \quad (2.33)$$

Como consequência das identidades de Bianchi contraídas

$$\left[R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} R \delta^\mu{}_\nu \right]_{||\mu} \equiv 0 \quad (2.34)$$

o tensor energia-momentum deve satisfazer

$$T^\mu{}_\nu_{||\mu} = 0 \quad (2.35)$$

No nosso sistema, em que S_1 e S_2 são funções de $x^1 = r$ apenas, essas quatro equações de conservação se reduzem a uma única,

$$T^1{}_{1||1} = 0 \quad . \quad (2.36)$$

Usando a eq. (2.19) obtemos então

$$S_{1||1}^{\parallel 1} S_{1||1} + k_1^2 S_1 \cdot S_{1||1} - S_{2||1}^{\parallel 1} \cdot S_{2||1} - k_2^2 S_{2||1} = 0 \quad ; \quad (2.37)$$

e partindo das eqs. (2.17) e (2.18) podemos obter para a nossa distribuição

$$S_{1||1}^{\parallel 1} = -\sigma_1 - k_1^2 S_1 \quad ,$$

$$S_{2||1}^{\parallel 1} = \sigma_2 - k_2^2 S_2 \quad ;$$

levando esses resultados à eq. (2.37) obtemos finalmente para a identidade de Bianchi contraída

$$\sigma_1 S_1' + \sigma_2 S_2' = 0 \quad , \quad (2.38)$$

jã que as derivadas covariante e ordinária de um escalar são

idênticas.

Notamos que o sistema de eqs. (2.29) a (2.33) contém cinco equações a serem satisfeitas por seis funções ($\eta, \alpha, S_1, S_2, \sigma_1, \sigma_2$). O sistema permite portanto a imposição de alguma condição adicional. Imporemos então uma homogeneidade na relação entre as densidades das fontes escalares

$$\sigma_1(r) = \beta \sigma_2(r) , \quad \beta = \text{const} . \quad (2.39)$$

Não nos foi possível obter uma solução exata do sistema de eqs. (2.29) a (2.33). Em verdade, jamais foi obtida uma solução exata das equações de Einstein envolvendo campo escalar de curto alcance. Assim sendo, vamos obter uma solução aproximada, para campos fracos, expandindo os potenciais η, α, S_1, S_2 e as densidades σ_1, σ_2 em potências inteiras de um parâmetro adimensional ϵ , que será identificado posteriormente.

Em nossa aproximação, tomaremos as grandezas escalares $\sigma_1, \sigma_2, S_1, S_2$ de ordem ϵ , e as grandezas gravitacionais η, α de ordem ϵ^2 . Como todos os termos quadráticos em η ou α , ou cruzados, são de ordem superior a ϵ^2 , é consistente com a nossa aproximação usar, em vez da eq. (2.29), a equação

$$\eta'' + 2\eta'/r = k_2^2 S_2^2 - k_1^2 S_1^2 . \quad (2.40)$$

Analogamente, as outras equações tomam a forma

$$\eta'' - 2\alpha'/r = 2(S_2'^2 - S_1'^2) + k_2^2 S_2^2 - k_1^2 S_1^2 , \quad (2.41)$$

$$-\eta'/r + \alpha'/r + 2\alpha/r^2 = k_1^2 S_1^2 - k_2^2 S_2^2 , \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{r^2} \left[r^2 S_1' \right]' - k_1^2 S_1 = \sigma_1 , \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{r^2} \left[r^2 S_2 \right]' - k_2^2 S_2 = -\sigma_2 \quad ; \quad (2.44)$$

juntam-se a essas equações a equação de equilíbrio estático , eq. (2.38) e a vinculação de homogeneidade relativa eq. (2.39). Vemos que, nesta aproximação, as equações para os potenciais S_1 e S_2 estão desacopladas dos potenciais gravitacionais; podemos então resolver inicialmente as equações para S_1 e S_2 e utilizar os resultados para obter η e α .

3. Solução para os Campos Escalares

Passamos agora à integração das equações diferenciais obtidas na secção anterior. Uma nota se faz necessária, antes de prosseguir. Tanto nesta secção 3 como na seguinte (solução para os potenciais gravitacionais) o número de constantes de integração que surgem no decorrer dos cálculos é apreciável; e como os campos escalares comparecem de forma quadrática em algumas equações de campo, nos deparamos com frequência com combinações longas de constantes de integração, combinações essas que se repetem com o correr dos cálculos, e que aconselham portanto a aposição de um símbolo. No global, apenas quatro parâmetros bastarão para caracterizar o nosso sistema: três já foram apresentados (k_1 , k_2 e β), e o quarto representará a intensidade geral do sistema (linear para as grandezas escalares, quadrática para o campo gravitacional); esta última questão será melhor considerada na secção 5.

3.1 - Solução Interior

Vamos chamar de região interior (subscrito i) a região em que as densidades de fonte σ_1 e σ_2 não se anulam. A partir das eqs. (2.38) e (2.39) obtemos para esta região

$$S'_{1i} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1} S'_{2i} = -\frac{1}{\beta} S'_{2i} ;$$

a integração é imediata e dá

$$S_{1i} = -\frac{1}{\beta} S_{2i} + C_1 , \quad C_1 = \text{const} . \quad (3.1.1)$$

Com este resultado, a eq. (2.43) se torna

$$-\frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{r^2} \left[r^2 S_{2i}' \right]' \right\} + \frac{k_1^2}{\beta} S_{2i} - k_1^2 C_1 = \sigma_1 \quad , \quad (3.1.2)$$

e usando a vinculação $\sigma_1 = \beta \sigma_2$ a eq. (2.44) fica

$$\beta \left\{ \frac{1}{r^2} \left[r^2 S_{2i}' \right]' \right\} - \beta k_2^2 S_{2i} = -\sigma_1 \quad ; \quad (3.1.3)$$

somando as eqs. (3.1.2) e (3.1.3), obtemos uma equação para S_{2i} apenas

$$\frac{a}{r^2} \left[r^2 S_{2i}' \right]'' + b S_{2i} - k_1^2 C_1 = 0 \quad , \quad (3.1.4)$$

onde

$$a = \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \quad , \quad b = \frac{k_1^2 - \beta^2 k_2^2}{\beta} \quad . \quad (3.1.5)$$

