

IVANO DAMIÃO SOARES

UM ESTUDO DA INTERAÇÃO GRAVITAÇÃO-  
NEUTRINO

Tese de Doutorado

CBPF 1976

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Mario Novello, por sua orientação e seu exemplo. Ao Professor Sergio Joffily, por muitas discussões relevantes. A meus pais. A Sonia M. de Oliveira e Helena Ciccarino, pelo trabalho de datilografia.

ERRATA

Pág.	Posição	onde se lê	leia-se
10	linha 9	é constituída de	é equivalente a
38	linha 10 de baixo para cima	do grupo $G_6$	no grupo $G_6$
69	eq. (4.32)	$\tilde{T}_{01} = \tilde{T}_{11} = -\tilde{T}_{01} \dots$	$\tilde{T}_{00} = \tilde{T}_{11} = -\tilde{T}_{01} \dots$
70	eq. (4.35)	$\dots = \text{const.}$	$\dots = \text{const.} \neq 0$
90	3ª equação	(4.80d)	(4.80b)
96	após eq. (4.104b)	$p = \lambda, \rho = \text{const.}$	$p = \lambda\rho, \lambda = \text{const.}$
104	eq. (4.125)	$\dots - (\rho+p)e_{\mu(0)} \gamma_0^B$	$\dots - (\tilde{\rho}+\tilde{p})e_{\mu(0)} \gamma_0^B$
104	eq. (4.126)	$K\{\tilde{\rho}-\tilde{\rho}+p(\dots)\} =$	$K\{\tilde{\rho}-(\tilde{\rho}+\tilde{p})(\dots)\} =$
109	linha 16	de segunda ordem	de terceira ordem
110	eq. (4.141)	$r = r_S(u)$	$\Sigma : r = r_S(u)$
129	após fórmula (5.5)	-	que também é condição de a equação de Dirac para o neutrino ser conforme invariante.
130	1ª linha do rodapé	(3.48), é	(3.48), C é
130	2ª linha do rodapé	e uma função	e $\phi$ uma função

## RESUMO

Um estudo da interação gravitação-neutrino é feito com base nas equações acopladas de Einstein-Dirac. Duas classes de soluções são obtidas, correspondendo a duas situações físicas específicas. Um modelo cosmológico com expansão é obtido, tendo neutrinos como única fonte de curvatura; suas propriedades e os parâmetros que podem caracterizar a solução como modelo cosmológico são estudados. A segunda classe de soluções corresponde a um modelo completo simples de uma estrela esfericamente simétrica emitindo neutrinos: a região interior é suposta ser constituída de uma distribuição de fluido perfeito esfericamente simétrica, limitada no espaço e que emite neutrinos; a matéria da estrela é considerada transparente para neutrinos; a região exterior contém somente neutrinos e campo gravitacional. O problema da compatibilidade de neutrinos com campos gravitacionais esfericamente simétricos é examinado. As leis de conservação locais e as condições de junção das soluções interior e exterior na superfície do fluido são estudadas e permitem caracterizar dois tipos de soluções. Num caso, a solução descreve a fase de emissão de neutrinos, com conseqüente contração da configuração, imediatamente antes de o fluido estar totalmente contido no interior do seu raio de Schwarzschild, quando a emissão de neutrinos e a contração da estrela

cessam. A outra possibilidade pode corresponder a uma configuração quasi-estacionária, com emissão de neutrinos, onde a equação relativística de equilíbrio radiativo permite definir o equivalente de "pressão de radiação" para neutrinos, que atua no mesmo sentido da pressão gravitacional. ' .

## SUMÁRIO

1.	Introdução .....	1
	Notação e Convenções .....	5
2.	Spinors em uma Variedade Riemanniana .....	7
	Spinors a Duas e a Quatro Componentes .....	11
	Spinors de Dirac num Espaço-Tempo Riemanniano .....	12
	Equações Acopladas de Einstein-Dirac .....	21
3.	Cosmologia de Neutrinos .....	26
	Métrica Conformalmente Plana .....	32
	Isometrias .....	33
	Homogeneidade .....	39
	Geodésicas .....	40
	Expansão e Anisotropia .....	50
4.	Neutrinos em Campos Gravitacionais Esfericamente Simétricos - Soluções Interior e Exterior para Uma Esfera de Fluido Emitindo Neutrinos .....	55
	O Problema Exterior e a Compatibilidade de Neutrinos Com Campos Gravitacionais Esfericamente Simétricos ..	57
	Propriedades da Solução Exterior .....	70
	O Problema Interior: Estudo de uma Classe de Soluções	79
	Reinterpretação da Equação de Estado .....	102

Condições de Junção (e Contorno) das Soluções Inte rior e Exterior .....	108
5. Conclusões .....	123
Apêndice 1 - Formas Diferenciais em um Espaço-Tempo Riemanniano .....	132
Apêndice 2 - Neutrinos no Formalismo de Spinors a duas Componentes em um Espaço-Tempo Riemanniano	145

## 1. Introdução

Podemos considerar que o estudo da interação gravitação-neutrino foi iniciado com os trabalhos<sup>1,2</sup> de Cartan, Infeld e van der Waerden sobre spinores em uma variedade Riemanniana; posteriormente, muitas outras contribuições à teoria de spinores em espaços-curvos<sup>3</sup> apareceram. Sem dúvida, porém, podemos tomar o artigo de revisão de Brill e Wheeler (1957), "Interaction of neutrinos and gravitational fields"<sup>4</sup>, como uma referência básica. A importância do estudo de neutrinos em espaços curvos foi colocada pelos dois autores com a seguinte argumentação. Nosso conhecimento de neutrinos limita-se a processos de emissão e absorção, isto é, ao domínio das transformações das partículas elementares. Por comparação, imaginemos que se soubesse dos eletrons somente a taxa em que eles são produzidos no decaimento beta ou absorvidos em processos como absorção do k-eletron — mas nada se conhecesse sobre o movimento de eletrons em campos elétricos e magnéticos, sobre a ligação dos eletrons nos átomos ou sobre a existência do acoplamento spin-órbita, e muito pouco sobre o tensor momentum-energia do eletron. Para aprender sobre neutrinos tanto quanto se sabe sobre eletrons hoje, temos que considerar forças que influenciem o movimento de neutrinos e que sejam sujeitas a uma análise simples. O neutrino não responde diretamente a campos elétricos ou magnéticos — por isso, temos que fazer uso de campos gravitacionais, cuja interação, com o neutrino é passível de uma análise simples. Em outras palavras, é preciso con



siderar a física de neutrinos em espaços curvos.

Nos últimos quinze anos, muitos outros argumentos vieram se somar aos de Brill e Wheeler. Em Cosmologia, neutrinos passaram a ter um papel importante na questão da densidade de energia do Universo e no problema da distinção entre vários modelos cosmológicos <sup>5,6</sup>: um gás de neutrinos (sem interação com o restante da matéria do Universo) encheria todo o cosmos, contribuindo significativamente para a curvatura do Universo. Embora não haja ainda evidência experimental deste gás de neutrinos, a descoberta da radiação residual de corpo negro de  $2,7 \text{ }^{\circ}\text{K}^{7,8}$  — remanescente de uma fase inicial quente do Universo — levantou a questão da existência de uma radiação de neutrinos com origem análoga e de uma fase na história do Universo dominada por neutrinos. Também processos astrofísicos ligados à emissão e absorção de neutrinos têm sido extensivamente discutidos, onde, em certos casos (estágios avançados da evolução estelar, colapso gravitacional em supernovas, etc.)<sup>9</sup>, a teoria da Relatividade Geral deve ser levada em conta.

Neutrino em interação com a gravitação são descrititos por campos spinoriais sobre o espaço-tempo curvo. Os campos spinoriais bem como a métrica do espaço-tempo devem ser soluções das equações acopladas de Einstein-Dirac. Um tratamento completo do problema deveria levar em conta a quantização do campo clássico do neutrino, que é discutida na seção 5.

Na seção 2 fazemos uma revisão da teoria de spinores a quatro componentes sobre um espaço-tempo Riemanniano; os spinores são tratados somente do ponto de vista do formalismo de tetradas (vierbein), com as transformações de spin geradas pelas transformações de Lorentz locais das tetradas. A utilização de spinores no formalismo de tetradas tem a vantagem, na nossa opinião, de ser mais operacional, permitindo inclusive uma unificação simples com o formalismo de formas diferenciais para o espaço-tempo<sup>10, 11, 12</sup> e a utilização imediata dos cálculos (cf. apêndice 1). Outros formalismos para spinores (cf. refs. (3) e (4)) são, em princípio, equivalentes. No entanto, na discussão da compatibilidade de campos de neutrinos com campos gravitacionais esfericamente simétricos e na integração da equação de Dirac nas métricas esfericamente simétricas consideradas, spinores a quatro componentes no formalismo de tetradas também se tornam a escolha mais natural para a análise do problema. As equações acopladas de Einstein-Dirac são derivadas pelo princípio variacional a partir da Lagrangeana total, soma da Lagrangeana de Einstein e da Lagrangeana do neutrino. No caso de haver matéria presente, o tensor momentum-energia total que aparece do lado direito das equações de Einstein deve ser a soma do tensor momentum-energia do neutrino com o tensor momentum-energia da matéria.

Dois modelos são examinados onde a interação gravitação-neutrino tem um papel dominante. Elas correspondem a duas soluções das equações acopladas de Einstein-Dirac. Na seção 3, uma classe de soluções cosmológicas tendo neutrino como única fonte de curvatura são obtidas, e suas propriedades e os parâmetros que podem caracterizar a solução como modelo cosmo

lógico são estudados. Na seção 4, obtemos uma solução correspondendo a um modelo completo simples de uma estrela esfericamente simétrica emitindo neutrinos. Duas regiões são consideradas: (i) região interior, constituída de uma distribuição de fluido perfeito esfericamente simétrica e limitada no espaço (que é suposta emitir neutrinos) e neutrinos em interação gravitacional. Neutrinos, uma vez emitidos, tem somente interação gravitacional, quer dizer, a matéria da estrela é considerada transparente para neutrinos; (ii) região exterior, contendo somente campo gravitacional e neutrinos. O problema da compatibilidade de neutrinos com campos gravitacionais esfericamente simétricos é examinado e uma redefinição proposta. As condições de junção das duas soluções (interior e exterior) na superfície do fluido são estudadas e permitem caracterizar dois tipos de soluções. A emissão (absorção) de neutrinos leva a configuração a se contrair (expandir), correspondendo a um resfriamento (aquecimento) localmente observável da matéria da estrela. Um sumário dos resultados é feito na seção 5. A questão da quantização do campo de neutrinos, nos espaços-tempos curvos correspondentes, é examinada na seção 5, onde é discutido como algumas variáveis e parâmetros arbitrários da solução podem ser reinterpretados.

O Apêndice 1 contém uma revisão sumária da teoria de formas diferenciais sobre um espaço-tempo Riemanniano, cujos resultados são utilizados para a realização dos cálculos necessários nesta tese. Para nossa descrição do neutrino com spinores no formalismo de tetradas, o formalismo de formas diferenciais nos fornece uma base unificada para descrição e cál

culos, relativos a neutrinos e ao próprio espaço-tempo. Em grande parte da literatura sobre neutrinos em espaços-tempos curvos, neutrinos são descritos por spinores a duas componentes no formalismo de Newman-Penrose. No Apêndice 2, fazemos uma breve revisão da teoria de spinores a duas componentes em Relatividade Geral e uma introdução ao formalismo de Newman-Penrose. O tensor momentum-energia, bem como a equação de Dirac para o neutrino são obtidos em termos dos coeficientes de NP e da base correspondente de vetores nulos.

### Notação e Convenção

Num sistema de coordenadas admissível  $\{x^\mu | \mu = 0, 1, 2, 3\}$  o espaço-tempo é descrito pela métrica  $g_{\mu\nu}(x)$ , de assinatura -2. Sua inversa, que existe em todo ponto, é definida por  $g_{\mu\lambda}g^{\lambda\rho} = \delta_\mu^\rho$ . Em geral, índices gregos minúsculos variam de 0 a 3 e são levantados e abaixados, respectivamente, com  $g^{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu}$ . Índices latinos maiúsculos denotam índices de tetradas e variam de 0 a 3; são levantados e abaixados, respectivamente, pela matriz de Minkowski constante  $\eta^{AB}, \eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ . Índices latinos minúsculos (seção 2) denotam índices internos spinoriais e variam de 1 a 4. Estas convenções não valem para o Apêndice 2, onde índices latinos maiúsculos, pontuados e sem ponto, denotam índices spinoriais e variam de 1 a 2. Para qualquer tipo de índice, usamos a convenção de soma de Einstein.

Derivadas em relação à variável  $x^\mu$  são denotadas por  $\partial_\mu$  ou pelo índice  $\mu$  antecedido de uma barra  $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right) = \partial_\mu\phi =$

$= \phi_{|\mu}$ ). A derivada covariante em relação a  $X^\mu$ , construída com o símbolo de Cristhoffel é denotada por  $(||)$  precedendo o índice  $\mu$  ( $\phi^{\alpha}_{||\mu} = \phi^{\alpha}_{|\mu} + \{\alpha_{\mu\epsilon}\} \phi^\epsilon$ ). A derivada covariante de um objeto que contém índices vetoriais e spinoriais é, em geral, denotada por  $\nabla_\alpha$ . O tensor de curvatura tem o sinal definido por

$$\nabla_\mu ||_\rho ||_\sigma - \nabla_\mu ||_\sigma ||_\rho = - \frac{1}{2} R^\alpha_{\mu\rho\sigma} \nabla_\alpha$$

Finalmente, usamos unidades tais que  $\hbar = c = 1$ . A constante de Einstein  $k = 8\pi G$  é positiva, exceto no caso da solução interior da seção 4, onde tomamos  $k = -8\pi G$ .

## 2. SPINORES EM UMA VARIEDADE RIEMANNIANA

Consideremos uma variedade Riemanniana localmente Lorentziana<sup>13</sup> e um sistema de coordenadas  $\{x^\alpha\}$  que cobre pelo menos uma parte da variedade. O elemento de linha

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \quad (2.1)$$

pode sempre ser decomposto localmente como

$$ds^2 = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 \quad (2.2)$$

A decomposição (2.2) corresponde à seguinte construção intuitiva<sup>(\*)</sup>: num dado ponto  $x^\alpha$  da variedade, tomamos para o espaço vetorial local uma base de quatro vetores linearmente independentes

$$\left\{ e_{(A)}^\alpha(x) \mid A = 0, 1, 2, 3 \right\} \quad (2.3)$$

Qualquer vetor  $X^\alpha$ , definido no ponto, tem componentes  $X^A$

$$X^\alpha = e_{(A)}^\alpha X^A$$

segundo a base (2.3). Em particular os vetores  $dx^\alpha$  têm compo

---

(\*) Para uma construção mais rigorosa usando o conceito de espaço tangente à variedade no ponto P e base local de coordenadas em P, ver referência[15].

mentes, nesta base local, dadas por

$$dx^\alpha = e_{(A)}^\alpha \theta^A \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.1),

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta \theta^A \theta^B$$

e podemos sempre escolher a base (2.3) de tal forma que (\*)

$$g_{\alpha\beta} e_{(A)}^\alpha(x) e_{(B)}^\beta(x) = \eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (2.5)$$

quer dizer,  $e_{(0)}^\alpha$  tipo-tempo,  $(e_{(i)}^\alpha \mid i=1,2,3)$  tipo-espaco, e mutuamente ortogonais. Devemos notar que a escolha (2.5) não impõe nenhuma restrição sobre as componentes da métrica. Com tal escolha, o elemento de linha  $ds^2$  assume localmente a sua forma Lorentziana

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad (2.6)$$

A matriz  $\eta_{AB}$  pode ser interpretada como as componentes do tensor  $g_{\alpha\beta}$  na base local  $\{e_{(A)}^\alpha \mid e_{(B)}^\beta \mid A, B = 0, 1, 2, 3\}$ . De modo

(\*) A escolha de  $\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  corresponde a tomar como ordenadas locais do tipo Cartesiano. Pode-se, alternativa-mente, fazer uma escolha de base de modo que  $\eta_{AB}$  assumam valores constantes mas não diagonais, correspondendo a uma base de tetradas nulas e algumas das coordenadas locais nulas [16]. Uma base de tetradas nulas parecer ser a mais natural quando se trabalha com spinores a duas componentes [3]. No presente trabalho, onde somente usamos spinores a 4-componentes, a escolha (2.5) é adequada e suficiente.

ral, para um tensor qualquer de ordem  $k$ , do espaço produto Cartesiano usual de  $k$ -espaços vetoriais locais, teremos a base local

$$\left\{ \underbrace{e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta \cdots e_{(D)}^\gamma}_{k\text{-fatores}} \mid A, B, \dots, D = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

A base local (2.3) é chamada base de tetradas no ponto  $x^\alpha$  e os índices (A) são chamados índices de tetradas, índices locais ou índices internos<sup>14</sup>.