A eq. (3.1.4) pode ser escrita também

$$a = (r S_{2i}')'' + b(r S_{2i}') = k_1^2 C_1 r \quad ; \quad (3.1.6)$$

a solução, regular na origem, da homogênea associada à eq. (3.1.6) é

$$S_{2i} = \frac{A \operatorname{sen} \Lambda r}{r} \quad , \quad A = \text{const} \quad , \quad (3.1.7)$$

onde

$$\Lambda = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad ; \quad (3.1.8)$$

substituindo agora uma solução particular de forma $S_{2i} = K = \text{const}$ na eq. (3.1.6) obtemos $K = k_1^2 C_1 / b$, e assim a solução completa para S_{2i} , regular na origem, é

$$S_{2i} = \frac{A \operatorname{sen} \Lambda r}{r} + \frac{k_1^2 C_1}{b} \quad (3.1.9)$$

Usando a eq. (3.1.1), vem para o campo S_{1i} a expres -

são, também regular na origem,

$$S_{1i} = - \frac{A \operatorname{sen} Ar}{\beta r} + \left(1 - \frac{k_1^2}{\beta B}\right) C_1 \quad (3.1.10)$$

3.2 - Solução Exterior

Chamaremos de exterior (subscrito e) a região em que as densidades de fonte σ_1 e σ_2 se anulam. Nessa região, as eqs. (2.43) e (2.44) dos campos escalares ficam

$$S_{1e}'' + \frac{2}{r} S_{1e}' - k_1^2 S_{1e} = 0 \quad (3.2.1)$$

$$S_{2e}'' + \frac{2}{r} S_{2e}' - k_2^2 S_{2e} = 0 \quad (3.2.2)$$

Multiplicando a eq. (3.2.1) por r vem

$$(rS_{1e})'' - k_1^2 r S_{1e} = 0 \quad ,$$

cuja solução geral é

$$rS_{1e} = F e^{k_1 r} + D e^{-k_1 r} \quad , \quad F, D = \text{const} \quad ;$$

selecionamos a solução que não diverge no infinito,

$$S_{1e} = \frac{D e^{-k_1 r}}{r} \quad , \quad D = \text{const} \quad (3.2.3)$$

Analogamente obtemos

$$S_{2e} = \frac{C e^{-k_2 r}}{r} \quad , \quad C = \text{const} \quad (3.2.4)$$

3.3 - Condições de Contorno

Vamos agora impor a continuidade de S_1 , S_2 e suas

derivadas radiais primeiras em $R = \rho$, onde ρ é o raio da distribuição; a continuidade de S_1 ,

$$S_{1i} \Big|_{r=\rho} = S_{1e} \Big|_{r=\rho} ,$$

nos dá, comparando a eq. (3.1.10) com a eq. (3.2.3),

$$- \frac{A \operatorname{sen} \Lambda \rho}{\beta \rho} + \left(1 - \frac{k_1^2}{\beta b}\right) C_1 = \frac{D e^{-k_1 \rho}}{\rho} . \quad (3.2.5)$$

Analogamente a continuidade da derivada radial do campo S_1 ,

$$S'_{1i} \Big|_{r=\rho} = S'_{1e} \Big|_{r=\rho} ,$$

implica em que

$$- \frac{A}{\beta} \left(\frac{\Lambda \cos \Lambda \rho}{\rho} - \frac{\operatorname{sen} \Lambda \rho}{\rho^2} \right) = - D e^{-k_1 \rho} \left(\frac{k_1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) . \quad (3.2.6)$$

Eliminando D entre as eqs. (3.2.5) e (3.2.6) obtemos

$$C_1 = \frac{Ab}{\beta b - k_1^2} \left(\frac{k_1 \operatorname{sen} \Lambda \rho + \Lambda \cos \Lambda \rho}{1 + k_1 \rho} \right) . \quad (3.2.7)$$

A seguir consideramos a continuidade

$$S_{2i} \Big|_{r=\rho} = S_{2e} \Big|_{r=\rho}$$

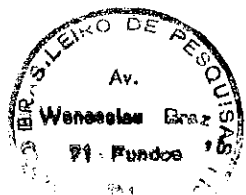
de onde tiramos, considerando as eqs. (3.1.9) e (3.2.4),

$$A \frac{\operatorname{sen} \Lambda \rho}{\rho} + \frac{k_1^2 C_1}{b} = C \frac{e^{-k_2 \rho}}{\rho} ,$$

ou seja,

$$C = e^{k_2 \rho} \left(A \operatorname{sen} \Lambda \rho + \frac{\rho k_1^2 C_1}{b} \right) . \quad (3.2.8)$$

Analogamente, dá continuidade da derivada radial de S_2 ,



$$S'_{2e} \Big|_{r=\rho} = S'_{2e} \Big|_{r=\rho} ,$$

vem que

$$A\left(\frac{\Lambda \cos \Lambda \rho}{\rho^2}\right) - A\left(\frac{\text{sen} \Lambda \rho}{\rho^2}\right) = - C e^{-k_2 \rho} \left(\frac{1+k_2 \rho}{\rho^2}\right) .$$

Substituindo nesta equação o valor de C dado pela eq. (3.2.8) e o de C_1 dado pela eq. (3.2.7), obtemos após um algebrismo trivial

$$\tan \Lambda \rho = - \Lambda \left(\frac{k_1^2 (1+k_2 \rho)}{k_2 (\beta b - k_1^2) (1+k_1 \rho)} + \frac{1}{k_1 - k_2} \right) , \quad (3.2.9)$$

que é uma restrição aos possíveis raios da distribuição, dependendo unicamente dos alcances k_1^{-1} , k_2^{-1} dos dois campos escalares e da relação β entre as densidades volumétricas de fonte (Λ e b , dados pelas eqs. (3.1.8) e (3.1.5) também dependem apenas de k_1 , k_2 e β). Devemos notar que tal restrição não ocorre em sistemas contendo apenas campos de longo alcance, no limite de campos fracos.