A base de tetradas (2.3) pode ser sempre escolhida independentemente em cada ponto da variedade e, com a condição (2.5), define de modo natural a estrutura de Minkowski local (2.6) da variedade. Índices de tetradas são levantados e baixados com a métrica de Minkowski

$$\eta^{AB} = \eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (2.7)$$

respectivamente. Os vetores (2.3) com a escolha (2.5) satisfazem às relações óbvias  $e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta = \delta_{AB}^{\alpha\beta}$ ,  $e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta = \delta_{AB}^{\alpha\beta}$ . A forma (2.6) é invariante por transformações de Lorentz locais  $L^A_B(x)$

$$L^A_B(x) \eta_{AD} L^D_C(x) = \eta_{BC} \quad (2.8)$$

Tais transformações correspondem a uma rotação na base de tetradas

$$\tilde{e}_{(A)}^\alpha(x) = L^B_A(x) e_{(B)}^\alpha(x) \quad (2.9)$$



de modo que as tetradas ficam definidas a menos de uma transformação de Lorentz local, que pode ser feita independentemente em cada ponto da variedade.

Tendo em vista a estrutura Minkowskiana (2.6) e o grupo de Lorentz locais, podemos então transportar, naturalmente e independentemente para cada ponto da variedade, toda a teoria de representação do grupo de Lorentz.

Nota: É um fato bem conhecido<sup>5</sup> que a álgebra dos geradores do grupo de Lorentz restrito<sup>(\*)</sup> é constituída de duas subálgebras disjuntas, isomorfas à álgebra dos geradores do grupo das rotações espaciais. Assim todas as representações irredutíveis de dimensão finita do grupo de Lorentz restrito podem ser obtidas diretamente, uma vez que se conheçam as representações irredutíveis do grupo de rotações. Estas últimas podem ser caracterizadas por um único número  $j$ , que assume qualquer valor inteiro ou semi-inteiro de 0 a  $\infty$ . O espaço-base para a representação de ordem  $j$  tem dimensão  $2j+1$ . Desta forma, as representações irredutíveis de dimensão finita do grupo de Lorentz restrito podem ser caracterizadas por dois inteiros ou semi-inteiros  $(j, j')$ , que assumem valores de 0 a  $\infty$ , e cujo espaço-base correspondente tem dimensão  $(2j+1)(2j'+1)$ . As representações  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(0, \frac{1}{2})$  definem spinores a duas componentes: spinores a duas componentes são objetos que se transformam sob matrizes de Lorentz das representações  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(0, \frac{1}{2})$ . A representação

---

(\*) No que se segue, vamos nos restringir ao grupo de Lorentz homogêneo, próprio ( $\det L = +1$ ) e ortócrono ( $L_0^0 \geq +1$ ), ao qual nos referiremos como grupo de Lorentz restrito.

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  corresponde à representação usual das matrizes de Lorentz  $4 \times 4$  e atuam sobre vetores de 4 componentes. A representação  $(0,0)$  é a representação escalar. Com relação às operações de inversão espacial e conjugação complexa, temos: (i) se um objeto se transforma sob uma matriz da representação  $(j, j')$ , após uma inversão espacial ele vai se transformar sob  $(j', j)$ ; (ii) se um objeto se transforma sob uma matriz da representação  $(j, j')$ , por uma conjugação complexa ele vai se transformar sob  $(j', j)$ . Então, se quisermos incluir inversão espacial e conjugação complexa, devemos ter um espaço base de dimensão  $2(2j+1)(2j'+1)$ , soma direta  $(j, j') \oplus (j', j)$  dos espaços base de representação  $(j, j')$  e  $(j', j)$ .

### Spinores a duas componentes e a quatro componentes

Embora as representações  $(0, \frac{1}{2})$  e  $(\frac{1}{2}, 0)$  não sejam equivalentes, pela propriedade (ii) acima, é sempre possível encontrar uma base de representação (ou, equivalentemente, uma transformação de similaridade) tal que

$$(0, \frac{1}{2})^* \equiv (\frac{1}{2}, 0)$$

onde \* indica conjugação-complexa. Neste caso, a representação  $(\frac{1}{2}, 0)$  é dita representação conjugada de  $(0, \frac{1}{2})$  e, neste sentido, temos dois tipos de spinores a duas componentes que, na literatura, são geralmente chamados de spinores pontuados e não-pontuados, sendo um o complexo-conjugado do outro<sup>7</sup>. Eles serão tratados com mais detalhe no Apêndice 2, quando estudarmos

neutrino no formalismo de Newman-Penrose. Spinores a quatro componentes são objetos do espaço base de representação  $(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)$ . Sob o ponto de vista de transformação, não existe distinção entre um spinor de 4 componentes e seu complexo-conjugado. É este o espaço base onde estão definidos os spinores de Dirac e no qual as matrizes constantes de Dirac  $\{\gamma^A | A=0,1,2,3\}$  constituem uma representação da álgebra de Clifford associada à métrica de Minkowski  $\eta^{AB}$ , e que tomaremos como uma estrutura local independente em cada ponto da variedade.

### Spinores de Dirac num espaço-tempo Riemanniano

Em cada ponto da variedade, definimos spinores de Dirac como objetos de 4-componentes que, sob o grupo das transformações de Lorentz locais (2.8) se transformam como os seus correspondentes em espaço plano

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(L(x)) \psi(x) \quad (2.10a)$$

e seu conjugado correspondente

$$\tilde{\psi}(x) \rightarrow \tilde{\psi}'(x) = \tilde{\psi}(x) S^{-1}(L(x)) \quad (2.10b)$$

onde  $S(L(x))$  é uma matriz  $4 \times 4$  representação da transformação de Lorentz  $L^\alpha_\beta(x)$ , com a restrição

$$\det S = 1$$

Em termos de componentes, podemos escrever (2.10 a,b) como

$$\psi^a(x) \rightarrow \psi'^a(x) = S^a_b(x) \psi^b(x) \quad (2.10a')$$

$$\psi_a(x) \rightarrow \psi'_a(x) = \psi_b(x) (S^{-1})^b_a(x) \quad (2.10b')$$

Spinors de ordem mais alta se transformam como produto direto de spinors de primeira ordem do tipo (2.10 a,b).

Sob transformações de coordenadas sobre a variedade

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = X'^\alpha(x) \quad (2.11)$$

os spinors se transformam como escalares

$$\psi'(x') = \psi(x) \quad (2.12)$$

Neste caso, não existe relação entre o grupo de transformações (2.11) sobre a variedade e o grupo interno de Lorentz (2.8). Diferentemente da variedade plana da Relatividade Restrita, onde o grupo de transformações (2.10) pode constituir uma representação do grupo de transformações lineares e homogêneas sobre a variedade, no caso de uma variedade curva a estrutura Lorentziana local existe independentemente em cada ponto e as transformações locais (2.10) não podem constituir uma representação das transformações gerais de coordenadas (2.11) sobre a variedade. No entanto, uma relação entre a estrutura interna spinorial e a estrutura (externa) da variedade é possível pela existência de

uma álgebra de Clifford<sup>8</sup>. As matrizes constantes de Dirac<sup>(\*)</sup>

$$\gamma^A = (\gamma^A{}^a{}_b)$$

satisfazem à relação de anti-comutação

$$\gamma^A \gamma^B + \gamma^B \gamma^A = 2 \eta^{AB} \mathbf{1} \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade  $4 \times 4$ . Com a operação (2.13), estas matrizes constituem, na base dos spinores de Dirac uma representação para a álgebra de Clifford associada à métrica de Minkowski local  $\eta_{AB}$ . Usando a base (2.3), podemos definir sobre a variedade o campo de matrizes

$$\gamma^\mu(x) = e^\mu{}_{(A)}(x) \gamma^A \quad (2.14)$$

que satisfazem, devido a (2.5) e (2.13),

$$\gamma^\mu(x) \gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x) \gamma^\mu(x) = 2 g^{\mu\nu}(x) \mathbf{1} \quad (2.15)$$

constituindo a álgebra de Clifford associada à métrica  $g^{\mu\nu}(x)$  da variedade. Usando (2.13) e (2.15), qualquer elemento da geometria métrica do espaço-tempo pode ser construído como função de  $\gamma^\mu(x)$ .

Sob o grupo de transformações (2.10), as matrizes  $\gamma^\mu(x)$  se transformam como

---

(\*) Utilizando a convenção de S. Gasiorowicz, referência [21], onde  $\gamma^{A+} = \gamma^0 \gamma^A \gamma^0$ , com  $(\gamma^0)^2 = (-\gamma^k)^2 = \mathbf{1}$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

$$(\gamma^{1\mu}(x))_b^a = S_c^a(x) (S^{-1})_b^c(x) \gamma^{\mu}(x)_d = \left( S(x) \gamma^{\mu}(x) S^{-1}(x) \right)_b^a \quad (2.16)$$

No presente formalismo de tetradas, a transformação (2.16) é gerada dando-se à base de tetradas uma rotação de Lorentz local conveniente — o que fica claro pelas relações (2.9) e (2.14):

$$L^A_b(x) \gamma^B = S(x) \gamma^A S^{-1}(x) \quad (2.17)$$

A condição (2.17), juntamente com  $\det S=1$ , implica que o spinor  $\psi = \psi^+ \gamma^0$  (cf. (2.31)), onde  $\gamma^0$  é a matriz constante de Dirac, se transforma como um spinor conjugado (2.10b), desde que (2.17) implica  $\gamma^0 S^+ \gamma^0 = S^{-1}$ . Deste modo as quantidades físicas construídas com  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  são invariantes sob (2.17). Notemos que as matrizes constantes  $\gamma^A$  são supostas não se alterar sob transformações que satisfazem (2.17), como usualmente.

Com relação às transformações de coordenadas (2.11), as matrizes (2.14) se transformam como um quadrivetor contravariante

$$\gamma^{1\mu}(x') = \frac{\partial x^{1\mu}}{\partial x^{\nu}} \gamma^{\nu}(x) \quad (2.18)$$

Devido ao fato de que as matrizes do grupo de transformações (2.10) são funções de ponto, a derivada de um spinor não se transforma como um spinor. Definimos então um novo tipo de derivada

$$\nabla_{\alpha} \psi^a(x) = \partial_{\alpha} \psi^a(x) - \Gamma_{\alpha}^a_b(x) \psi^b(x) \quad (2.19)$$

de tal forma que (2.19), sob o grupo (2.10), se transforme como

um spinor

$$\nabla_{\alpha} \psi^{a'} = S^a_b(x) \nabla_{\alpha} \psi^b(x) \quad (2.20)$$

Da lei de transformação (2.20) segue que  $\Gamma_{\alpha}$  se transforma como

$$\Gamma_{\alpha}^{\prime a}{}_b = S^a_d \Gamma_{\alpha}^d{}_f S^f_b + S^a_b |_{\alpha} (S^{-1})^d{}_b \quad (2.21)$$

ou

$$\Gamma_{\alpha}^{\prime} = S \Gamma_{\alpha} S^{-1} + S_{|\alpha} S^{-1} \quad (2.21)$$

Sob transformações de coordenadas, a derivada (2.19) de um spinor se transforma como um covetor. A derivada  $\nabla_{\alpha}$  é chamada derivada covariante de um spinor e as quantidades  $\Gamma_{\alpha}$  são chamadas os coeficientes de Fock-Ivanenko, afinidades spinoriais ou conexões internas <sup>23</sup>.

Por (2.10 a,b), a expressão

$$\psi_a \psi^a = \tilde{\psi} \psi$$

é um escalar por transformações (2.10), e isto implica (utilizando-se a propriedade padrão  $\nabla_{\alpha}(AB) = (\nabla_{\alpha}A)B + A(\nabla_{\alpha}B)$ ):

$$\nabla_{\alpha} \psi_a(x) = \partial_{\alpha} \psi_a(x) + \psi_b(x) \Gamma_{\alpha}^b{}_a(x) \quad (2.22)$$

ou

$$\nabla_{\alpha} \tilde{\psi} = \partial_{\alpha} \tilde{\psi} + \tilde{\psi} \Gamma_{\alpha} \quad (2.22)$$

A derivada covariante de um objeto com índices spinoriais e tensoriais será então generalizada para

$$\nabla_{\alpha}(f^{\beta a}) = \partial_{\alpha} f^{\beta a} + \{\alpha\beta\} f^{\beta a} - \Gamma_{\alpha}^a{}_d f^{\beta d} + \Gamma_{\alpha}^d{}_b f^{\beta a} \quad (2.23)$$

Impondo

$$\nabla_{\alpha} \gamma_{\mu} = \gamma_{\mu|\alpha} - \{\mu\alpha\} \gamma_{\mu} - \Gamma_{\alpha}^{\mu} \gamma_{\mu} + \gamma_{\mu} \Gamma_{\alpha}^{\mu} = 0 \quad (2.24)$$

(condição suficiente para  $\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$ , e portanto preservando a estrutura Riemanniana do espaço-tempo (notemos que  $\nabla_{\alpha} \delta^a{}_b = 0$ ), encontramos a seguinte expressão para  $\Gamma_{\alpha}$  <sup>11</sup>

$$\Gamma_{\alpha} \equiv \Gamma_{\alpha}^{FI} = A_{\alpha} \mathbb{1} - \frac{1}{8} \left[ \gamma^{\mu} \gamma_{\mu|\alpha} - \gamma_{\mu|\alpha} \gamma^{\mu} - \{\mu\alpha\} (\gamma^{\mu} \gamma_{\mu} - \gamma_{\mu} \gamma^{\mu}) \right] \quad (2.25)$$

onde  $A_{\alpha}$  é um campo vetorial real arbitrário (pode eventualmente ser interpretado como o potencial eletromagnético). Para neutrinos, tomamos  $A_{\alpha} = 0$ . Existem ainda outras arbitrariedades na determinação de  $\Gamma_{\alpha}$ . A imposição (2.24) é suficiente para garantir que  $\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$  em (2.15), mas não é, de forma nenhuma necessária. De fato, tomando

$$\nabla_{\alpha} \gamma_{\mu} = [V_{\alpha}, \gamma_{\mu}] \quad (2.26)$$

para qualquer  $V_{\alpha}$  pertencendo à algebra de Pauli das matrizes  $\gamma^{\mu}(x)$ , a estrutura Riemanniana do espaço-tempo é preservada ( $\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$ ) <sup>12</sup>. A afinidade spinorial  $\Gamma_{\mu}$ , por (2.26) deve satisfazer



$$\gamma_{\nu|\mu} - \{\mu\nu\}^\varepsilon \gamma_\varepsilon - \Gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \Gamma_\mu = V_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu V_\mu$$

Contraindo esta expressão, respectivamente, com  $\gamma^\nu$  à esquerda e  $\gamma^\nu$  à direita, e subtraindo uma da outra obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu = & -\frac{1}{2} \left[ \gamma^\nu \gamma_{\nu|\mu} - \gamma_{\nu|\mu} \gamma^\nu - \{\mu\nu\}^\varepsilon (\gamma^\nu \gamma_\varepsilon - \gamma_\varepsilon \gamma^\nu) \right] - V_\mu \\ & + \frac{1}{4} (\gamma^\nu \Gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma^\nu V_\mu \gamma_\nu) \end{aligned}$$

ou

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu^{\text{FI}} - V_\mu + \frac{1}{4} (\gamma^\nu \Gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma^\nu V_\mu \gamma_\nu)$$

Uma solução possível para  $\Gamma_\mu$  é

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu^{\text{FI}} - V_\mu$$

desde que podemos verificar diretamente que, para este valor,

$$\gamma^\nu \Gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma^\nu V_\mu \gamma_\nu = 0$$

E a derivada covariante (2.19) se expressa

$$\nabla_\alpha \psi = \partial_\alpha \psi - \Gamma_\alpha^{\text{FI}} \psi + V_\alpha \psi$$

Escrevendo  $V_\alpha(x)$  da forma

$$V_\alpha(x) = A_\alpha(x) \mathbb{1} + B_{\alpha\beta}(x) \gamma^\beta(x) + C_{\alpha\beta\gamma}(x) \gamma^{[\beta} \gamma^{\gamma]}(x) + \dots \quad (2.27)$$

onde  $A_\alpha$ ,  $B_{\alpha\beta}(x)$ , etc. são funcionais da métrica, não temos, em geral, critério para decidir entre (2.24) e (2.26). A escolha (2.24), porém, parece ser a mais simples no tratamento da interação gravitação-neutrino (por exemplo, o tensor momentum-energia do neutrino em interação com a gravitação, para (2.24) tem a sua forma da Relatividade Restrita, a menos da substituição (2.28)). No que se segue, a nossa escolha será (2.24) onde  $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^{\text{FI}}$  é dado por (2.25) com  $A_\alpha = 0$ .

Com a noção de derivada covariante (2.23) em relação a transformações de coordenadas e transformações de Lorentz locais, podemos generalizar a equação de Dirac do espaço de Minkowski para uma variedade Riemanniana, pela substituição usual (acoplamento mínimo)

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu \quad (2.28)$$

Assim, a equação de Dirac covariante sob os grupos de Lorentz local (2.10) e de transformações de coordenadas (2.11) é dada por

$$i \gamma^\mu(x) \nabla_\mu \psi - m \psi = 0$$

ou

$$i \gamma^\mu(x) (\partial_\mu - \Gamma_\mu) \psi - m \psi = 0$$

A equação de Dirac para o neutrino ( $m=0$ ) fica

$$\gamma^\mu(x) (\partial_\mu - \Gamma_\mu) \psi = 0 \quad (2.29)$$

A equação de Dirac para o neutrino (2.29) e sua conjugada podem ser derivadas do princípio variacional

$$\delta \int \sqrt{-g} L d^4x = 0$$

por variação independente de  $\bar{\psi}$  e  $\psi$ , ou, equivalentemente, das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial \psi} (\sqrt{-g} L) - \partial_{\mu} \frac{\partial}{\partial \psi_{,\mu}} (\sqrt{-g} L) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} (\sqrt{-g} L) - \partial_{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{,\mu}} (\sqrt{-g} L) = 0$$

onde

$$L = i \left\{ \bar{\psi} \gamma^{\alpha(x)} \nabla_{\alpha} \psi - \nabla_{\alpha} \bar{\psi} \gamma^{\alpha(x)} \psi \right\} \quad (2.30)$$

Aqui  $g$  é o determinante da métrica e  $\bar{\psi}$  é o spinor conjugado de Pauli

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^0 \quad (2.31)$$

$\psi^{\dagger}$  indica o hermitiano conjugado e  $\gamma^0$  é a matriz constante de Dirac. Em termos da base local, a equação de Dirac (2.29) pode ser escrita

$$\gamma^A \nabla_A \psi = 0$$

onde  $\gamma^A$  são as matrizes de Dirac constantes e

$$\nabla_A = e_{(A)}^{\alpha} \nabla_{\alpha}$$

Equações Acopladas de Einstein-Dirac

A interação gravitação-neutrino, onde levamos em conta que o campo de neutrinos não somente é atuado pelo campo gravitacional (cf. eq. (2.29)) mas também é fonte de curvatura, é descrita pelo conjunto de equações acopladas de Einstein-Dirac. Elas podem ser obtidas da densidade de Lagrangeana<sup>(\*)</sup>

$$\sqrt{-g} \left( -\frac{1}{k} R + L \right) \quad (2.32)$$

onde R é o escalar de curvatura e L é dado por (2.30). Desde que R não depende de  $\psi$ , pela variação independente de  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  na ação correspondente a (2.32), obtemos a equação de Dirac (2.29) e a conjugada associada, respectivamente. O princípio variacional

$$\delta \int \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{k} R + L \right) d^4x = 0$$

para variações de  $g_{\alpha\beta}$  leva às equações de campo de Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -k T_{\alpha\beta} \quad (2.33)$$

onde o tensor momentum-energia  $T_{\alpha\beta}$  é definido, para campos spinoriais, por

$$\int T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x = \delta \int L \sqrt{-g} d^4x \quad (2.34)$$

---

(\*) K é a constante de Einstein; na nossa convenção  $K = 8\pi G$ .

Devemos notar que a variação de  $g_{\alpha\beta}$  se reflete em variação das  $\gamma_\alpha(x)$  (de modo que a relação (2.15) seja preservada) e em correspondentes variações dos coeficientes de Fock-Ivanenko (2.25). O tensor momentum-energia para o neutrino é então dado por

$$T_{\alpha\beta} = i \left\{ \bar{\psi} \gamma_\alpha \nabla_\beta \psi + \bar{\psi} \gamma_\beta \nabla_\alpha \psi - \nabla_\alpha \bar{\psi} \gamma_\beta \psi - \nabla_\beta \bar{\psi} \gamma_\alpha \psi \right\} \quad (2.35)$$

Notemos que a invariância da ação

$$\int \sqrt{-g} i \left\{ \bar{\psi} \gamma^\alpha(x) \nabla_\alpha \psi - \nabla_\alpha \bar{\psi} \gamma^\alpha(x) \psi \right\} d^4x \quad (2.36)$$

sob transformações de coordenadas (2.11) implica

$$\nabla_\nu T_{\mu}{}^\nu = T_{\mu}{}^\nu{}_{;\nu} = 0 \quad (2.37)$$

A confirmação disto pode ser feita utilizando-se as relações

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi + \frac{1}{4} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma R_{\mu\nu\rho\sigma} \psi = 0$$

$$\gamma^\alpha \nabla_\alpha \nabla_\beta \psi + \frac{1}{2} \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\sigma R_{\alpha\rho\beta\sigma} \psi = 0$$

quando calcular (2.37) explicitamente. Podemos também mostrar que a simetria

$$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$$

que aparece explícita na forma (2.35), é consequência de que a ação (2.37) é identicamente invariante sob as transformações de Lorentz locais.

Pela equação de Dirac (2.29) para o neutrino, po

demos verificar diretamente que o traço do tensor momentum-energia se anula. Assim as equações acopladas de Einstein-Dirac (2.29), (2.33) com (2.35) podem ser escritas

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha\beta} &= -\kappa T_{\alpha\beta} \\
 \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi &= 0 \\
 T_{\alpha\beta} &= i \left\{ \bar{\psi} \gamma_{(\alpha} \nabla_{\beta)} \psi - \nabla_{(\alpha} \bar{\psi} \gamma_{\beta)} \psi \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.38}$$

O conjunto de equações (2.38) constitui a base do estudo da interação dos campos gravitacional e de neutrinos e cujas soluções, correspondendo a algumas situações físicas onde esta interação é dominante, serão objeto de estudo do presente trabalho.

Do ponto de vista de cálculo, o sistema de equações acopladas de Einstein-Dirac é extremamente complicado. No entanto, podemos nos utilizar do cálculo de formas diferenciais, devido a Cartan<sup>26</sup>, um instrumento poderoso da moderna geometria diferencial e que se revelou bastante apropriado no tratamento de muitos problemas na teoria da gravitação de Einstein<sup>27</sup>.

Já no caso da equação de Dirac em espaços curvos, vimos que um formalismo envolvendo referenciais locais (tetradas) é não somente útil mas praticamente inevitável. Torna-se então natural usar os mesmos referenciais para descrever o campo de Dirac no espaço curvo e o próprio espaço curvo. Em outras palavras, descrevendo a estrutura do espaço-tempo em termos dos referenciais locais de Cartan — base do cálculo de formas diferenciais de Cartan — a equação de Dirac pode ser formulada

mais simplesmente e mais diretamente que em qualquer outra descrição do espaço-tempo <sup>10</sup>. Além disso, neste formalismo, todos os cálculos se tornam diretos e mais simples. Uma breve revisão do formalismo de Cartan será feita no Apêndice 1.

Com a base local (2.3), satisfazendo (2.5) podemos introduzir simplificações importantes em nossas fórmulas:

A afinidade spinorial para o neutrino

$$\Gamma_{\alpha} = -\frac{1}{8} \left[ \gamma^{\mu} \gamma_{\mu|\alpha} - \gamma_{\mu|\alpha} \gamma^{\mu} - \left\{ \begin{matrix} S \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} (\gamma^{\mu} \gamma_S - \gamma_S \gamma^{\mu}) \right]$$

pode ser escrita

$$\Gamma_{\alpha} = -\frac{1}{8} \left\{ e_{(A)}^{\mu} e_{\mu(B)|\alpha} - \left\{ \begin{matrix} S \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} e_{(A)}^{\mu} e_{S(B)} \right\} (\gamma^A \gamma^B - \gamma^B \gamma^A)$$

ou

$$\Gamma_{\alpha} = -\frac{1}{8} e_{(A)}^{\mu} e_{\mu(B)|\alpha} (\gamma^A \gamma^B - \gamma^B \gamma^A) \quad (2.39)$$

Definindo os coeficientes de rotação de Ricci por

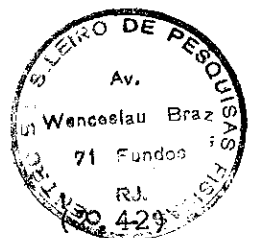
$$\gamma_{ABC} = -e_{\beta(A)|\gamma} e_{(B)}^{\beta} e_{(C)}^{\gamma} \quad (2.40)$$

que satisfaz por (2.5)

$$\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC} \quad (2.41)$$

podemos reescrever (2.39) como

$$\Gamma_{\alpha} = -\frac{1}{4} \gamma_{ABC} \gamma^A \gamma^B e_{\alpha}^{(C)}$$



ou, denotando  $\Gamma_c = e_{(c)}^\alpha \Gamma_\alpha$

$$\Gamma_c = -\frac{1}{4} \gamma_{ABC} \gamma^A \gamma^B \quad (2.43)$$

Assim, uma vez obtidos os coeficientes de rotação de Ricci diretamente do cálculo de formas, os coeficientes de Fock-Ivanenko  $\Gamma_A$  são imediatamente dados por (2.43). A equação de Dirac para o neutrino fica explicitamente

$$\gamma^A e_{(A)}^\alpha \partial_\alpha \psi + \frac{1}{4} \gamma_{MNA} \gamma^A \gamma^M \gamma^N \psi = 0 \quad (2.44)$$



### 3. COSMOLOGIA DE NEUTRINOS

Em 1965 Penzias e Wilson<sup>7</sup> descobriram uma radiação de micro-ondas residual (background), altamente isotrópica, que correspondia a uma temperatura de radiação de fons da ordem de  $3^{\circ}\text{K}$ . Observações posteriores<sup>8</sup> da radiação de background numa larga faixa de comprimentos de onda ( $75\text{m} > \lambda > 3\text{mm}$ ) são consistentes com um espectro de radiação de corpo negro, de temperatura de  $2.7^{\circ}\text{K}$ . O alto grau de isotropia desta radiação e seu caráter de radiação de corpo negro são hoje considerados como uma evidência poderosa de que o universo teve uma fase inicial quente (origem big-bang<sup>29</sup>). Em vista disto, e análogo à existência de uma era dominada pela radiação de fons<sup>(\*)</sup>, podemos levantar a possibilidade da existência de uma era dominada por neutrinos, representada por um gás de neutrinos incluindo todo o Cosmos<sup>29</sup> e sendo a fonte de sua curvatura. No entanto, devido à seção de choque muito pequena do neutrino com a matéria, não houve até agora nenhuma evidência experimental de tal gás de neutrinos.

Do ponto de vista teórico, aparecem muitas dificuldades quando se tenta achar uma solução cosmológica das equações acopladas de Einstein-Dirac (2.38), correspondendo a

---

(\*) Uma era dominada pela radiação de fons corresponde a uma fase da história do Universo onde a radiação de fons é a fonte dominante da curvatura. O modelo de Friedmann, que fornece uma boa descrição da geometria do Universo no seu estado atual, prevê naturalmente que o gás de fons (radiação de background) foi dominante para a curvatura do universo numa fase anterior à atual<sup>28</sup>.

um universo cheio de neutrinos e sendo sua única fonte de curvatura. É bem conhecido<sup>30</sup> que modelos cosmológicos tipo Friedmann não admitem neutrinos como fonte. Em 1966 Brill e Cohen<sup>10</sup> mostraram que um campo de neutrinos gera uma curvatura que não é consistente com um universo do tipo Taub<sup>31</sup>. Para uma grande classe de universos homogêneos, pode-se também mostrar a incompatibilidade de neutrinos como única fonte de curvatura.

Neste capítulo, apresentamos uma solução para este problema<sup>32</sup>, construindo-se uma classe de modelos cosmológicos compatíveis com neutrinos como fonte, e suas propriedades são estudadas.

As equações não acopladas de Einstein-Dirac (2.38), escritas na base de tetradas são

$$R_{AB} = -\kappa T_{AB} \quad (3.1a)$$

$$\gamma^A \nabla_A \psi = 0 \quad (3.1b)$$

$$T_{AB} = i \left\{ \bar{\psi} \gamma_{(A} \nabla_{B)} \psi - \nabla_{(B} \bar{\psi} \gamma_{A)} \psi \right\} \quad (3.1c)$$

onde a derivada covariante  $\nabla_A$  é dada por

$$\nabla_A \psi = e_{(A)}^\alpha \partial_\alpha \psi - \Gamma_A \psi$$

com  $\Gamma_A$ , dado por (2.43),

$$\Gamma_A = -\frac{1}{4} \gamma_{MNA} \gamma^M \gamma^N$$

Na convenção que estamos usando, escolhemos as matrizes de Dirac constantes  $\gamma^M$  da forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\gamma^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

$\{1, \sigma^k\}$  são a identidade  $2 \times 2$  e as 3 matrizes de Pauli hermitianas. Elas satisfazem

$$(\gamma^0)^2 = -(\gamma^k)^2 = \mathbb{1} \quad , \quad \gamma^{A+} = \gamma^0 \gamma^A \gamma^0 \quad (3.3)$$

Em nossa solução, escolhemos o spinor  $\psi$  na forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \sigma^1 \varphi(t) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

onde  $\sigma^1$  é a matriz de Pauli constante e onde  $\varphi$  é um spinor arbitrário de duas componentes, dependendo somente da coordenada  $t$ . Tomamos um elemento de linha da forma

$$ds^2 = dt^2 - 2A(t) dz dt - C^2(t)(dx^2 + dy^2) \quad (3.5)$$

As componentes não-nulas das tetradas  $e_{\alpha}^{(A)}$ , correspondentes à escolha (2.5), são

$$\begin{aligned} e_{0}^{(0)} &= 1 & e_{1}^{(0)} &= e_{1}^{(1)} = -A(t) \\ e_{2}^{(2)} &= e_{3}^{(3)} & &= C(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como convencionado, índices de tetradas são abaixados com a matriz de Minkowski  $\eta_{AB}$  e índices de coordenadas com a métrica

$g_{\alpha\beta} = e_{\alpha}^{(A)} c_{\beta}^{(B)} \eta_{AB}$ . As componentes inversas não-nulas de (3.6) são

$$\begin{aligned} e_{(0)}^0 &= -e_{(1)}^0 = 1 \\ e_{(1)}^1 &= -\frac{1}{A} & e_{(2)}^2 &= e_{(3)}^3 = \frac{1}{C} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Os coeficientes de rotação de Ricci  $\gamma_{MNA}$ , definidos em (2.40), podem ser calculados para (3.6). Este cálculo foi feito no Apêndice 1 utilizando-se o formalismo de formas diferenciais. Obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_{202} &= -\dot{C}/C & \gamma_{011} &= \dot{A}/A & \gamma_{122} &= -\dot{C}/C \\ \gamma_{303} &= -\dot{C}/C & \gamma_{010} &= -\dot{A}/A & \gamma_{133} &= -\dot{C}/C \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde  $\dot{\phantom{x}}$  denota derivada com relação a  $t$ . Todas as outras componentes são nulas.

Da expressão (2.43), levando em conta a simetria (2.41) e a propriedade padrão (2.13) das matrizes  $\gamma^A$ , encontramos para as conexões internas

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{A} \gamma^0 \gamma^1 \\ \Gamma_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{A} \gamma^0 \gamma^1 \\ \Gamma_2 &= -\frac{1}{2} \frac{\dot{C}}{C} (\gamma^0 \gamma^2 - \gamma^1 \gamma^2) \\ \Gamma_3 &= -\frac{1}{2} \frac{\dot{C}}{C} (\gamma^0 \gamma^3 - \gamma^1 \gamma^3) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Com as expressões (3.7) e (3.9), a equação de Dirac para  $\psi = \psi(t)$  se escreve

$$\begin{aligned}
 & (\gamma^0 - \gamma^1) \dot{\psi} - \gamma^0 \left( \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{A} \gamma^0 \gamma^1 \right) \psi + \gamma^1 \left( \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{A} \gamma^0 \gamma^1 \right) \psi \\
 & + \gamma^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\dot{C}}{C} (\gamma^0 \gamma^2 - \gamma^1 \gamma^2) \right) \psi + \gamma^3 \left( \frac{1}{2} \frac{\dot{C}}{C} (\gamma^0 \gamma^3 - \gamma^1 \gamma^3) \right) \psi = 0
 \end{aligned}$$

Com a escolha (3.4) do spinor  $\psi$ , usando (3.2), podemos verificar diretamente que

$$\gamma^0 \psi = \gamma^1 \psi \quad (3.10)$$

Usando (3.10) e as propriedades (2.13) e (3.3) das matrizes  $\gamma^A$  na equação de Dirac acima, verificamos que ela é identicamente satisfeita para o spinor (3.4) e a métrica (3.5), sem impor nenhuma restrição adicional sobre as funções  $A$  e  $C$  da métrica ou sobre o spinor  $\psi$ .