Agora, da eq. (3.1.3) obtemos

$$\beta S''_{2i} + \frac{2\beta}{r} S'_{2i} - \beta k_2^2 S_{2i} = - \sigma_1 ; \quad (3.2.10)$$

multiplicando a eq. (3.2.10) por r , vem

$$\beta (r S_{2i})'' - \beta k_2^2 r S_{2i} = - \sigma_1 r . \quad (3.2.11)$$

Usando a eq. (3.1.9) para S_{2i} vem

$$\beta \left(-\Lambda^2 \text{sen} \Lambda r - k_2^2 A \text{sen} \Lambda r - \frac{k_2^2 k_1^2 C_1 r}{b} \right) = - \sigma_1 r ,$$

ou seja

$$\sigma_1(r) = \beta A (\Lambda^2 + k_2^2) \frac{\text{sen} \Lambda r}{r} + \frac{k_2^2 k_1^2 \beta C_1}{b} . \quad (3.2.12)$$

E de (2.39) vem que

$$\sigma_2(r) = \frac{\sigma_1(r)}{\beta} = (\Lambda^2 + k_2^2)A \frac{\text{sen}\Lambda r}{r} + \frac{k_2^2 k_1^2 C_1}{b} . \quad (3.2.13)$$

É fácil ver que a densidade de fonte repulsiva deve ser maior que a de fonte atrativa (em módulo), do contrário a distribuição entraria em colapso. Logo, devemos ter

$$|\beta| < 1 \quad . \quad (3.2.14)$$

Como o alcance do campo atrativo deve ser maior que o do campo repulsivo, para ser possível o equilíbrio do sistema, vemos que uma troca de sinal nas densidades de fonte tornaria impossível a manutenção das condições de equilíbrio estável, pois passariam a coexistir fontes de sinais contrários de campo repulsivo (que se atrairiam) e fontes de sinais contrários de campo atrativo (que se repeliriam).

Assim, da infinidade de soluções da eq. (3.2.9), só devem ser mantidas as que satisfazem

$$0 < \Lambda \rho \leq \text{arc sen} \left(- \frac{k_2^2 k_1^2 C_1 \rho}{b(\Lambda^2 + k_2^2)A} \right) ; \quad (3.2.15)$$

essa condição impede que as densidades de fonte $\sigma_1(r)$ e $\sigma_2(r)$ dadas na eq. (3.2.13) mudem de sinal em cada sistema físico considerado.

4. Solução para os Potenciais Gravitacionais

4.1 - Solução Interior

Substituindo as eqs. (3.1.9) e (3.1.10) na eq. (2.40)

vem

$$\eta_i'' + 2\eta_i'/r = \delta^2 \frac{\text{sen}^2 \Lambda r}{r^2} + \chi \quad , \quad (4.1.1)$$

onde fizemos

$$\delta^2 = A^2 \left(\frac{k_2^2 \beta^2 - k_1^2}{\beta^2} \right) \quad , \quad (4.1.2)$$

$$\chi = - \frac{\delta^2 C_1^2 \beta^2 k_2^2 k_1^2}{b^2 A^2} \quad ;$$

multiplicando (4.1.1) por r^2 , vem

$$(r^2 \eta_i')' = \delta^2 \text{sen}^2 \Lambda r + \chi r^2 \quad ; \quad (4.1.3)$$

efetuando a primeira integração obtemos

$$\eta_i' = \delta^2 \left(\frac{1}{2r} - \frac{\text{sen} 2\Lambda r}{4\Lambda r^2} \right) + \chi \frac{r}{3} + \frac{C_2}{r^2} \quad , \quad (4.1.4)$$

onde C_2 é uma constante de integração. Um levantamento de indeterminação nos leva à conclusão de que a expressão entre parêntesis é regular na origem. Assim sendo, devemos considerar esta constante C_2 igual a zero, se quisermos obter soluções não singulares para o sistema. Para a subsequente integração da eq. (4.1.4) utilizamos o resultado

$$\int \frac{\text{sen} 2\Lambda r}{r^2} dr = - \frac{\text{sen} 2\Lambda r}{r} + 2\Lambda \int \frac{\text{cos} 2\Lambda r}{r} dr \quad , \quad (4.1.5)$$

sendo que o último termo nos leva à função integral-cosseno(16)

$$C_i(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos \mu}{\mu} d\mu \quad ;$$

obtemos então

$$\eta_i(r) = \frac{\delta^2}{2} \left[\log e^{2\Lambda r} + \frac{\text{sen} 2\Lambda r}{2\Lambda r} + C_i(2\Lambda r) + \gamma \right] + \chi \frac{r^2}{6} + C_3, \quad (4.1.6)$$

onde γ é a constante de Euler, e C_3 uma constante de integração cujo valor será obtido posteriormente. Note-se que embora tanto a função logarítmica quanto a integral-cosseno sejam singulares na origem, a soma das duas tende ao valor regular $-\gamma$ quando R tende a zero; assim sendo, a solução interior (4.1.6) é regular na origem.

Obtida a expressão de η interior, diretamente associada ao coeficiente métrico g_{00} interior, passemos à obtenção de α interior, associado ao coeficiente g_{11} interior; inicialmente tiramos o valor de η'' em (2.40) e substituímos em (2.41), obtendo

$$-\eta'/r - \alpha'/r = S_2'^2 - S_1'^2 \quad ; \quad (4.1.7)$$

somando a eq. (4.1.7) com (2.42) vem que

$$-2\eta'/r + 2\alpha/r^2 = S_2'^2 - S_1'^2 + k_1^2 S_1^2 - k_2^2 S_2^2, \quad ;$$

ou seja, que

$$\alpha(r) = \frac{r^2}{2} \left[2\eta'/r + S_2'^2 - S_1'^2 + k_1^2 S_1^2 - k_2^2 S_2^2 \right] \quad . \quad (4.1.8)$$

Usando agora a eq. (4.1.4), as expressões para os campos escalares interiores, e as expressões para suas derivadas primeiras, obtemos

$$\alpha_i(r) = \frac{\delta^2}{2} \left[\text{sen}^2 \Lambda r + \frac{\text{sen}^2 \Lambda r}{2\Lambda r} - \frac{\text{sen}^2 \Lambda r}{\Lambda^2 r^2} \right] - \chi \frac{r^2}{6} \quad . \quad (4.1.9)$$

É interessante notar que $\alpha_i(r)$ tende a zero na origem, ou seja, temos $g_{11}(0) = -1$ em uma métrica em que $g_{22} = -r^2$. Este resultado coincide com o que obtemos para a métrica interior de Schwarzschild.

4.2 - Solução Exterior

Entrando agora com as expressões para os campos escalares exteriores em (2.40) obtemos

$$\eta_e'' + 2\eta_e'/r = k_2^2 C^2 \frac{e^{-2k_2 r}}{r^2} - k_1^2 D^2 \frac{e^{-2k_1 r}}{r^2} ; \quad (4.2.1)$$

multiplicando por r^2 e integrando vem

$$\eta_e' = -\frac{k_2 C^2}{2} \frac{e^{-2k_2 r}}{r^2} + \frac{k_1 D^2}{2} \frac{e^{-2k_1 r}}{r^2} + \frac{C_5}{r^2} , \quad (4.2.2)$$

onde C_5 é uma constante de integração cujo valor será posteriormente obtido.

A subsequente integração nos dá

$$\eta_e(r) = -k_2 C^2 \left[-\frac{e^{-2k_2 r}}{2r} + k_2 E_i(2k_2 r) \right] + k_1 D^2 \left[-\frac{e^{-2k_1 r}}{2r} + k_1 E_i(2k_1 r) \right] - \frac{C_5}{r} + C_6 \quad (4.2.3)$$

onde definimos a função integral-exponencial do modo (16)

$$E_i(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\mu}}{\mu} d\mu ,$$

e onde C_6 é uma constante da integração; vamos tomar $C_6 = 0$ a fim de ficarmos com $g_{00} = 1$ no infinito.

Como a eq. (4.1.8) é válida também para as quantida -

des exteriores, vem

$$\alpha_e(r) = \frac{r^2}{2} \left[2\eta'_e/r + S_{2e}'^2 - S_{1e}'^2 + k_1^2 S_{1e}^2 - k_2^2 S_{2e}^2 \right];$$

utilizando as eqs. (4.2.2), (3.2.3) e (3.2.4) e simplificando obtemos, finalmente

$$\alpha_e(r) = C_2^2 \frac{e^{-2k_2 r}}{2} \left(\frac{1+k_2 r}{r^2} \right) - D^2 \frac{e^{-2k_1 r}}{2} \left(\frac{1+k_1 r}{r^2} \right) + \frac{C_5}{r}. \quad (4.2.4)$$

4.3 - Condições de Contorno

Como consequência da eq. (4.1.8), que é válida nas regiões exterior e interior, a continuidade de α estará automaticamente assegurada se impusermos a continuidade de η' , uma vez que já foram supostos contínuos os campos escalares e suas derivadas primeiras. Logo, as continuidades de η e de η' são as únicas que precisam ser consideradas, e são suficientes para a fixação das constantes C_3 e C_5 . De

$$\eta_i(r) \Big|_{r=\rho} = \eta_e(r) \Big|_{r=\rho}$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^2}{2} \left[\log_e 2\Lambda\rho + \frac{\text{sen}2\Lambda\rho}{2\Lambda\rho} + C_i(2\Lambda\rho) + \gamma \right] + \chi \frac{\rho^2}{6} + \\ & + C_2^2 = - \frac{k_2 C^2}{2} \left[- \frac{e^{-2k_2 \rho}}{\rho} + 2k_2 E_i(2k_2 \rho) \right] + \frac{k_1 D^2}{2} \left[- \frac{e^{-2k_1 \rho}}{\rho} + \right. \\ & \left. + 2k_1 E_i(2k_1 \rho) - \frac{C_5}{\rho} \right], \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

enquanto que de

$$\eta_i'(r) \Big|_{r=\rho} = \eta_e'(r) \Big|_{r=\rho}$$

vem

$$\frac{\delta^2}{2} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{\text{sen} 2\Lambda\rho}{2\Lambda\rho^2} \right] + \chi \frac{\rho^3}{3} = \frac{k_1 D^2}{2} \cdot \frac{e^{-2k_1\rho}}{\rho^2} - \frac{k_2 C^2}{2} \cdot \frac{e^{-2k_2\rho}}{\rho^2} + \frac{C^5}{\rho^2} ; \quad (4.3.2)$$

de (4.3.2) tiramos imediatamente o valor de C_5 ,

$$C_5 = \frac{\delta^2}{2} \left[\rho - \frac{\text{sen} 2\Lambda\rho}{2\Lambda} \right] + \chi \frac{\rho^3}{3} + \frac{k_2 C^2}{2} e^{-2k_2\rho} - \frac{k_1 D^2}{2} e^{-2k_1\rho} ; \quad (4.3.3)$$

substituindo agora a eq. (4.3.3) na eq. (4.3.1) obtemos

$$C_3 = k_1^2 D^2 E_i(2k_1\rho) - k_2^2 C^2 E_i(2k_2\rho) - \frac{\delta^2}{2} \left[\log_e 2\Lambda\rho + C_i(2\Lambda\rho) + \gamma - 1 \right] - \chi \frac{\rho^2}{2} . \quad (4.3.4)$$

Usando estes resultados, as expressões para n e α interiores e exteriores podem ser escritas nas formas

$$\eta_i(r) = \frac{\delta^2}{2} \left[\log_e \left(\frac{r}{\rho} \right) + \frac{\text{sen} 2\Lambda r}{2\Lambda r} + C_i(2\Lambda r) - C_i(2\Lambda\rho) - 1 \right] + \chi \frac{(r^2 - 3\rho^2)}{2} + k_1^2 D^2 E_i(2k_1\rho) - k_2^2 C^2 E_i(2k_2\rho) , \quad (4.3.5)$$

$$\alpha_i(r) = \frac{\delta^2}{2} \left[\text{sen}^2 \Lambda r + \frac{\text{sen} 2\Lambda r}{2\Lambda r} - \frac{\text{sen}^2 \Lambda r}{\Lambda^2 r^2} \right] - \chi \frac{r^2}{6} , \quad (4.3.6)$$

$$\eta_e(r) = k_2 C^2 \left[\frac{e^{-2k_2 r}}{2r} - k_2 E_i(2k_2 r) \right] - k_1 D^2 \left[\frac{e^{-2k_1 r}}{2r} - k_1 E_i(2k_1 r) \right] - \frac{C_5}{r} \quad (4.3.7)$$

$$\alpha_e(r) = C^2 \frac{e^{-2k_2 r}}{2} \left(\frac{1+k_2 r}{r^2} \right) - D^2 \frac{e^{-2k_1 r}}{2} \left(\frac{1+k_1 r}{r^2} \right) + \frac{C_5}{r} . \quad (4.3.8)$$

Ao escrevermos estas expressões, as constantes C , D e C_5 não foram escritas explicitamente para evitar expressões demasiado longas. No entanto, lembramos que C_5 é dada pela eq. (4.3.3), C pela eq. (3.2.8), enquanto que o valor de D pode ser imediatamente obtido da eq. (3.2.6).