Devido à forma (3.4) do spinor, podemos também verificar que

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \psi &= 0 \\
 \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \psi &= 0 \\
 \bar{\psi} \gamma^2 \psi_{,\alpha} &= \bar{\psi} \gamma^2 \psi = 0 \\
 \bar{\psi} \gamma^3 \psi_{,\alpha} &= \bar{\psi} \gamma^3 \psi = 0
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Usando as propriedades (2.13), (3.3), (3.10) e (3.11) e a forma (3.9) dos coeficientes de Fock-Ivanenko para a métrica (3.5), podemos mostrar que as componentes não-nulas do tensor momentum-energia do campo de neutrinos, na base de tetradas (3.6), são dadas por

$$T_{00} = T_{11} = -T_{01} = 4i(\varphi^+ \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^+ \varphi) \quad (3.12)$$

As componentes do tensor de curvatura, bem como as componentes do tensor de Ricci da métrica (3.5) são calculadas no Apêndice 1, usando o formalismo de formas diferenciais. As componentes não-nulas  $R_{AB}$  do tensor de Ricci, na base (3.5), são

$$R_{00} = R_{11} = -R_{01} = -4\left(\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{C}}{C}\right) \quad (3.13)$$

Usando (3.12) e (3.13) nas equações de Einstein (3.1a), obtemos somente uma equação independente, que é

$$\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{C}}{C} = i\kappa(\varphi^+ \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^+ \varphi) \quad (3.14)$$

Como a equação de Dirac é automaticamente satisfeita para este caso, temos somente uma restrição (3.14) para as duas funções métricas A e C e o spinor  $\varphi$ . Se tivéssemos que selecionar campos de neutrinos com um único tipo de helicidade

$$\psi = \pm \gamma^5 \varphi \quad (3.15)$$

isto apareceria como uma restrição sobre as componentes de  $\varphi$ . De fato para helicidade direita  $\psi_R = +\gamma^5 \psi_R$ , o spinor a duas componentes pode ser escrito  $\phi_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\lambda+i\alpha)$  e para helicidade esquerda  $\psi_L = -\gamma^5 \psi_L$  o spinor é dado por  $\phi_L = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (\lambda+i\alpha)$ , onde  $\lambda$  e  $\alpha$  são funções de  $t$  que satisfazem (8) para um dado par de funções métricas  $A$  e  $C$ .

É importante notar que todas as componentes não-nulas do tensor de curvatura  $R_{ABCD}$  podem ser relacionadas de modo simples a  $R_{00}$ . De fato, nós temos

$$\begin{aligned} R_{0202} = R_{0303} = -R_{0212} = -R_{0313} = R_{1212} = R_{1313} \\ = -\frac{1}{2} R_{00} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Isto mostra claramente que o campo de neutrino é a causa real da curvatura, porque usando a equação de Einstein (3.14) podemos ver que  $R_{00}$  se anula quando a densidade  $\varphi^\dagger \varphi$  de neutrinos é zero. Este caso corresponde, por (3.16), ao limite de espaço-plano.

Uma vez obtida esta solução (3.4), (3.5), (3.14) vamos estudar com detalhes algumas propriedades de nossa métrica.

### Métrica conformalmente plana

Um cálculo direto, utilizando (3.16), mostra que todas as componentes do tensor de Weyl

$$\begin{aligned} C_{ABCD} = R_{ABCD} - \frac{1}{2} \eta_{AC} R_{BD} + \frac{1}{2} \eta_{AD} R_{BC} + \frac{1}{2} \eta_{BC} R_{AD} \\ - \frac{1}{2} \eta_{BD} R_{AC} \end{aligned}$$



se anulam (aqui usamos que  $R = 0$  para neutrinos). Deste modo podemos sempre encontrar uma transformação de coordenadas<sup>23</sup> que leva a métrica (3.5) na métrica de Minkowski multiplicada por uma função das coordenadas.

Esta propriedade vai ser muito importante para a quantização do campo de neutrinos  $\psi$  no espaço-tempo (3.5). De fato, pode-se mostrar, análogo ao caso de um campo escalar, que uma transformação conforme preserva a quantização canônica, isto é, as relações de comutação canônicas (cf. seção 5). Neste caso, a quantização sobre um espaço-tempo base curvo não apresenta problemas porque podemos quantizar sobre o espaço de Minkowski e fazer a transformação conforme correspondente.

### Isometrias

Dados  $p$ -vetores contravariantes  $\xi_p^\alpha(x)$ , eles geram por definição, um grupo de simetria da métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  se a derivada de Lie<sup>33</sup> de  $g_{\mu\nu}$  relativamente a cada um dos  $p$ -vetores é nula

$$\mathcal{L}_{\xi(P)} g_{\mu\nu} \equiv \sum_{(P)} \xi^\mu{}_{;\nu} + \sum_{(P)} \xi^\nu{}_{;\mu} = 0 \quad (3.17)$$

O grupo das transformações infinitesimais

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \epsilon \xi^\alpha(x)$$

é chamado grupo de simetria e os  $p$ -vetores que satisfazem independentemente (3.17) são chamados vetores de Killing<sup>34</sup>.

Assim, determinar as isometrias da métrica  $g_{\mu\nu}$  (grupo de simetria da métrica) corresponde a determinar todas



as soluções linearmente independentes da equação de Killing

$$\xi_{\mu\nu} + \xi_{\nu\mu} = 0 \quad (3.17)$$

A métrica (3.5) admite isometrias especificadas pelos seguintes vetores de Killing

(i)

$$\xi_{\mu}^{(1)} = (0, 0, a_1 y + a_2, -a_1 x + a_3) h(t) \quad (3.18)$$

onde  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são constantes arbitrárias e  $h$  deve satisfazer a equação

$$\dot{h} - 2 \frac{\dot{c}}{c} h = 0 \quad (3.19)$$

Este vetor de Killing gera rotações no plano x-y e translações em x e em y, como iremos ver mais tarde.

(ii)

$$\xi_{\mu}^{(2)} = (f(t)(b_1 y + b_2 x + b_3), 0, g(t), l(t)) \quad (3.20)$$

onde  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  são constantes arbitrárias e onde  $f$ ,  $g$  e  $l$  satisfazem às equações

$$\dot{f} - \frac{\dot{A}}{A} f = 0 \quad (3.21)$$

$$f \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{l} \end{pmatrix} - 2 \frac{\dot{c}}{c} \begin{pmatrix} g \\ l \end{pmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

Notemos que para  $g=l=0$ , este é um vetor de Killing nulo; caso contrário, é tipo-espaço.

As equações (3.18), (3.19) e (3.20) podem ser facilmente integradas e dão

$$\begin{aligned}
 h(t) &= q_1 C^2 \\
 f(t) &= q_2 A \\
 g(t) &= \left[ q_3 - b_2 q_2 \int \frac{A dt}{C^2} \right] C^2 \\
 e(t) &= \left[ q_4 - b_1 q_2 \int \frac{A dt}{C^2} \right] C^2
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  são constantes.

De modo a determinar os geradores independentes do grupo de isometria gerado por (3.18) e (3.20), é mais conveniente lidar com as componentes contravariantes dos vetores de Killing. Utilizando (3.23) e rearranjando as constantes convenientemente, temos

$$\xi_{(1)}^\mu = (0, 0, k_1 \gamma + k_2, -k_1 x + k_3) \tag{3.24}$$

$$\xi_{(2)}^\mu = (0, k_4 \gamma + k_5 x + k_6, k_7 - k_5 \lambda(t), k_8 - k_4 \lambda(t)) \tag{3.25}$$

onde  $k_i$ ,  $i=1 \dots 8$  são constantes arbitrárias e  $\lambda(t) = \int \frac{A}{C^2} dt$ .

Para simplificar a notação, introduzimos uma nova coordenada  $x^0$  tal que

$$dx^0 = \frac{A}{C^2} dt, \quad \lambda(t) = x^0$$

A métrica assume a forma

$$ds^2 = \frac{C^4}{A^2} (dx^0)^2 - C^2 (dx^2 + dy^2 + 2 dx^0 dz)$$

e o vetor (3.25) é reescrito

$$\xi_{(2)}^\mu = (0, k_y \gamma + k_r x + k_6, k_7 - k_r x^0, k_x - k_y x^0) \quad (3.26)$$

Os geradores independentes do grupo podem agora ser imediatamente obtidos. Das expressões (3.24) e (3.25), podemos ver diretamente que o grupo de simetria da métrica é um grupo de 6 parâmetros independentes  $G_6$  e, correspondentemente, 6 geradores independentes. Utilizando a base local natural <sup>10-13</sup>  $\{\partial/\partial x^\alpha\}$ , podemos expressar os geradores como

$$X_i = \xi_{(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad i = 1 \dots 6$$

onde  $\xi_{(i)}^\mu$  são vetores independentes, contidos em (3.24) e (3.25), associados a cada parâmetro independente  $k_i$ . Temos

$$\begin{aligned} X_1 &= \gamma \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial \gamma} & X_4 &= \gamma \frac{\partial}{\partial z} - x^0 \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x} & X_5 &= x \frac{\partial}{\partial z} - x^0 \frac{\partial}{\partial x} \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial \gamma} & X_6 &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Da álgebra (3.27) podemos extrair subálgebras correspondentes a subgrupos  $G_3$  que atuam sobre hipersuperfícies 3-dimensional do espaço-tempo (3.5). Tais subgrupos vão permitir caracterizar, como veremos mais tarde, possíveis homogeneidades do modelo

cosmológico.

A estrutura completa da álgebra (3.27) do grupo  $G_6$  é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 [X_1, X_j] &= 0 & i, j &= 2, 3, 6 \\
 [X_1, X_2] &= X_3 & [X_1, X_6] &= 0 & [X_3, X_4] &= X_6 \\
 [X_1, X_3] &= -X_2 & [X_2, X_4] &= 0 & [X_3, X_5] &= 0 \\
 [X_1, X_4] &= -X_5 & [X_2, X_5] &= X_6 & [X_4, X_6] &= 0 \\
 [X_1, X_5] &= X_4 & [X_4, X_5] &= 0 & [X_5, X_6] &= 0
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Os seguintes subgrupos de  $G_6$  são possíveis:

- (i) De (3.27) podemos extrair uma única subálgebra de 5 elementos, correspondendo ao único subgrupo  $G_5$  de  $G_6$ . Consiste de todos os  $X_i$ , com exceção de  $X_1$ .
- (ii) Podemos ter 6 diferentes subgrupos de 4-parâmetros. Eles têm as seguintes estruturas:

- (a)  $(X_2, X_3, X_6, X_1)$
- (b)  $(X_6, X_1, X_5, X_4)$
- (c)  $(X_2, X_3, X_6, X_5)$
- (d)  $(X_2, X_3, X_6, X_4)$
- (e)  $(X_2, X_6, X_5, X_4)$
- (f)  $(X_3, X_6, X_5, X_4)$

(iii) Um exame simples das estruturas em (ii), tendo em conta (3.28), nos mostra que cada  $G_4$  tem pelo menos um subgrupo  $G_3$  Abeliano, que corresponderá, na classificação de Bianchi<sup>35</sup>, ao tipo Bianchi I. Temos, por exemplo,

(a.1)	$(X_2, X_3, X_6)$	Bianchi I	
(a.2)	$(X_2, X_3, X_1)$	Bianchi VII	
(b.1)	$(X_6, X_5, X_4)$	Bianchi I	
(b.2)	$(X_1, X_5, X_4)$	Bianchi VII	(3.29)
(c.1)	$(X_2, X_3, X_6)$	Bianchi I	
(c.2)	$(X_2, X_6, X_5)$	Bianchi II	
(c.3)	$(X_3, X_6, X_5)$	Bianchi I	

e assim sucessivamente.

Podemos notar que as estruturas (a) e (b) de  $G_4$  são isomorfas.

Na caracterização da métrica (3.5) como modelo cosmológico, a escolha mais simples do grupo  $G_6$  é supor o  $G_4$  com a estrutura  $(X_2, X_3, X_6, X_1)$  e com o subgrupo correspondente a (a.1);  $(X_2, X_3, X_6)$ .

Tal escolha de  $G_3$  como Bianchi tipo I — subgrupo Abeliano que atua transitivamente sobre uma hipersuperfície 3-dimensional — vai nos permitir obter homogeneidades do modelo.

Outros resultados, relativos às isometrias do modelo, nos foram comunicados pelo Dr. B. Kuchowicz e deverão ser publicados futuramente.

## Homogeneidade

Um espaço-tempo é dito ter uma homogeneidade espacial se existe um grupo (ou subgrupo) de isometrias  $G_k$  cujas órbitas em alguma parte do modelo, são hipersuperfícies tipo-espaço. A órbita de um ponto  $P$  do espaço-tempo sob o grupo  $G_k$  é o conjunto de pontos equivalentes a  $P$  módulo  $G_k$ .

Vamos estudar as órbitas do subgrupo Abeliano gerado pelos vetores de Killing (a.1),

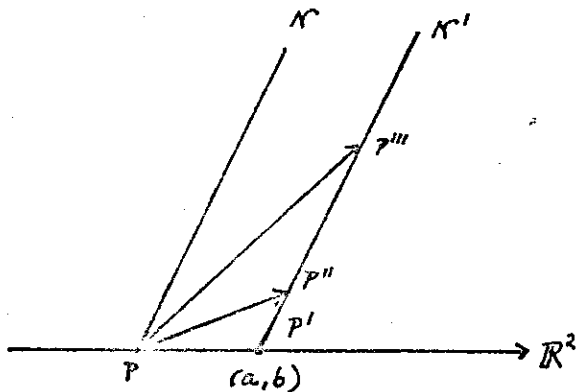
$$\vec{X}_2 = \partial/\partial x, \quad \vec{X}_3 = \partial/\partial y, \quad \vec{X}_6 = \partial/\partial z \quad (3.30)$$

que são os geradores das translações em  $x, y, z$ . A órbita de um ponto  $P$  do espaço-tempo pode ser gerada aplicando-se a  $P$  as translações descritas por  $(\vec{X}_2, \vec{X}_3, \vec{X}_6)$ , e tem claramente a topologia  $\mathbb{R}^2 \times N$  ( $N$  uma curva nula).

Um ponto  $P'$ , de uma vizinhança infinitesimal de  $P$  e pertencendo à órbita de  $P$ , pode ser descrito pelo vetor

$$\vec{PP}' = a \vec{X}_2 + b \vec{X}_3 + c \vec{X}_6$$

Desde que, por (3.18), (3.20), (3.25) e (3.26),  $(\vec{X}_2, \vec{X}_3, \vec{X}_6)$  são mutuamente ortogonais, os dois primeiros tipo-espaço e o último tipo-nulo, temos que  $\vec{PP}'$  é quase sempre tipo-espaço, exceto para  $a=b=0$ , quando então é um vetor nulo. Na figura que se segue, numa região infinitesimal de  $P$ , representamos 3 pontos da órbita de  $P$ .  $N'$  é uma curva nula, caracterizada pelo par de números  $(a, b)$ .



$P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$  pertencem à órbita de  $P$ . Os intervalos  $(PP')$ ,  $(PP'')$  e  $(PP''')$  são todos do tipo-espaço, mas o intervalo  $(P'P'')$ , por exemplo, é nulo, em primeira ordem em  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Assim, uma parte da órbita considerada é constituída por uma congruência de superfícies tipo-espaço 2-dim, geradas pelos vetores  $(\vec{X}_2, \vec{X}_3)$  de (3.30).

Podemos também usar a estrutura (a.2) para caracterizar homogeneidade espacial — neste caso temos somente órbitas 2-dim tipo-espaço.

De modo geral, as órbitas geradas pelas estruturas (3.29) de  $G_3$  são hiperfícies de homogeneidade (no máximo 3-dim), no sentido matemático de homogeneidade. Para modelos cosmológicos, somente as homogeneidades espaciais têm interesse (princípio de Copérnico estrito)<sup>36</sup> do ponto de vista observacional. O modelo cosmológico em questão apresenta uma congruência de hipersuperfícies de homogeneidade 2-dimensional tipo-espaço ao longo de linhas nulas.

### Geodésicas

Na interpretação da métrica (3.5) como um modelo cosmológico, temos que definir observadores fundamentais (como

ventes) e o tempo cosmológico do modelo. Para isto, vamos inicialmente integrar a equação da geodésica para alguns casos tipo-tempo e tipo-nulo.

A equação da geodésica pode ser escrita

$$-\frac{d}{ds} (g_{\mu\nu}(z) \dot{z}^\mu) + \frac{1}{2} g_{\rho\sigma\nu} \dot{z}^\rho \dot{z}^\sigma = 0 \quad (3.31)$$

onde  $g_{\mu\nu}(z)$  designa a métrica ao longo da geodésica e

$z^\mu = (t(s), z(s), x(s), y(s))$  denota as coordenadas de pontos sobre a geodésica, parametrizada com o parâmetro afim  $s$ ;  $\dot{z}^\mu \equiv dz^\mu/ds$ .

Uma integral primeira da equação (3.31) é dada por

$$g_{\mu\nu}(z) \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz^\nu}{ds} = \begin{cases} 1 & \text{se geodésica tipo-tempo} \\ 0 & \text{se geodésica nula} \end{cases} \quad (3.32)$$

Para a métrica (3.5) a equação (3.31) dá

$$\frac{d}{ds} (\dot{t} - A\dot{z}) + \left\{ \dot{A} \dot{t} \dot{z} + C\dot{C}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right\} \quad (3.31a)$$

$$\frac{d}{ds} (A\dot{t}) = 0 \quad (3.31b)$$

$$\frac{d}{ds} (C^2 \dot{x}) = 0 \quad (3.31c)$$

$$\frac{d}{ds} (C^2 \dot{y}) = 0 \quad (3.31d)$$



As equações (3.31b, c, d) podem ser imediatamente integradas

$$A\dot{t} = \alpha_0 \quad , \quad C^2\dot{x} = \alpha_1 \quad , \quad C^2\dot{y} = \alpha_2 \quad (3.33)$$

com  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  constantes. Substituindo (3.33) em (3.31a) e (3.32), obtemos

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\alpha_0}{A} - A\dot{z} \right) + \left( \frac{\dot{A}}{A} \alpha_0 \dot{z} + \alpha_1^2 \frac{\dot{C}}{C^3} + \alpha_2^2 \frac{\dot{C}}{C^3} \right) = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{\alpha_0^2}{A^2} - 2\alpha_0 \dot{z} - \frac{1}{C^2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Caso I: geodésicas tipo-tempo

$$\frac{\alpha_0^2}{A^2} - 2\alpha_0 \dot{z} - \frac{1}{C^2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 1$$

Temos então

$$\dot{z} = \frac{\alpha_0}{2A^2} - \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{2\alpha_0 C^2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \quad (3.36)$$

Substituindo (3.36) em (3.34), tendo em vista que A e C só dependem de t e usando, por (3.33) que

$$\frac{d}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} = \frac{\alpha_0}{A} \frac{d}{dt}$$

obtemos que (3.34) é identicamente satisfeita e

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= \frac{\alpha_0}{2A^2} - \frac{1}{2\alpha_0} - \frac{1}{2\alpha_0 C^2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \\
 \dot{t} &= \frac{\alpha_0}{A} \\
 \dot{x} &= \frac{\alpha_1}{C^2} \\
 \dot{y} &= \frac{\alpha_2}{C^2}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

é solução para uma congruência de geodésicas tipo-tempo  $V^\mu \parallel_\nu V^\nu = 0$ ,  $V^\mu V_\mu = 1$ , onde  $V^\mu$  é o campo vetorial tangente da do por

$$V^\mu \equiv \dot{z}^\mu = \left( \frac{\alpha_0}{A}, \frac{\alpha_0}{2A^2} - \frac{1}{2\alpha_0} - \frac{1}{2\alpha_0 C^2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2), \frac{\alpha_1}{C^2}, \frac{\alpha_2}{C^2} \right) \tag{3.38}$$

### Caso II: geodésicas nulas

Por procedimento análogo ao anterior obtemos

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \alpha_1/C^2, \quad \dot{y} = \alpha_2/C^2, \quad \dot{t} = \alpha_0/A \\
 \dot{z} &= \alpha_0/2A^2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/2\alpha_0 C^2
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\alpha_0}{A} - A\dot{z} \right) + \left\{ \alpha_0 \frac{\dot{A}\dot{z}}{A} + \frac{\dot{C}}{C^3} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \right\} = 0$$

Por simplicidade, tomamos  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . O conjunto (3.39) é solução para uma congruência de geodésicas nulas,  $V^\mu \parallel_\nu V^\nu = 0$ ,  $V^\mu V_\mu = 0$ , onde  $V^\mu$  é o vetor tangente dado por

$$V^\mu \equiv \dot{z}^\mu = \left( \frac{\alpha_0}{A}, \frac{\alpha_0}{2A^2}, 0, 0 \right) \tag{3.40}$$

Para o caso de geodésicas nulas, temos a relação

$$dz/dt = 1/2A \quad (3.41)$$

No estudo de modelos cosmológicos, é sempre feita uma suposição básica: a existência de um substrato material no Universo (Weltsubstrat)<sup>37</sup>. Tal substrato constituiria a base material para o conjunto de observadores fundamentais, que permite definir um sistema de coordenadas para descrever o modelo de universo. Na aproximação de fluido galático<sup>38</sup> — em que o conteúdo de galáxias do Universo é descrito como um fluido perfeito, e cujo tensor momentum-energia entra no lado direito das equações de Einstein, sendo responsável pela curvatura do Universo — tomamos sem ambiguidade o Weltsubstrat como o próprio fluido galático. Os observadores fundamentais estão ligados às partículas do fluido e, portanto, são ditos comoventes com o fluido. A congruência de linhas de universo de tais observadores (partículas do fluido) é então definida pelo campo de velocidade tipo-tempo  $V^\mu$ ,

$$V^\mu_{;\nu} V^\nu = 0 \quad V^\mu V_\mu = 1 \quad (3.42)$$

Nota: para uma fonte de curvatura tipo fluido perfeito, a densidade de matéria e a pressão medidas pelos observadores comoventes acima são denotadas por  $\rho$  e  $p$ , respectivamente. O tensor momentum-energia é dado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) V^\mu V^\nu - p g^{\mu\nu}$$

Um sistema de coordenadas comoventes  $\bar{e}$ , por defi

nição, aquele em que o campo de velocidades  $V^\mu$  assume o valor  $V^\mu = \delta_0^\mu$ . Neste caso, a coordenada temporal é o tempo próprio dos observadores comoventes ( $g_{00} = 1$ ), é definida globalmente e caracteriza o tempo cosmológico do modelo.

A condição necessária e suficiente para que o campo de velocidades  $V^\mu$  seja ortogonal a uma hipersuperfície em todos os pontos do espaço-tempo<sup>23</sup> é

$$V_{\mu\nu\nu} - V_{\nu\mu\nu} = 0 \quad (3.43)$$

Neste caso, podemos sempre fazer

$$g_{0\mu} = \delta_\mu^0 \quad (3.44)$$

por uma escolha conveniente de coordenadas, e o elemento de linha se reduz a

$$ds^2 = dt^2 + g_{ij}(\vec{x}, t) dx^i dx^j \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.45)$$

A congruência de hipersuperfícies tipo-espaço 3-dim  $\{t = \text{cte.}\}$  tem a geometria intrínseca dada por  $(g_{ij}(\vec{x}, t))$  e o campo de velocidades  $V^\mu$  assume a forma

$$V_\mu = t_{,\mu} = (1, \vec{0})$$

Para um universo cuja fonte de curvatura é radiação (neutrinos, fatores ou ondas gravitacionais), o Weltsub

trat  $\tilde{e}$  suposto existir <sup>(\*)</sup> mas de tal forma t $\tilde{e}$ ne que n $\tilde{a}$ o con-  
tribui para a curvatura. Neste caso, a escolha do sistema de  
observadores comoventes, quer dizer, da congru $\tilde{e}$ ncia de linhas  
de universo do Weltsubstrat,  $\tilde{e}$  algo amb $\tilde{g}$ ua,, embora restrita  
pela imposi $\tilde{c}$ o de que sejam geod $\tilde{e}$ sicas tipo-tempo do espa $\tilde{c}$ o-  
tempo.

Para o modelo cosmol $\tilde{o}$ gico com neutrinos, (3.4),  
(3.5), (3.14), a congru $\tilde{e}$ ncia mais geral de geod $\tilde{e}$ sicas tipo-tem-  
po  $\tilde{e}$  dada por (3.38). Sem perda de generalidade, vamos tomar  
 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  em (3.38) e teremos

$$V^\mu = \left( \frac{\alpha_0}{A}, \frac{\alpha_0}{2A^2} - \frac{1}{2\alpha_0}, 0, 0 \right) \quad (3.46)$$

como o campo de 4-velocidades do Weltsubstrat. As componentes  
covariantes s $\tilde{a}$ o dadas por

$$V_\mu = \left( \frac{\alpha_0}{2A} + \frac{A}{2\alpha_0}, -\alpha_0, 0, 0 \right) \quad (3.47)$$

e satisfazem  $\tilde{a}$  condi $\tilde{c}$ o (3.43). Podemos ent $\tilde{a}$ o tomar a congru $\tilde{e}$ nci-  
a de geod $\tilde{e}$ sicas definida por (3.346) como base para um siste-  
ma de coordenadas comoventes, no qual a m $\tilde{e}$ trica (3.5) assume a  
forma (3.35) e  $V_{\mu} = t_{,\mu} = (1, \vec{0})$ . Vamos considerar uma transfor-  
ma $\tilde{c}$ o de coordenadas  $\bar{X}^\alpha = \bar{X}^\alpha(x)$  dada por

$$\begin{aligned} \bar{t} &= g(t, x) & \bar{x} &= x \\ \bar{z} &= h(t, x) & \bar{y} &= y \end{aligned} \quad (3.48)$$

---

(\*) Este substrato  $\tilde{e}$  constituido, por exemplo, pelo fluido ga-  
l $\tilde{a}$ tico que se move ao longo de geod $\tilde{e}$ sicas do espa $\tilde{c}$ o-tempo.

onde  $(t, z, x, y)$  são as coordenadas onde a métrica do modelo cosmológico em questão tem a forma (3.5). As funções  $g$  e  $h$ , que aparecem em (3.48), deverão ser determinadas de modo que, no sistema  $(\bar{t}, \bar{z}, \bar{x}, \bar{y})$ , o vetor (3.46) e as componentes da métrica  $g^{0\mu}$ ,

$$V^\mu = \left( \frac{\alpha_0}{A}, \frac{\alpha_0}{2A^2} - \frac{1}{2\alpha_0}, 0, 0 \right), \quad g^{0\mu} = (0, -\frac{1}{A}, 0, 0) \quad (3.49)$$

tenham componentes

$$\bar{V}^\mu = (1, \vec{0}) \quad , \quad \bar{g}^{0\mu} = \delta_0^\mu \quad (3.50)$$

respectivamente.

Sob a transformação (3.48), os objetos  $V^\mu$  e  $g^{\mu\nu}$  se transformam

$$\begin{aligned} \bar{V}^0 &= \dot{g} \frac{\alpha_0}{A} + g' \left( \frac{\alpha_0}{2A^2} - \frac{1}{2\alpha_0} \right) \\ \bar{V}^1 &= \dot{h} \frac{\alpha_0}{A} + h' \left( \frac{\alpha_0}{2A^2} - \frac{1}{2\alpha_0} \right) \\ \bar{g}^{01} &= -(\dot{g}h' + g'\dot{h}) \frac{1}{A} - \frac{1}{A^2} g'h' \\ \bar{g}^{00} &= -(g')^2 \frac{1}{A^2} - 2g'\dot{g} \frac{1}{A} \\ \bar{g}^{11} &= -\frac{2\dot{h}h'}{A} - \left( \frac{h'}{A} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde  $\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t}$  e  $g' = \frac{\partial g}{\partial z}$ , por exemplo. Todas as outras componentes permanecem inalteradas. Para as expressões (3.51), vamos fazer a escolha (3.50). Obtemos

$$\bar{g}'^{01} = 0 = -(\dot{g}h' + g'\dot{h})\frac{1}{A} - \frac{1}{A^2}g'h'$$

$$\bar{V}' = 0 = \dot{h}\frac{\alpha_0}{A} + h'\left(\frac{\alpha_0}{2A^2} - \frac{1}{2\alpha_0}\right)$$

o que nos dá

$$\frac{\dot{h}}{h'} = \left(\frac{A}{2\alpha_0^2} - \frac{1}{2A}\right) \quad (3.52)$$

e

$$\frac{\dot{g}}{g'} + \frac{\dot{h}}{h'} + \frac{1}{A} = 0 \quad (3.53)$$

Usando (3.52) em (3.53) obtemos

$$\frac{\dot{g}}{g'} = -\left(\frac{1}{2A} + \frac{A}{2\alpha_0^2}\right) \quad (3.54)$$

$$\bar{g}'^{00} = 1 = -(g')^2\frac{1}{A^2} - 2g'\dot{g}\frac{1}{A}$$

ou

$$-\frac{1}{A^2} - 2\frac{\dot{g}}{g'}\frac{1}{A} = \frac{1}{(g')^2} \quad (3.55)$$

Substituindo (3.54) em (3.55) obtemos

$$(g')^2 = \alpha_0^2 \quad \text{ou} \quad g' = \pm \alpha_0 \quad (3.56)$$

E, de (3.54)

$$\dot{g} = \mp \left( \frac{\alpha_0}{2A} + \frac{A}{2\alpha_0} \right) \quad (3.57)$$

$\bar{V}^0$  fica então determinado univocamente: substituindo (3.56) e (3.57) na expressão de  $\bar{V}^0$ , obtemos

$$\bar{V}^0 = \mp \left( \frac{\alpha_0}{2A} + \frac{A}{2\alpha_0} \right) \frac{\alpha_0}{A} \pm \alpha_0 \left( \frac{\alpha_0}{2A^2} - \frac{1}{2\alpha_0} \right) = \mp 1$$

Assim,  $\bar{V}^0 = +1$  fixa em (3.56) e (3.57) as escolhas

$$g' = -\alpha_0 \quad , \quad \dot{g} = \frac{\alpha_0}{2A} + \frac{A}{2\alpha_0}$$

A componente  $\bar{g}^{11}$  da métrica fica então

$$\bar{g}^{11} = - (h')^2 \left\{ \frac{2}{A} \frac{\dot{h}'}{h'} + \frac{1}{A^2} \right\}$$

E, substituindo (3.52), temos

$$\bar{g}^{11} = - \left( \frac{h'}{\alpha_0} \right)^2$$

Assim, com a escolha (3.50) o sistema de coordenadas comov<sub>en</sub>tes (3.48) fica determinado a menos de  $h'$ , que deve satisfazer a condição de integrabilidade (3.52). Uma escolha simples pos<sub>s</sub>ível é

$$h' = \text{constante} = \beta_0$$

o que nos dá



$$\bar{g}^{11} = -(\beta_0/\alpha_0)^2 \quad (3.58)$$

e as transformações (3.48), neste caso, têm a forma

$$\begin{aligned} \bar{t} &= m(t) - \alpha_0 z \\ \bar{z} &= n(t) + \beta_0 z \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde

$$\begin{aligned} m(t) &= \int (\alpha_0/2A + A/2\alpha_0) dt \\ n(t) &= \beta_0 \int (A/2\alpha_0^2 - 1/2A) dt \end{aligned}$$

A métrica (3.5), neste sistema de coordenadas, assume a forma

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^2 d\bar{z}^2 - C^2(\bar{t}, \bar{z})(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2) \quad (3.60)$$

com  $\bar{V}^\alpha = (1, \vec{0})$  tangente à congruência de geodésicas tipo-tempo da métrica.

### Expansão e anisotropia

Com o campo de velocidades do fluido galáctico (Weltsubstrat), dado por  $V^\mu = (1, \vec{0})$  no sistema de coordenadas (3.59), podemos calcular um parâmetro importante associado a este campo de velocidade — a expansão<sup>36,39</sup>, que tem uma interpretação imediata relativa à cinemática do fluido galáctico. O pa

râmetro de expansão<sup>(\*)</sup>, definido por

$$\theta = V^{\kappa}{}_{;\kappa} \quad (3.61)$$

mede a taxa de variação de um dado volume espacial do fluido, ao longo de sua linha de universo definida por  $V^{\mu}$ , isto é, mede a expansão cosmológica do fluido galático ao longo de suas linhas de universo. Um cálculo direto nos dá

$$\theta = 2 \dot{C}/C \quad (3.62)$$

onde  $\dot{C} = \partial C(\bar{z}, \bar{t}) / \partial \bar{t}$ . De (3.60) podemos ver que a expansão é isotrópica no plano  $\bar{x}-\bar{y}$ , com valor (3.23) e que não existe expansão cosmológica ao longo do eixo  $\bar{z}$ . Por isso, o eixo  $\bar{z}$  constitui um eixo de anisotropia do modelo. Para ver que a expansão é isotrópica no plano  $\bar{x}-\bar{y}$ , considere um círculo no plano  $\bar{z} = \text{cte.}$  num dado instante de tempo  $\bar{t}$ ; podemos mostrar que este círculo não se deforma com  $\bar{t}$  variando (equivalentemente, ao longo das linhas de universo definidas por  $V^{\mu}$ ), embora seu raio se expanda.

Em resumo, nesta seção foi apresentada uma classe de modelos cosmológicos, correspondendo a um universo contendo somente neutrinos com helicidade direita e/ou esquerda. Tal conjunto de soluções é não estacionário, com superfícies 2-dim de homogeneidade e isotropia. A existência de um eixo de aniso

---

(\*) Se  $\theta < 0$ , teremos uma expansão negativa, ou uma contração. No texto, o termo expansão engloba as duas situações.

tropia e a não existência de um subgrupo de isometrias  $G_3$  atuando transitivamente sobre hipersuperfícies 3-dim tipo-espaço, limitam muito a possibilidade de tais soluções corresponderem a uma descrição realista da geometria de uma fase da história do Universo.

Notas:

1) Neutrinos fantasmas: são soluções da equação de Dirac para neutrinos numa dada métrica, cujo tensor momentum-energia correspondente é identicamente nulo, embora a corrente  $j^\mu$  seja diferente de zero e, em particular,  $\psi^+\psi > 0$ . Tais soluções foram pela primeira vez discutidas <sup>40</sup> numa métrica com simetria plana, mas pode-se mostrar <sup>41</sup> que grande parte de modelos cosmológicos do tipo Bianchi tem não só neutrinos fantasmas como fermions fantasmas. No caso da métrica (3.5), o spinor (3.4) é uma solução de neutrino fantasma se tomarmos o 2-spinor  $\phi$  da forma  $\phi = f(t) \chi_{(0)}$  onde  $f(t)$  é uma função real e  $\chi_{(0)}$  um 2-spinor constante. Com esta escolha, as componentes do tensor momentum-energia (3.12) se anulam mas  $\rho \equiv \psi^+\psi = 2 f^2 \chi_{(0)}^+ \chi_{(0)}$  e  $j^\mu = (\rho, \rho, 0, 0)$ . Uma base de neutrinos-fantasmas pode ser utilizada para expandir qualquer solução (3.4) de neutrinos <sup>42</sup>. Considere a base de soluções-fantasma

$$\varphi_k = \alpha_k(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \varphi_k = \beta_k(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  são funções reais. Podemos expandir uma solução qualquer  $\varphi$  como

$$\psi = \sum_K a_K \alpha_K(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_K \beta_K(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

onde  $(a_K, b_K)$  são coeficientes complexos a serem determinados. Embora os  $\alpha_K$  sejam soluções-ghost na métrica (3.5), (3.63) não mais vai ser uma solução-ghost, desde que

$$i(\dot{\psi}^\dagger \psi - \psi^\dagger \dot{\psi}) = i \sum_{KK'} a_K^* a_{K'} (\dot{\alpha}_K \alpha_{K'} - \dot{\alpha}_{K'} \alpha_K) + b_K^* b_{K'} (\dot{\beta}_K \beta_{K'} - \dot{\beta}_{K'} \beta_K)$$

2) A solução (3.4), (3.5), (3.14) das equações acopladas de Einstein-Dirac poderia ser interpretada como uma onda plana gravitacional acoplada com neutrinos. Isto nos é sugerido, em parte, por algumas isometrias em  $G_6$ , especificamente (cf. (3.27)) as translações em  $x$  e  $y$ , a rotação no plano  $x$ - $y$  e a translação ao longo da direção  $z$ , ortogonal ao plano  $x$ - $y$ .