5. Conclusões

5.1 - O Sistema Físico Estudado

Nas considerações anteriores obtivemos uma classe de soluções aproximadas das equações de Einstein, acopladas com as equações para campos escalares de curto alcance; cada solução representa uma distribuição de energia e tensões com simetria esférica, em equilíbrio estático, sem singularidades, com as densidades de fonte dos campos escalares partindo de um valor máximo na origem e diminuindo monotonicamente até a fronteira do sistema.

5.2 - Resenha dos Resultados Analíticos Obtidos

Considerações dimensionais simples nos levam à conclusão de que a constante δ que aparece nas expressões dos potenciais gravitacionais é adimensional. Como podemos expressar os campos e as densidades de fonte escalares proporcionais a δ , e os potenciais gravitacionais proporcionais a δ^2 , parece natural identificar δ com o parâmetro adimensional ϵ , em potências do qual a expansão dos campos e fontes foi feita, na secção 2. Nossa aproximação será válida então para

$$\delta^2 \equiv A^2 \left(\frac{k_2^2 \beta^2 - k_1^2}{\beta^2} \right) \ll 1 \quad (5.2.1)$$

Podemos então sintetizar os resultados analíticos obtidos da seguinte forma: são dados inicialmente os quatro parâmetros k_1 , k_2 , β , δ ; esses parâmetros devem satisfazer, no limite de campos fracos, $k_1 < k_2$, $\beta^2 < 1$, $\beta^2 k_2^2 > k_1^2$, a fim de que

o sistema tenha equilíbrio; e deve-se ainda ter $\delta^2 \ll 1$, que é a condição de campos fracos. Todos os demais parâmetros do sistema são obtidos a partir desses quatro. Inicialmente definiu-se o parâmetro Λ pelas eqs.(3.1.8) e (3.1.5), e o raio ρ das fontes pelas eqs. (3.2.9) e (3.2.15). Para a expressão sintetizada dos campos escalares na secção 2, foram definidas as constantes A , eq. (4.1.2); C_1 , eq.(3.2.7); C , eq. (3.2.8) e D , eq. (3.2.6); note-se que todas essas quatro constantes são diretamente proporcionais ao parâmetro inicial δ . Obteve-se então as expressões analíticas das grandezas escalares S_{1i} eq. (3.1.10), S_{1e} eq. (3.2.3), S_{2i} eq. (3.1.9), S_{2e} eq.(3.2.4), σ_1 eq. (3.2.12), σ_2 eq. (3.2.13) . Para a expressão das grandezas gravitacionais foram definidas as três constantes χ eq. (4.1.2), C_3 eq. (4.3.4) e C_5 eq. (4.3.3), todas proporcionais ao quadrado do parâmetro inicial δ . Obteve-se então os potenciais gravitacionais η_i eq. (4.3.5), α_i eq. (4.3.6) , η_e eq. (4.3.7), α_e eq. (4.3.8), todos proporcionais ao quadrado de δ .

5.3 - Análise dos Resultados

Das eqs. (3.2.3) e (3.2.4) vemos que os campos escalares exteriores têm o comportamento usual dos campos de Yukawa, com um rápido enfraquecimento para valores crescentes da variável radial.

Já os potenciais gravitacionais, para $r \rightarrow \infty$, têm o comportamento típico da solução de Schwarzschild,

$$\eta_e(r) = -\alpha_e(r) = -\frac{C_5}{r} \quad r \rightarrow \infty \quad (5.3.1)$$

pois tanto e^{-kr}/r como $E_1(2kr)$ tendem a zero mais rapidamente do que $1/r$ quando $r \rightarrow \infty$. Lembrando que em sistemas do tipo Schwarzschild o parâmetro massa m é dado pelo comportamento assintótico de $\eta_e(r)$, ou seja

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [r\eta_e(r)] = -\frac{Gm}{c^2}, \quad (5.3.2)$$

vemos que nosso sistema gera um campo gravitacional de comportamento assintótico idêntico ao que seria criado pela massa

$$m = \frac{c^2 C_5}{G}, \quad (5.3.3)$$

que é de ordem δ^2 .

5.4 - Estabilidade

Deixamos de realizar um estudo analítico da estabilidade do sistema, mesmo para perturbações radiais (que não destruiriam a simetria esférica), pela extrema complexidade algébrica com que quase sempre nos deparamos em estudos dessa natureza. Entretanto no limite de campos fracos os conceitos usuais da mecânica Newtoniana comumente mantêm sua validade na Relatividade Geral; assim sendo, podemos tentar um raciocínio não-relativista. Suponhamos construída uma esfera em equilíbrio estático, nos moldes descritos nesta tese; e suponhamos que uma pequena perturbação nas densidades das fontes escalares produza momentaneamente uma maior concentração em dada região do sistema. Com esse aumento de concentração local as forças de repulsão (de alcance mais curto) sobrepujariam as de atração, e uma tendência à rarefação seria notada. No caso da

pequena perturbação provocar uma rarefação momentânea em dado local, as forças atrativas (de alcance mais longo) preponderariam, e de novo se verificaria a tendência à restauração da configuração do equilíbrio.

No caso de nos afastarmos do limite de campos fracos o procedimento a adotar seria o de escrever as equações dos campos com dependência também temporal, e analisar a evolução temporal de uma pequena perturbação a partir da configuração de equilíbrio; dada a alta complexidade do sistema de equações a resolver, a utilização de cálculos numéricos aproximados e de computadores nos parece inevitável.