Consideremos a métrica (3.5)

$$ds^2 = dt^2 - 2A(t)dt dz - C^2(t)(dx^2 + dy^2)$$

Introduzindo uma nova variável  $v$  por

$$dz = \frac{1}{2}(dv - dt)$$

temos

$$ds^2 = (1-A)dt^2 - A dv dt - C^2(dx^2 + dy^2)$$

Fazendo as transformações de coordenadas

$$x = \frac{X}{C(T)} \quad , \quad y = \frac{Y}{C(T)} \quad , \quad t = T$$

$$v = V + \dot{C}/AC (X^2 + Y^2)$$

obtemos

$$ds^2 = \left\{ (1+A) - \left( \frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{C}}{C} \right) (X^2 + Y^2) \right\} dT^2 - A dT dV - dX^2 - dY^2 \quad (3.64)$$

Usando a equação de campo (3.14), (3.64) pode ser escrito

$$ds^2 = \left\{ (1+A) + i(\dot{\varphi}^+ \varphi - \varphi^+ \dot{\varphi})(X^2 + Y^2) \right\} dT^2 - A dT dV - dX^2 - dY^2 \quad (3.65)$$

O coeficiente de  $dT^2$  em (3.65)

$$H = (1+A) + i(\dot{\varphi}^+ \varphi - \varphi^+ \dot{\varphi})(X^2 + Y^2)$$

satisfaz às equações de Einstein com neutrinos,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} = 2i(\dot{\varphi}^+ \varphi - \varphi^+ \dot{\varphi}) \quad (3.66)$$

Como (3.14) é uma única equação para  $A$ ,  $\phi$  e  $C$ , podemos ter  $A$  e  $\phi$  como arbitrárias e a métrica (3.65), solução das equações a copladas de Einstein-Dirac, pode ser considerada como uma generalização das soluções de ondas planas-gravitacionais de Ehlers e Kundt<sup>43</sup> correspondente a um campo gravitacional tipo onda-plana acoplado com um campo de radiação de neutrinos de ambos os tipos de helicidade.

4. NEUTRINOS EM CAMPOS GRAVITACIONAIS ESFERICAMENTE SIMÉTRICOS  
- SOLUÇÕES INTERIOR E EXTERIOR PARA UMA ESFERA DE FLUIDO  
EMITINDO NEUTRINOS

Atualmente considera-se que em alguns processos astrofísicos - como por exemplo em certos estágios do colapso gravitacional - pode haver uma emissão intensa de neutrinos [9]. Esta produção de neutrinos ocorre somente em regiões de campo gravitacional intenso, onde a Relatividade Geral deve ter um papel relevante. Uma tentativa de estudar estes estágios no esquema da Relatividade Geral deveria levar em conta não somente os efeitos dos campos gravitacionais não-estacionários da matéria sobre os neutrinos, mas também as reações sobre a matéria devidas aos campos gravitacionais associados com os neutrinos que escapam. Estas últimas poderiam ser importantes se uma fração significativa da massa total do sistema pudesse ser convertida em radiação de neutrinos.

Tratando neutrino fenomenologicamente como um fluido nulo - i.e., com um tensor momentum energia  $T^{\alpha\beta} \sim v^\beta v^\alpha, v^\alpha v_\alpha = 0$  - C.W. Misner (1965) [44] estudou o colapso gravitacional esfericamente simétrico de um fluido perfeito com produção de neutrinos. O tensor momentum-energia do fluido é suposto não se conservar localmente ( $T^\mu{}_\nu{}^\nu \neq 0$ ) devido à emissão de neutrinos. O tensor momentum-energia do neutrino (considerado como fluido nulo) também é suposto não se conservar localmente, mas o tensor momentum-energia total, soma dos tensores momentum-energia da esfera de fluido e do neutrino, se conserva. O trabalho se limi

ta à formulação das equações básicas e não considera nenhuma solução. Anteriormente, P.C. Vaidya (1951) [46], com um modelo análogo, obteve algumas soluções não-estáticas das equações de Einstein para esferas de fluido irradiando energia eletromagnética. Com o elemento de linha esfericamente simétrico mais geral

$$ds^2 = A^2 dt^2 - B^2 dr^2 - C^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.1)$$

(A, B e C funções de r e t) descrevendo a solução interior, Vaidya (et al.) [47] mostrou que o tensor momentum energia eletromagnético assume a forma do tensor para um fluido nulo, mas com derivada covariante nula. Além disso, ele considera que a radiação é em parte absorvida ao atravessar o meio. Embora ambos usem fluidos nulos para descrever a radiação (neutrinos ou ftons), a diferença essencial entre os tratamentos é: (i) em Vaidya, o tensor momentum-energia do fluido nulo satisfaz  $T_{(n)\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$  identicamente em (4.1) e é-se, então, levado a considerar a absorção da radiação pelo meio, que é um efeito de origem não-gravitacional. (ii) em Misner, o tensor momentum-energia do neutrino é, por definição, o de um fluido nulo mas  $T_{(n)\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} \neq 0$ , de tal forma que a soma dos tensores momentum-energia da matéria que se resfria e da radiação de neutrinos emitida satisfazem à lei de conservação local, com a matéria transparente para os neutrinos.

Nesta seção, nós estudamos um modelo análogo aos dois anteriores - uma distribuição limitada e esfericamente simétrica de um fluido perfeito emitindo neutrinos - com as seguintes suposições somente: os neutrinos são descritos microscopicamente, i.e., levamos em conta a descrição da interação em -

tre campos gravitacionais e de neutrinos de acordo com a seção 2; neutrinos, uma vez emitidos, tem somente interação gravitacional (matéria transparente para neutrinos); o modelo é solução das equações acopladas de Einstein-Dirac. Consideramos duas regiões distintas: I. região interior, constituída de uma distribuição de matéria e campo de neutrinos fluindo radialmente para fora e II. região exterior, somente neutrinos radialmente emitidos. As equações de Einstein e condições de junção das suas correspondentes soluções na superfície do fluido são suficientes para determinar propriedades substanciais do modelo. Soluções analíticas exatas são encontradas e suas propriedades discutidas. Ao examinar a região exterior, vamos tratar o problema, largamente discutido na literatura, de neutrinos não serem compatíveis com um campo gravitacional esfericamente simétrico. Um exame cuidadoso da questão vai nos permitir recolocar o problema e apresentar uma solução. A utilidade de spinores a 4-componentes neste caso parece natural.

#### O PROBLEMA EXTERIOR E A COMPATIBILIDADE DE NEUTRINOS COM CAMPOS GRAVITACIONAIS ESFERICAMENTE SIMÉTRICOS

A região exterior é suposta conter somente neutrinos em interação com o campo gravitacional. O tensor momentum-energia dos neutrinos é dado por (2.35)

$$T_{\mu\nu} = i \{ \bar{\psi} \gamma_{(\mu} \nabla_{\nu)} \psi - \nabla_{(\mu} \bar{\psi} \gamma_{\nu)} \psi \}$$

onde  $\psi$  satisfaz a equação de Dirac

$$\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = 0$$

na métrica do problema exterior. Desde que o problema é esferi-



camente simétrico e não-estacionário, e o traço do tensor momento-energia é nulo, tomamos uma métrica da classe  $[4N]_2$  na classificação Plebansky-Stachel<sup>[48]</sup>. A única solução conhecida das equações de Einstein pertencente à classe  $[4N]_2$  é a métrica de Schwarzschild radiante<sup>[49]</sup> que, em coordenadas  $(u, r, \theta, \varphi)$ , tem a forma

$$ds^2 = \alpha^2 du^2 + 2 du dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.2)$$

onde  $\alpha^2 = 1 - 2m(u)r^{-1}$ . Aqui  $u$  é uma coordenada  $(-\infty < u < +\infty)$  tal que  $u = \text{const.}$  define hipersuperfícies nulas. O vetor normal a estas hipersuperfícies

$$\begin{aligned} k_\alpha &= u_{,\alpha} = (1, \vec{0}) \\ k^\alpha &= g^{\alpha 0} = (0, 1, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

satisfaz

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad , \quad k_{\alpha\parallel\beta} k^\beta = 0 \quad (4.4)$$

As linhas nulas com tangente  $k^\alpha$  são geodésicas, ao longo das quais  $(u, \theta, \varphi)$  são constantes (cf. (4.3)). De fato, elas constituem uma congruência de geodésicas nulas, contidas nas hipersuperfícies  $u = \text{const.}$ , e parametrizadas com o parâmetro afim  $r$  (notemos que  $k^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial r}$  e, em particular,  $k^\alpha u_{,\alpha} = \frac{\partial u}{\partial r} = 0$ ). A coordenada  $x^1 = r$  pode então ser interpretada como uma distância de luminosidade no sentido usual<sup>[50]</sup>.

Para a métrica (4.2) vamos utilizar a base de tetradas  $e^{(a)}_\alpha(x)$ , dada por

$$\begin{aligned} e^{(0)}_0 &= \alpha & e^{(0)}_1 &= \alpha^{-1} \\ e^{(1)}_1 &= \alpha^{-1} & e^{(2)}_2 &= r \\ e^{(3)}_3 &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (4.5)$$

que satisfaz (2.5), i.e., em termos das variáveis  $\theta^A = e^A_\alpha dx^\alpha$ , temos

$$ds^2 = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B$$

Devido à simetria esférica do problema, vamos nos restringir a campos de neutrinos correspondendo a uma 4-corrente

$$j^\alpha = \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi \quad (4.6)$$

radialmente ao longo dos cones de luz de (4.2)<sup>(\*)</sup>. Então escolhemos  $\psi$  da forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \sigma^1 \varphi \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

onde  $\varphi$  é um 2-spinor a ser determinado e  $\sigma^1$  é a matriz constante de Pauli [21]. Com a escolha (4.7), a corrente (4.5) assume a forma

$$j^\alpha = (0, \alpha \beta, 0, 0) \quad (4.8)$$

onde  $\beta = 2 \varphi^\dagger \varphi$ . Os coeficientes de rotação de Ricci  $\gamma_{MNA}$ , definido em (2.40), podem ser calculados para (4.5). Este cálculo foi feito no apêndice 1 e obtemos as componentes não nulas

$$\begin{aligned} \gamma_{0,0} &= \alpha' + \dot{\alpha}/\alpha^2 & \gamma_{133} &= \alpha'/r \\ \gamma_{0,11} &= -\dot{\alpha}/\alpha^2 & \gamma_{233} &= \cot \theta \alpha'/r \\ \gamma_{122} &= \alpha'/r \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aqui  $\alpha' = \partial \alpha / \partial r$  e  $\dot{\alpha} = \partial \alpha / \partial u$ . Usando (4.9) em (2.43), e tendo em conta a simetria (2.41) e a propriedade padrão (2.13) das matri-

(\*) Isto é equivalente a supor que todos os neutrinos se movem radialmente quando emitidos, ou que somente neutrinos radialmente emitidos contribuem no tensor momentum-energia.

zes  $\gamma^A$ , encontramos para os coeficientes de Fock-Ivanenko

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= -\frac{1}{2} (\alpha' + \dot{\alpha}/\alpha^2) \gamma^0 \gamma^1 \\ \Gamma_1 &= -\frac{1}{2} \dot{\alpha}/\alpha^2 \gamma^0 \gamma^1 \\ \Gamma_2 &= -\frac{1}{2} \alpha/r \gamma^1 \gamma^2 \\ \Gamma_3 &= -\frac{1}{2} (\alpha/r \gamma^1 \gamma^3 - \cot \theta / r \gamma^2 \gamma^3)\end{aligned}\tag{4.10}$$

Notemos que o coeficiente de Fock-Ivanenko  $\Gamma_3$  depende de  $\theta$  e, portanto, tomaremos em (4.7)

$$\varphi = \varphi(u, r, \theta)$$

Com a convenção (3.2), (3.3) das matrizes  $\gamma^A$  e a propriedade do spinor (4.7),

$$\gamma^0 \psi = \gamma^1 \psi\tag{4.11}$$

a equação de Dirac (2.44), na base (4.10), se escreve

$$\gamma^0 (\alpha \partial/\partial r + \alpha'/2 + \alpha/r) \psi + \gamma^2 (r^{-1} \partial/\partial \theta + \cot \theta / 2r) \psi = 0$$

ou

$$(\alpha \partial/\partial r + \alpha'/2 + \alpha/r) \varphi + (r^{-1} \partial/\partial \theta + \cot \theta / 2r) \sigma^2 \sigma^1 \varphi = 0$$

$$(\alpha \partial/\partial r + \alpha'/2 + \alpha/r) \varphi + (r^{-1} \partial/\partial \theta + \cot \theta / 2r) \sigma^1 \sigma^2 \varphi = 0$$

O par de equações acima se reduz a

$$\alpha \varphi' + \left(\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha}{r}\right) \varphi = 0\tag{4.12a}$$

$$\partial \varphi / \partial \theta + \frac{1}{2} \cot \theta \varphi = 0\tag{4.12b}$$

Notemos que  $\dot{\varphi}$  não é determinada pela equação de Dirac e, por (4.12b),  $\varphi$  deve depender de  $\theta$  na forma

$$\varphi(u, r, \theta) = C_0 / (\sin \theta)^{1/2} \varphi(u, r)$$

A equação (4.12a) pode ser diretamente integrada, dando

$$\varphi(u, r) = \lambda(u) / r \alpha^{1/2}$$

onde  $\lambda(u)$  é um 2-spinor arbitrário.

Assim, o spinor (4.7) mais geral, solução da equação de Dirac para o neutrino na métrica (4.2), é dado por

$$\psi = \frac{C_0}{(\alpha \sin \theta)^{1/2} r} \begin{pmatrix} \lambda(u) \\ \sigma^1 \lambda(u) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

onde  $\lambda(u)$  é um 2-spinor arbitrário. Usando a expressão (4.13) na corrente (4.8), obtemos

$$j^\alpha = (0, \tau, 0, 0) \quad (4.14)$$

onde  $\tau = (C_0^2 / r^2 \sin \theta) \lambda^\dagger(u) \lambda(u)$ . Podemos verificar que, sob as transformações locais (2.10a,b) e (2.16), a corrente  $j^\alpha$  permanece invariante. Analogamente, usando (4.10) e (4.12a), as componentes não-nulas  $T_{AB}$  do tensor momentum-energia do neutrino na base (4.5) são calculadas<sup>(\*)</sup>

$$T_{00} = T_{11} = -T_{01} = \frac{4i}{\sin \theta} \frac{C_0^2}{r^2 \alpha^2} (\lambda^\dagger \dot{\lambda} - \dot{\lambda}^\dagger \lambda) \quad (4.15a)$$

$$T_{03} = -T_{13} = \frac{2}{\sin \theta} \frac{C_0^2 \cot \theta}{r^3 \alpha} (\lambda^\dagger \sigma^1 \lambda) \quad (4.15b)$$

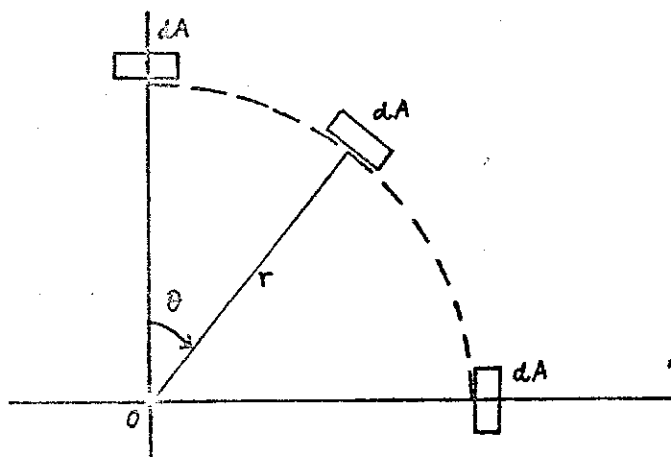
(\*) Devido à forma (4.7) do spinor  $\psi$ , as expressões  $\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \psi$  e  $\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \psi$  se anulam identicamente.

As expressões (4.14) e (4.15a,b) deixam claro porque tem sido amplamente afirmado na literatura [51,52,53] que neutrinos não são compatíveis (como fonte) com campos gravitacionais esfericamente simétricos. As componentes do tensor momentum-energia (4.15) dependem de  $\theta$  e o lado esquerdo das equações de Einstein,  $R_{\mu\nu}$ , depende somente de  $(u, r)$ . Vamos discutir em seguida porque esta incompatibilidade é aparente. Nossa análise é feita, sem perda de generalidade, no espaço-tempo esfericamente simétrico de Vaidya mas os resultados e as expressões são análogas para qualquer espaço-tempo esfericamente simétrico não-estacionário.

A dependência em ângulos de (4.15b) não é tão drástica, porque poderíamos considerar

$$\lambda^+ \sigma^1 \lambda = 0 \quad (4.16)$$

o que corresponde a campos de neutrinos com helicidade não definida. Estas componentes (4.15b) devem, de qualquer forma, ser nulas pelas equações de Einstein para (4.2). O fator crucial é  $1/\sin\theta$  que aparece tanto na corrente (4.14) como nas componentes relevantes (4.15a). Como já vimos anteriormente (cf.(4.10)), o coeficiente de FI  $\Gamma_3$  depende de  $\theta$  e, como a equação de Dirac contém  $\Gamma_3$  linearmente, o spinor solução deverá depender necessariamente de  $\theta$ . Porém, para um campo  $\psi$  associado a uma corrente radial (ao longo dos cones de luz), esta dependência é bastante sugestiva, porque é exatamente o fator  $1/\sin\theta$  que corrige áreas quando expressas num sistema de coordenadas esféricas. Isto pode ser visto mais claramente quando consideramos uma medida de um fluxo radial de partículas:



coloca-se um detetor de área efetiva  $dA$  com a janela perpendicular à direção do fluxo (perpendicular à linha detetor-origem da fonte, conforme na figura acima) segundo o ângulo  $\theta$  de medida. O detetor nos dá o número de partículas por unidade de tempo naquela direção  $dN(\theta)$ , ou o número de partículas por unidade de área e de tempo, quando se normaliza o fluxo para a área do detetor (equivalentemente, usamos sempre o mesmo detetor). Assim, para uma medida  $dN(\theta, \text{medido})$  na direção  $\theta$ , temos

$$dN(\theta, \text{medido}) = j_{(\theta)} dA \quad (4.17)$$

onde a relação (4.17) define a corrente medida  $j_{(\theta)}$ . Vamos relacionar estas quantidades com quantidades calculadas<sup>(\*)</sup>. Num sistema de coordenadas esféricas, os elementos de área para  $r$  constante estão relacionados por

$$\frac{dS(\theta)}{dS(\pi/2)} = \sin \theta$$

e, como as medidas são sempre feitas com a área do detetor normal à direção do fluxo,  $dA = dS(\pi/2)$  e

$$dS(\theta) = dA \sin \theta$$

---

(\*) Uma relação idêntica é obtida abaixo, entre quantidades (fluxos) calculadas e quantidades (fluxos) medidas, é considerada na referência [55].

Assim, em (4.17),

$$dN(\theta, \text{medido}) = j_{(0)}/\sin\theta \, dS(\theta) = j_{\text{calculado}}(r, \theta) \, dS(\theta)$$

que independe de  $\theta$  se  $j_{\text{calculado}}$  depende de  $\theta$  como  $1/\sin\theta$ , como é o caso de (4.14), que portanto corresponde a uma emissão isotrópica ou esfericamente simétrica. É neste sentido que entendemos simetria esférica da corrente spinorial (4.6) e não a definição matemática  $\mathcal{L}_{\xi} j^\alpha = 0$ , onde  $\{\xi^{(i)} \mid i=1, 2, 3\}$  são os vetores de Killing da métrica (4.2).

Notas:

1) o número total de partículas por unidade de tempo através de uma área, subentendida por um ângulo finito  $\alpha$ , a uma distância  $r$ , é dado por

$$N(\theta_0, \alpha) = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \alpha} \tau r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi \equiv \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \alpha} \sqrt{-g} \, j^r \, d\theta d\varphi$$

onde  $\tau$  é dado por (4.14). Para  $\alpha$  muito pequeno, medido a partir de  $\theta_0$ , temos

$$N(\theta_0) \simeq (\tau \sin\theta_0) r^2 d\theta d\varphi$$

e, pela definição (4.17),  $j_{(0)} = \tau \sin\theta$ , como esperado (\*).

2) Algumas simetrias do problema podem ser examinadas. Vamos considerar a métrica

$$ds^2 = \alpha^2 du^2 + 2du dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.18)$$

onde  $\alpha^2$  é uma função arbitrária de  $r$  e  $u$  (para  $\alpha^2 = 1 - 2m(u)r^{-1}$  temos a métrica de Vaidya (4.2)). O spinor da forma (4.7), solução geral da equação de Dirac em (4.18) é dado por (4.13) - com ten-

---

(\*) Notemos que a corrente globalmente conservada  $\sqrt{-g} \, j^\alpha$  ( $\partial_\alpha(\sqrt{-g} j^\alpha) = 0$ ) independe de  $\theta$  e é análoga a  $j_{(0)}$ .

tor momentum-energia correspondente, dependendo de  $\theta$  como em (4.15). Definimos uma transformação conforme sobre a esfera unitária

$$(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \rightarrow k^2(\theta)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.19)$$

Sob (4.19), a métrica (4.18) se transforma

$$ds^2 = \alpha^2 du^2 + 2 du dr - r^2 K^2(\theta)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.20)$$

Os coeficientes de Fock-Ivanenko calculados com (4.20) tem a mesma expressão que (4.10), exceto  $\Gamma_3$  que assume a forma

$$\Gamma_3 = -\frac{\alpha}{2r} \gamma^1 \gamma^3 + \frac{1}{2r} \left( \frac{K_\theta}{K^2} + \frac{\cot\theta}{K} \right) \gamma^2 \gamma^3$$

Vamos escolher (4.19) tal que

$$K_\theta + K \cot\theta = 0 \quad (4.21)$$

de modo a eliminar a dependência angular de  $\Gamma_3$  e, conseqüentemente, o spinor-solução (4.7) da equação de Dirac em (4.20) ser independente de  $\theta$ . Temos

$$K = K_0 / \sin\theta \quad (4.22)$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci de (4.20), na base

$$\begin{aligned} e^{(0)}_0 &= \alpha & e^{(0)}_1 &= \alpha^{-1} \\ e^{(1)}_1 &= \alpha^{-1} & e^{(2)}_2 &= r K \\ e^{(3)}_3 &= r K \sin\theta, \end{aligned} \quad (4.23)$$



são dadas por

$$R_{00} = -2\alpha\alpha'' - 2\alpha'^2 - 4\alpha\alpha'/r - 4\dot{\alpha}/r\alpha, \quad R_{01} = 4\dot{\alpha}/r\alpha \quad (4.24a)$$

$$R_{11} = 2\alpha\alpha'' + 2\alpha'^2 - 4\dot{\alpha}/\alpha r + 4\alpha\alpha'/r \quad (4.24b)$$

$$R_{22} = R_{33} = 4\alpha\alpha'/r + 2\alpha^2/r^2 + 2/r^2 \left( \frac{K_{\theta\theta}}{K^3} - \frac{K_\theta^2}{K^4} + \frac{K_\theta}{K^3} \cot\theta - \frac{1}{K^2} \right) \quad (4.24c)$$

Para a métrica de Vaidya,  $K = 1$  e os termos entre parêntesis em (4.24c) dão  $-1$ . Para o valor (4.22) de  $K$ , que elimina a dependência em  $\theta$  dos spinores,

$$\frac{K_{\theta\theta}}{K^3} - \frac{K_\theta^2}{K^4} + \frac{K_\theta}{K^3} \cot\theta = \frac{1}{K_\theta^2} \sin^2\theta$$

e transforma (4.24c) em

$$R_{22} = R_{33} = 4\alpha\alpha'/r + 2\alpha^2/r^2 \quad (4.24d)$$

que independe de  $\theta$ . O spinor (4.13) e, correspondentemente, o tensor momentum-energia (4.15) passam a ter a forma

$$\psi = C_0/r\alpha^{1/2} \begin{pmatrix} \lambda(u) \\ \sigma^1 \lambda(u) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$T_{00} = T_{11} = -T_{01} = 4i C_0^2/r^2\alpha^2 (\lambda^+ \dot{\lambda} - \dot{\lambda}^+ \lambda) \quad (4.26)$$

$$T_{03} = T_{13} = 0$$

A única componente do tensor de curvatura de (4.18) que se altera sob (4.19) é (na base de tetradas)

$$R^2_{323} = 2\alpha^2/r^2 + 2/r^2 \left( \frac{K_{\theta\theta}}{K^3} - \frac{K_\theta^2}{K^4} + \frac{K_\theta}{K^3} \cot\theta - \frac{1}{K^2} \right) \quad (4.27)$$

de modo que as propriedades assintóticas, até  $O(r^{-1})$ , são preservadas; mas os efeitos sobre a curvatura se tornam importantes em ordens mais altas de  $r^{-1}$ . Para (4.22), as componentes  $R_{22} = R_{33}$  e  $R_{323}^2$  são profundamente alteradas (cf. (4.24d) e (4.27)), com  $\psi$  e  $T_{AB}$  dados por (4.25) e (4.26) respectivamente. Esta transformação conforme sobre a esfera gera, para todos os valores de  $r$ , uma solução das equações acopladas de Einstein-Dirac, (4.24d) = 0, (4.24a,b) = (4.26), na forma

$$ds^2 = m(u)r^{-1} du^2 + 2 du dr - \frac{r^2}{\sin^2 \theta} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.28)$$

onde

$$\dot{m}(u) = 4ki(\dot{\lambda}^+ \lambda - \lambda^+ \dot{\lambda})$$

A métrica (4.28) é da forma da solução obtida para neutrinos na referência [54]. Para finalizar, a transformação conforme (4.22) sobre a esfera, embora preservando a estrutura assintótica da métrica (4.18), não pode ser assimilada a uma transformação do grupo BMS<sup>56</sup>.

Como a corrente associada ao campo de neutrinos (4.13) corresponde a uma emissão esfericamente simétrica (ou isotrópica), a métrica (4.2) pode ter curvatura compatível - via equações de Einstein - com este fluxo de neutrinos<sup>(\*)</sup>. Analogamente, podemos interpretar  $T_0^\mu$  como sendo uma densidade de corrente de energia-momentum, que depende de  $\theta$  como  $1/\sin \theta$  e, portanto, podemos considerar o fluxo de energia como isotrópica, de acordo com a análise feita anterior-

(\*) É fisicamente intuitivo que uma estrela esfericamente simétrica pode emitir neutrinos em interação com seu campo gravitacional e contribuindo para a curvatura.

mente para a corrente (4.14). Por isso, somos levados a redefinir o tensor momentum-energia para o neutrino, que deve entrar do lado direito das equações de Einstein, como

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \int T_{\mu\nu} d\Omega \quad (4.29)$$

A redefinição (4.29) não deve alterar a física do problema e consideramos que a métrica esfericamente simétrica (4.2), solução das equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} = -k \tilde{T}_{\mu\nu} \quad (4.30)$$

descreve a geometria exterior de uma esfera de fluido esfericamente simétrica emitindo neutrinos isotropicamente. Se na redefinição (4.29) a integral em  $\theta$  for tomada como o valor principal

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \text{ VP} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta T_{\alpha\beta} \quad (4.31)$$

a condição (4.16) de termos campos de neutrinos com helicidade não definida pode ser eliminada, desde que

$$\text{VP} \int_0^{\pi} d\theta \cot\theta = 0$$

e a emissão de neutrinos pode eventualmente ser de neutrinos de um único tipo  $\psi_{(\pm)} = \pm \gamma^5 \psi_{(\pm)}$ .

A redefinição (4.29) (ou (4.31)) tem duas propriedades importantes:

1) o tensor momentum-energia  $\tilde{T}_{\alpha\beta}$  ainda se conserva localmente na métrica (4.2),

$$\tilde{T}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} = 0$$

quer dizer, a redefinição (4.29) não altera a propriedade

$$T_{\alpha}^{\beta}{}_{||\beta} = 0 \quad ;$$

2)  $\tilde{T}_{\kappa\beta}$  tem a forma do tensor momentum-energia de um fluido nu-  
lo (cf. (4.36)) que é comumente usado [44,45,46] como uma descri-  
ção fenomenológica de neutrinos.

Substituindo (4.15) em (4.31) obtemos

$$\tilde{T}_{01} = \tilde{T}_{11} = -\tilde{T}_{01} = 2\pi i \frac{C_0^2}{r^2 \alpha^2} (\lambda^+ \dot{\lambda} - \dot{\lambda}^+ \lambda) \quad (4.32)$$

Usando a métrica de Vaidya, com  $\alpha^2 = 1 - 2m(u) r^{-1}$ , em (4.24a,b,c)  
para  $K=1$ , obtemos

$$R_{00} = R_{11} = -R_{01} = 4\dot{m}/r^2 \alpha^2 \quad (4.33)$$

As equações de Einstein (4.30) implicam

$$\dot{m} = \frac{k\pi i}{2} C_0^2 (\lambda^+ \dot{\lambda} - \dot{\lambda}^+ \lambda) \quad (4.34)$$

A distinção entre os tensores momentum-energia (4.32) e (4.26),  
o primeiro redefinido, está exatamente na forma das correntes  
dos spinores (4.13) e (4.25) associadas, respectivamente. No pri-  
meiro caso, o fator  $1/\sin\theta$  determina a simetria esférica do  
fluxo medido.

É interessante notar que a caracterização geométrica  
de simetria esférica através da derivada de Lie  $\mathcal{L}_{\vec{Z}^{(i)}}$ , onde  
 $\{\vec{Z}^{(i)} | i=1,2,3\}$  são os geradores das rotações espaciais, pode  
ter algumas limitações. Por exemplo, a métrica (4.20) com  $K(\theta)$   
satisfazendo

$$K_{\theta\theta}/K_3 - K_{\theta}^2/K_4 + K_{\theta} \cot\theta/K_3 - 1/K^2 = \text{const.} \quad (4.35)$$

não é, em geral, esfericamente simétrica de acordo com o critério acima, mas tem curvatura esfericamente simétrica pelo mesmo critério (notemos que (4.27) é um escalar).

### PROPRIEDADES DA SOLUÇÃO EXTERIOR

O tensor momentum energia (4.32) pode ser expresso na base de coordenadas

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = e_{\mu}^{(A)} e_{\nu}^{(B)} \tilde{T}_{AB} \quad (4.35)$$

com  $e_{\mu}^{(A)}$  dado por (4.23), cuja única componente não nula é

$$\tilde{T}_{\theta\theta} = 2\pi i \frac{C_0^2}{r^2} (\lambda^+ \dot{\lambda} - \dot{\lambda}^+ \lambda)$$

de modo que podemos escrever

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = 2\pi i \frac{C_0^2}{r^2} (\lambda^+ \dot{\lambda} - \dot{\lambda}^+ \lambda) u_{1\mu} u_{1\nu} \quad (4.36)$$

Como  $u_{1\mu} = (1, \vec{0})$  é um vetor nulo, (4.36) tem a forma do tensor momentum-energia de um fluido nulo.

Vamos calcular a emissão<sup>(\*)</sup> total de energia do sistema descrito pela métrica (4.2), com  $\alpha^2 = 1 - 2m(u)r^{-1}$ . Isto foi

---

(\*) Podemos ter o caso de absorção para  $\dot{m} > 0$ , como veremos adiante. No texto, o termo emissão pode eventualmente englobar os dois casos.

feito na referência [57] utilizando-se o pseudo-tensor momentum-energia total de Landau e Lifshitz [58]. As equações de Einstein foram reescritas por Landau e Lifshitz na forma

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{|\alpha\beta} = T_{\text{tot}}^{\mu\nu} \quad (4.37)$$

onde  $T_{\text{tot}}^{\mu\nu}$  envolve o tensor momentum-energia da matéria mais o pseudo-tensor momentum-energia do campo gravitacional, que é uma expressão quadrática nas derivadas primeiras da métrica. O objeto  $H^{\mu\alpha\nu\beta}$  tem as mesmas simetrias que o tensor de Riemann, com a expressão

$$H^{\mu\alpha\nu\beta} = (-g)/16\pi k (g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha})$$

Desde que por (4.37)  $T_{\text{tot}}^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0$ , define-se como usualmente o vetor momentum-energia total  $P_{\text{tot}}^{\mu}$  e a potência total emitida  $L_{\text{tot}}$ , e utiliza-se (4.37) para calcular estas quantidades. Um cálculo explícito feito para a métrica (4.2) em coordenadas cartesianas, resulta [57]

$$P_{\text{tot}}^{\mu} = \frac{8\pi}{k} (m, \vec{0}) \quad (4.38a)$$

$$L_{\text{tot}} = -\frac{16\pi}{k} \frac{dm}{du} \quad (4.38b)$$

De (4.34), tiramos que a potência total emitida é dada por

$$L_{\text{tot}} = -8\pi^2 i C_0^2 (\dot{\lambda}^+ \lambda - \lambda^+ \dot{\lambda}) \quad (4.39)$$

Chamamos  $L_{\text{tot}}$  a luminosidade de neutrinos emitidos pela esfera de fluido, medida por um observador em repouso no infinito.