5.5 - Um Exemplo Numérico

Apresentamos a seguir os gráficos correspondendo à solução de um caso específico da classe de soluções obtida nesta tese. Os gráficos apresentados correspondem aos valores numéricos

$$k_1 = 10^{13} \text{ cm}^{-1}, \quad k_2 = 10^{14} \text{ cm}^{-1}, \quad \beta = 1/\sqrt{2};$$

como as grandezas escalares (campos e fontes) dependem linearmente de δ , a escala das ordenadas foi calibrada com múltiplos de δ . Para os campos gravitacionais essa calibração foi feita com múltiplos de δ^2 .

Em todos os gráficos a escala das abcissas foi graduada com múltiplos de r/ρ ; o valor da abcissa $r/\rho = 1$ representa portanto a fronteira entre as regiões interior e exterior.

Na Fig. 1 apresentamos as densidades σ_1 e σ_2 das fon

tes dos campos escalares. Essas densidades tem seus valores máximos na origem e decrescem monotonicamente até a fronteira $r = \rho$, a partir da qual assumem valor nulo.

Na Fig. 2 apresentamos o gráfico do campo escalar S_2 e o negativo do campo S_1 . Note-se que o campo S_2 , do tipo repulsivo, tem o mesmo sinal que o de sua fonte σ_2 (da mesma forma que um potencial eletrostático que é do tipo repulsivo, tem o mesmo sinal que a carga elétrica que o origina). O campo atrativo S_1 tem sinal oposto ao de sua fonte σ_1 (analogamente ao que ocorre ao potencial gravitacional Newtoniano). Observe-se ainda o decréscimo acentuadamente mais rápido do campo S_2 , com relação ao S_1 , a partir da fronteira $r/\rho = 1$; isso se deve a que no exemplo numérico aqui estudado considerou-se o alcance do campo S_2 bastante inferior ao do campo S_1 ($k_2 = 10 k_1$). Ambos os campos apresentam valor absoluto máximo no centro da simetria, com variação monotônica para valores crescentes do afastamento com relação a esse centro, assumindo o valor nulo no infinito.

Na Fig. 3 apresentamos os potenciais gravitacionais $\eta = \frac{1}{2} \log_e g_{00}$ e $\alpha = \frac{1}{2} \log_e (-g_{11})$. O potencial η pode ser identificado, neste limite de campos fracos, ao potencial gravitacional Newtoniano (dividido pelo quadrado da velocidade da luz); apresenta-se portanto como um poço de potencial, de valor mínimo na origem e crescimento monotônico até o valor nulo no infinito. Seu comportamento assintótico é do tipo hiperbólico; para efeitos de comparação foi traçado também o potencial η_s correspondente ao produzido por uma massa de Schwarzschild de mesmo valor que a associada à energia do sistema em ques-

tão. Nota-se que $\eta \rightarrow \eta_s$ quando $r \rightarrow \infty$.

O potencial α apresenta-se contínuo e com derivada radial contínua na fronteira $r/\rho = 1$. Assume valores negativos nas regiões centrais, e positivos em regiões mais afastadas. Isso representa uma contração das distâncias radiais nas regiões mais centrais com respeito a intervalos de coordenadas ($d\ell = e^{\alpha} dr \leq dr$), e uma dilatação das distâncias radiais em regiões mais afastadas ($d\ell \geq dr$). Seu comportamento assintótico também é do tipo hiperbólico, como pode ser observado por comparação com a curva $\alpha_s = -\eta_s$.

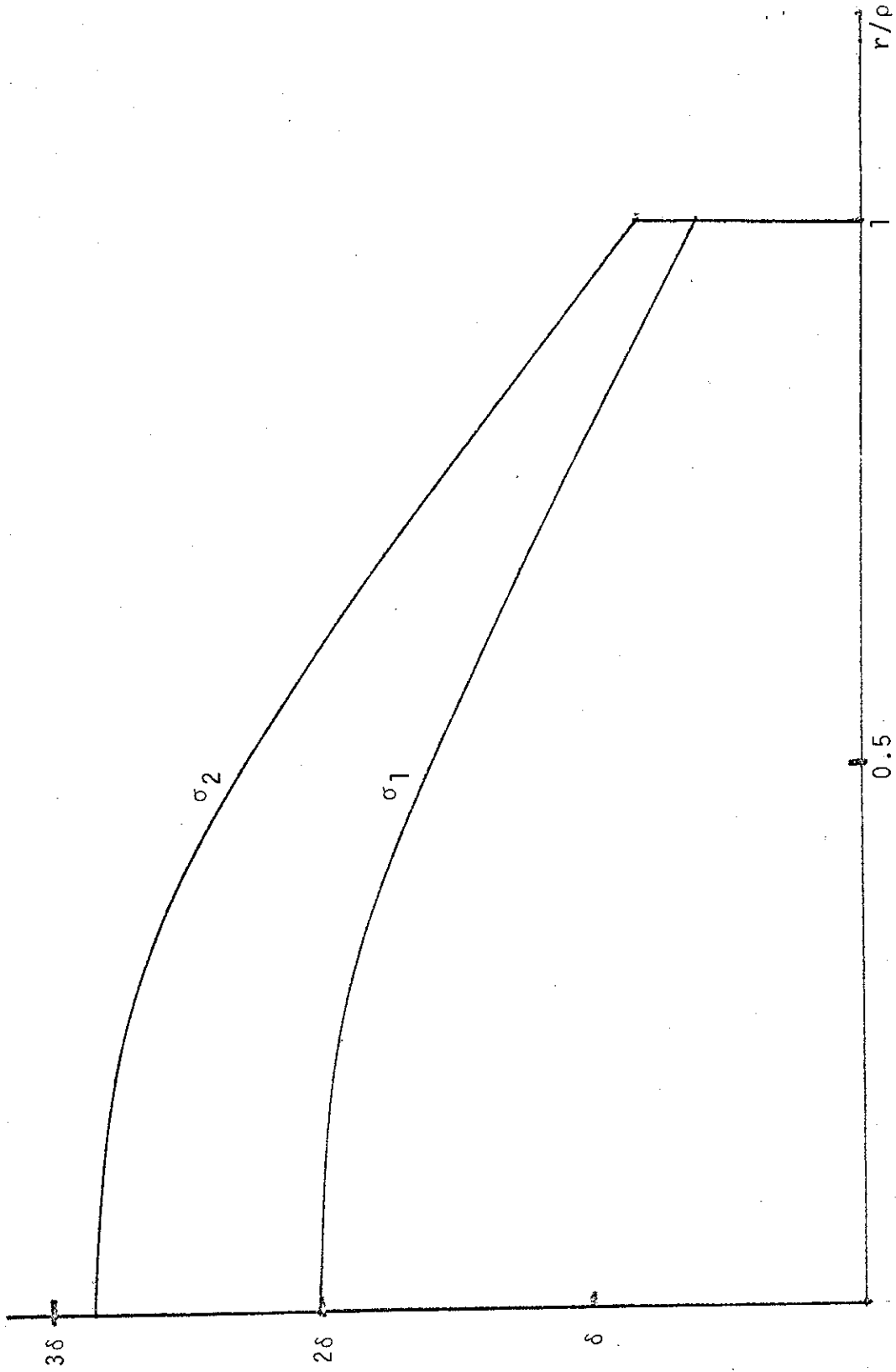


Fig. 1 - As fontes dos campos escalares, no limite de campos fracos, para $k_2=10k_1$, $\beta=1/\sqrt{2}$ e $\sigma_1 > 0$.

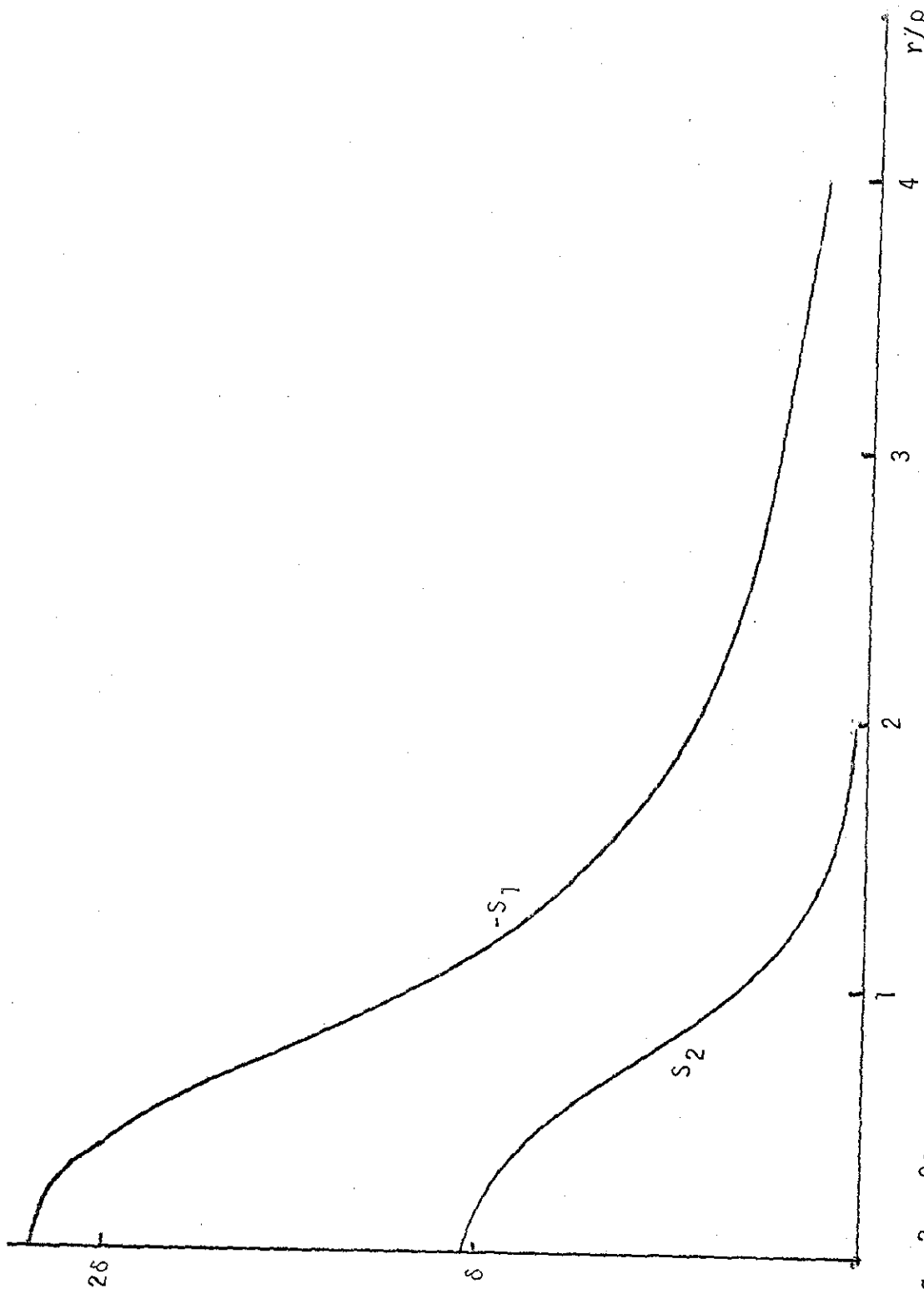


Fig. 2 - Os campos escalares, no limite de campos fracos, para $k_2=10k_1$, $\beta=1/\sqrt{2}$ e $\sigma_1 > 0$.

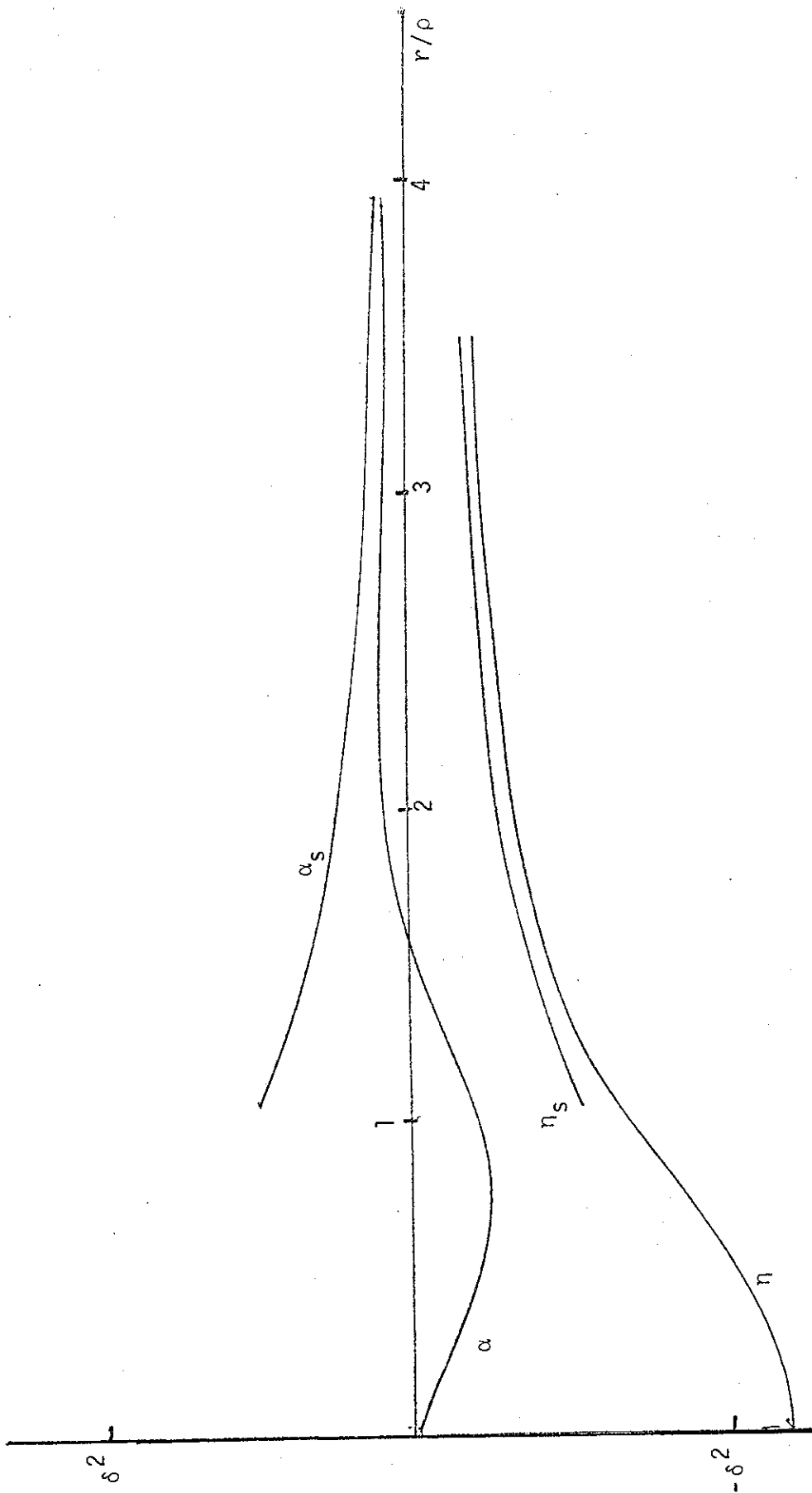


Fig. 3 - Os potenciais gravitacionais η e α , no limite de campos fracos, para $k_2 = 10k_1$ e $\beta = 1/\sqrt{2}$; indicados também os potenciais de Schwarzschild $\eta_s = -\alpha_s$ associados, para comparação assintótica.

REFERÊNCIAS

- (1) - A. Einstein e N. Rosen, The Particle Problem in the General Theory of Relativity, Phys. Rev., 48, (1935), 73.
- (2) - D. Peak, Strong Gravity and the Yukawa Potential, Lett. Nuovo Cim., 4, (1972), 817.
- (3) - L. Motz, Existence of Net Electric Charges on Stars, Nature, 189, (1961), 994.
- (4) - A. Inomata e D. Peak, Dynamical Symmetry in General Relativity, Progr. Theor. Phys., 42, (1969), 134.
- (5) - C.J. Isham, A. Salam e J. Strathdee, f-Dominance of Gravity, Phys. Rev. D, 3, (1971), 867.
- (6) - Adler, Bazin, Schiffer, Introduction to General Relativity, 1^a Edição, McGraw-Hill, (1965), Cap. 9, Sec. 9.6.
- (7) - A. Einstein, On a Stationary System with Spherical Symmetry Consisting of Many Gravitating Masses, Ann. of Math., 40, (1939), 922.
- (8) - W.B. Bonnor, The Mass of a Static Charged Sphere, Zeitschrift für Physik (Braunschweig), 160, (1960), 59.
- (9) - M.M. Som, A.F. da F. Teixeira e I. Wolk, Generalized Charged Dust Spheres in Relativity, J. Phys. A, 9, (1967), 1267.
- (10) - H.A. Buchdahl, Reciprocal Static Metrics and Scalar Fields in the General Theory of Relativity, Phys. Rev., 115, (1959), 1325.
- (11) - A.F. da F. Teixeira, I. Wolk e M.M. Som, Static Scalarly Charged Dust in Relativity, Lett. Nuovo Cim., 12, (1975), 319.
- (12) - A.F. da F. Teixeira, I. Wolk e M.M. Som, Tentative Relativistic Model for Neutral Yukawa Systems, Phys. Rev. D, 12, (1975), 319.

- (13) - Adler, Bazin, Schiffer, Introduction to General Relativity, 1^a Edição, McGraw-Hill, (1965), Cap. 10, Pag. 325.
- (14) - A.F. da F. Teixeira, I. Wolk e M.M. Som, On Static Electrovacs with Scalar Fields, J. Phys. A, 9, (1976), 53.
- (15) - Adler, Bazin, Schiffer, Introduction to General Relativity, 1^a Edição, McGraw-Hill, (1965), Cap. 9, Pag. 283.
- (16) - M.R. Spiegel, Mathematical Handbook, 1^a Edição, McGraw - Hill, 1970.
- (17) - J.A. Souza e A.F. da F. Teixeira, Gravitation from Non - Singular Scalar Sources, Prê-Publicação do C.B.P.F. , A0027/76^(*).

(*) Aceito para publicação no Internat. J. Theor. Phys.

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico,
fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes
professores:

Antônio Fernandes da Fonseca Texeira

Murari Mohan Sam.

J. J. J.