O resultado (4.39) pode ser alternativamente derivado pelos seguintes argumentos. O tensor de Weyl para a métrica exterior com neutrinos (4.2) é formalmente idêntico ao tensor de Weyl da métrica de Schwarzschild. Pode ser obtido por um cálculo direto a partir da expressão

$$C_{ABCD} = R_{ABCD} - \frac{1}{2} \eta_{AC} R_{BD} + \frac{1}{2} \eta_{AD} R_{BC} + \frac{1}{2} \eta_{BC} R_{AD} - \frac{1}{2} \eta_{BD} R_{AC}$$

utilizando-se as componentes  $R_{ABCD}$  da métrica (4.2), calculadas no apêndice 1, e dá

$$C_{ABCD} = D_{ABCD}^{(0)} \frac{2m}{r^3} \quad (4.40)$$

onde  $D_{ABCD}^{(0)}$  é um tensor constante do tipo de Petrov D [60], com duas direções principais nulas degeneradas<sup>59</sup>. Esta é a forma do tensor de Weyl (idêntico ao tensor de curvatura) do campo de Schwarzschild. Se escrevermos a métrica (4.2) na forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2m(u) r^{-1} u_{(\mu} u_{\nu)} \quad (4.41)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski em coordenadas  $(u, r, \theta, \varphi)$ , podemos concluir [62] que o vetor nulo  $u_{(\mu}$  define uma direção nula principal degenerada da métrica (4.41), ao longo das quais o neutrino se propaga (cf. (4.14) e (4.36)). Notando que (4.41) é a forma da métrica de Schwarzschild para  $m=\text{const.}$ , podemos concluir que as direções nulas principais em Schwarzschild são direções nulas para a propagação do neutrino, no caso de uma eventual emissão esfericamente simétrica. Isto sugere que na emissão de neutrinos, como descrita por (4.34) e (4.41) não há simultaneamente emissão de radiação gravitacional, desde que a estru-

tura algébrica do espaço-tempo permaneceu inalterada <sup>63</sup>. De fato, examinando o tensor de curvatura  $R_{ABCD}$  da métrica (4.41), para valores de  $r$  suficientemente grandes, vemos que o termo de menor ordem em  $r^{-1}$  é proporcional a

$$R_{ABCD} \sim \frac{\dot{m}}{r^2}$$

Assim a parte semi-radiativa do campo é devida a  $\dot{m} \neq 0$  e, como por (4.34),  $\dot{m}$  é devido somente a neutrinos, não podemos ter emissão de radiação gravitacional juntamente com neutrinos. Neste caso, a potência total irradiada está associada somente a neutrinos e podemos então usar no seu cálculo o tensor momentum-energia (4.36). Para um observador comovente ,

$$v^\mu = e^\mu_{(A)} u^A, \quad u^A = \delta^A_0$$

temos

$$v^\mu = (\alpha^{-1}, \vec{0}) \quad (4.42)$$

A luminosidade total (luminosidade de neutrinos), como medida por um observador em repouso no infinito, é dada por

$$L_{total} = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \tilde{T}_{\mu\nu} (\text{neutrino}) v^\mu v^\nu \quad (4.43)$$

Usando (4.36) e (4.42) obtemos para a luminosidade de neutrinos ( $r \rightarrow \infty$ )

$$L_{tot} = 8\pi^2 i C_0^2 (\lambda^+ \dot{\lambda} - \dot{\lambda}^+ \lambda) \quad (4.44)$$

que coincide com (4.39). Notemos que, se  $\dot{m} < 0$  (emissão), por (4.34)  $L_{tot} > 0$ , como era de se esperar.

No referencial de Lorentz de um observador com 4-velocidade  $v^\mu$ , temos  $u^{\mu\nu} = (1, 1, 0, 0)$ . Portanto, a densidade de energia da radiação bem como o fluxo de energia (luminosidade),



medidos localmente por tal observador, tem a mesma expressão (cf. (4.32))

$$Q = \tilde{T}_{\mu\nu} V^\mu V^\nu 4\pi r^2 \quad (4.45)$$

como em (4.43). De

$$V^\mu V_\mu = 1, \quad V^2 = V^3 = 0 \quad (4.46)$$

obtemos

$$(1 - 2m/r) (V^0)^2 + 2V^0 V^1 - 1 = 0$$

e tomamos a solução

$$V^0 = \left\{ \left( 1 + (V^1)^2 - 2m r^{-1} \right)^{1/2} - V^1 \right\} / 1 - 2m r^{-1} \quad (4.47)$$

que corresponde a  $V^0 > 0$ , quer dizer,  $V^\mu$  no interior dos cones de luz locais do futuro. Escrevendo  $V^0$  com

$$V^0 = \left\{ \left( 1 + (V^1)^2 - 2m r^{-1} \right)^{1/2} + V^1 \right\}^{-1} \quad (4.47')$$

e substituindo em (4.45), obtemos

$$Q \left[ \left( 1 + (V^1)^2 - 2m r^{-1} \right)^{1/2} + V^1 \right]^2 = 8\pi^2 i C_0^2 (\lambda^+ \dot{\lambda} - \dot{\lambda}^+ \lambda) \quad (4.48)$$

Assim vemos que o valor da luminosidade total (4.44) observada por um observador em repouso no infinito é um fator  $(V^0)^2$  vezes a luminosidade localmente observada. Vamos adiante ver que, em (4.48), um fator  $(V^0)$  dá conta da dilatação, relativa ao tempo próprio do observador, do intervalo  $du$  no qual a energia é emitida, devida à velocidade  $V^1$  do observador e à presença do campo

gravitacional. O outro fator ( $v^0$ ) pode ser interpretado como típico de desvio para o vermelho gravitacional<sup>57</sup>.

Sejam  $x^\alpha$  (s) as coordenadas de pontos sobre a linha de universo do observador (4.46), parametrizada com o tempo próprio s. Podemos então expressar

$$v^1 = dr/ds$$

$$v^0 = dt/ds$$

e, por (4.47)

$$\frac{du}{ds} = \left[ \left( 1 + (v^1)^2 - 2m r^{-1} \right)^{1/2} + v^1 \right]^{-1} \quad (4.49)$$

Desde que sinais luminosos se propagam ao longo de curvas de u constante, dois sinais emitidos por um observador com intervalo  $du$  são recebidos no infinito com a mesma separação  $du$ . Assim, para um observador em repouso no infinito, o seu intervalo de tempo próprio é dado por  $du$ , desde que

$$\left( \frac{du}{ds} \right)_{\substack{v^1=0 \\ r \rightarrow \infty}} = 1 \quad (4.50)$$

Isto pode ter uma interpretação intuitiva<sup>49</sup>. Com a escolha do sistema de coordenadas  $(u, r, \theta, \varphi)$  para a métrica esféricamente simétrica do problema, um vetor nulo radial qualquer  $\omega^\alpha$  terá componente  $\omega^0 = \omega^2 = \omega^3 = 0$ , de modo que a velocidade da luz ao longo de direções radiais (dada por  $\omega^1/\omega^0$ ) é infinita. Então podemos dizer que as coordenadas  $(u, r)$  tem o caráter de coordenadas Newtonianas e daí, para um observador em repouso no infinito,  $du$  é o intervalo de tempo Newtoniano e  $u$  o tempo Newtoniano usuais, medidos pelo observador. Assim (4.50) pode ser expresso

$$\left( ds \right)_{\substack{v^1=0 \\ r \rightarrow \infty}} \equiv d\tau_{\text{Newt.}} = du$$

e, por (4.49) ,

$$d\tau_{Newt.} = ds / \left( (1 + (V^1)^2 - 2mr^{-1})^{1/2} + V^1 \right) \quad (4.51)$$

Se um observador radial emite dois sinais com intervalo de tempo próprio  $ds$ , assintoticamente um observador em repouso vai receber estes sinais com um intervalo  $d\tau_{Newt.}$  dado por (4.51). Dilação de tempo infinita ocorre para

$$\begin{aligned} V^1 &\leq 0 \\ r &= 2m(u) \end{aligned} \quad (4.52)$$

No entanto, pela escolha (4.47), a condição  $V^1 \leq 0$  em  $r=2m(u)$  não pode em geral se verificar para qualquer observador tipo-tempo ; a igualdade ocorre, por exemplo, para observadores inerciais locais  $V^\mu = e_{(A)}^\mu \delta_0^A$  .

Descrevendo a geometria da hipersuperfície  $r=2m(u)$  com as coordenadas  $\lambda^i = (u, \theta, \varphi)$  , e as coordenadas externas  $x^\alpha(\lambda)$  dadas por  $u = u$ ,  $r=2m(u)$ ,  $\theta = \theta$ ,  $\varphi = \varphi$  , temos que a métrica induzida<sup>[67]</sup> sobre a hipersuperfície por (4.2) é dada por

$$\gamma_{ij}(\lambda) = g_{\alpha\beta}(x(\lambda)) X_{ii}^\alpha X_{jj}^\beta$$

com componentes não nulas

$$\gamma_{11} = 4\dot{m}$$

$$\gamma_{22} = -r^2$$

$$\gamma_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

O elemento de linha intrínseco à hipersuperfície é então

$$ds^2 = 4\dot{m} du^2 - r^2 d\Omega^2$$

e caracteriza uma hipersuperfície tipo espaço para  $\dot{m} < 0$ . Ela de

verá então estar fora dos cones de luz em  $r = 2m$ . Para construir tais cones, vamos considerar o vetor nulo  $u^\mu = g^{\mu\alpha} u_{,\alpha}$  (reescalado com o fator  $1/\sqrt{2}$  )

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 0, 0) \quad (4.53a)$$

Uma base local de vetores nulos pode ser construída a partir de  $u^\mu$  (cf. apêndice 2),

$$l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (2, -\alpha^2, 0, 0) \quad (4.53b)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 0, 0, \frac{1}{r}, \frac{i}{r \sin \theta} \right) \quad (4.53c)$$

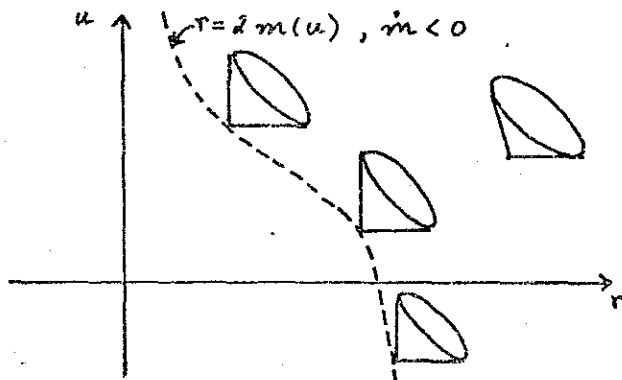
$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 0, 0, \frac{1}{r}, \frac{-i}{r \sin \theta} \right) \quad (4.53d)$$

com únicos produtos não nulos  $u^\mu l_\mu = -m^\mu \bar{m}_\mu = 1$  . Com os dois vetores radiais (4.53, a, b), na base natural local  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\}$ ,

$$\vec{u} = u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\vec{l} = l^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial u} - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

pode-se esboçar os cones de luz no plano  $(u, r)$  :



Da figura podemos ver que um sinal luminoso emitido na região

$r > 2m(u)$  ou qualquer partícula material seguindo uma trajetória tipo-tempo a partir de um ponto em  $r > 2m$  não podem atingir a hipersuperfície  $r=2m(u)$ . Esta situação seria invertida se usássemos a forma

$$ds^2 = (1 - 2m(v)r^{-1}) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega^2$$

onde  $v$  é uma coordenada tipo nula avançada <sup>13</sup>.

Devido às propriedades acima da solução exterior, a fonte deste campo potencial exterior não pode estar localizada na região  $r=2m(u)$  - um observador ligado à fonte em  $r=2m(u)$ , que supomos sempre ser um observador inercial ( $V^\mu = e^\mu_{(0)}$ ) (cf. (4.73)), teria seu intervalo de tempo próprio observado assintoticamente com dilatação infinita (cf. (4.51)) e, correspondentemente, qualquer quantidade de fluxo de neutrinos emitida através de  $r=2m(u)$  teria que ter uma energia infinita para ser observada assintoticamente (cf. (4.48)). Portanto a fase de emissão de neutrinos deve corresponder a uma fonte limitada por uma superfície esférica de raio  $R_s = R_s(u)$ ,  $R_s > 2m(u)$ , com a métrica no interior diferente da métrica (4.2) devido à presença da fonte. Esta descrição poderia eventualmente representar um estágio imediatamente anterior ao de um objeto no interior de seu raio de Schwarzschild, desde que, por (4.34), a variação de massa é devida puramente à emissão de neutrinos com conseqüente contração até valores de densidade críticos <sup>69</sup>. Quando  $\dot{m} = 0$ , a configuração final da solução exterior será a solução do vácuo de Schwarzschild, descrita convenientemente em coordenadas de Kruskal <sup>68</sup>. Excluimos a situação improvável de toda massa do objeto ser emitida sob forma de neutrinos, sem antes atingir seu raio de Schwarzschild. As condições que eliminam tal

possibilidade serão examinadas mais tarde (cf. (4.171) que implica  $\dot{r}_s > \dot{m}$ ).

### O PROBLEMA INTERIOR: ESTUDO DE UMA

#### CLASSE DE SOLUÇÕES

Como já foi dito, consideramos a região interior como sendo constituída de uma distribuição de matéria e neutrinos fluindo radialmente para o exterior. A distribuição de matéria é uma esfera de fluido perfeito, de densidade  $\rho$ , pressão  $P$  e raio  $r_s$  e que emite neutrinos. Os neutrinos são supostos se moverem radialmente quando emitidos ou, equivalentemente, só neutrinos radiais contribuem para o tensor momentum-energia. Neutrinos, uma vez emitidos, interagem somente com a gravitação, não sendo espalhados ou absorvidos pela matéria adjacente, quer dizer, a distribuição de matéria é transparente para os neutrinos. Com as hipóteses acima, as equações de Einstein e a conservação local do tensor momentum-energia total, podemos tirar suficientes informações sobre o comportamento do modelo: duas soluções analíticas exatas são obtidas e as propriedades de uma delas discutidas ao longo desta seção. Nesta solução, o fluido emitindo neutrinos tem equação de estado  $P = -\frac{1}{3} \rho$ . Esta equação decorre simultaneamente das equações de campo e da conservação local do tensor momentum-energia total. Como para  $P = -\frac{1}{3} \rho$ , o tensor momentum-energia do fluido tem divergência covariante nula e o tensor momentum-energia do neutrino também tem divergência covariante nula,

independentemente, dizemos que para  $p = -\frac{1}{3}\xi$  os neutrinos estão desacoplados da matéria. Com a finalidade de evitar equações de estado com pressão negativa, somos levados a introduzir um termo tipo cosmológico nas equações de Einstein, mantendo a mesma solução para as funções métricas mas redefinindo  $\xi$  e  $p$ . As identidades de Bianchi implicam então que a divergência do tensor momento-energia total é proporcional a um 4-gradiente de uma função  $\Lambda$ , que dá conta dos processos locais de troca de energia do fluido emitindo neutrinos. Para processos quasi-estacionários,  $\Lambda$  permite descrever o análogo de uma pressão de radiação para neutrinos. A junção das soluções interior e exterior na superfície de raio  $r_s(u)$  é considerada, permitindo fixar vários parâmetros da solução.

Para o problema interior, nossa escolha de coordenadas (que parece ser a mais natural) é o conjunto  $x^\alpha = (u, r, \theta, \varphi)$ ,  $-\infty \leq u \leq +\infty$ ,  $0 < r < \infty$ , com as seguintes propriedades: (i) as hipersuperfícies  $u = \text{const.}$  são hipersuperfícies nulas tangentes em cada ponto ao cone de luz local; (ii)  $r$  é um parâmetro afim ao longo das curvas nulas com tangente  $k^\alpha = g^{\alpha\beta} u_{,\beta}$  e define, portanto, uma distância de luminosidade; (iii) os escalares  $\theta$  e  $\varphi$  são constantes ao longo das curvas nulas em (ii). Neste sistema de coordenadas, um elemento de linha esfericamente simétrico pode sempre ser posto na forma [64]

$$ds^2 = \alpha^2 du^2 + 2 du dr - \beta^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são funções de  $r$  e  $u$ . Como anteriormente, definimos uma base de tetradas  $e_{\alpha}^{(A)}(x)$  por

$$\theta^A = e_{\alpha}^{(A)}(x) dx^{\alpha}$$

tal que (4.54) assuma a forma

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2$$

Temos

$$\begin{aligned} \theta^0 &= \alpha du + \alpha^{-1} dr & \theta^2 &= \beta d\theta \\ \theta^1 &= \alpha^{-1} dr & \theta^3 &= \beta \sin \theta d\varphi \end{aligned}$$

e então, por (4.55), as componentes não nulas de  $e_{\alpha}^{(A)}$  são

$$\begin{aligned} e_{00}^{(0)} &= \alpha & e_{11}^{(0)} &= \alpha^{-1} \\ e_{11}^{(1)} &= \alpha^{-1} & e_{22}^{(2)} &= \beta & e_{33}^{(3)} &= \beta \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (4.56)$$

Na base (4.56), os coeficientes de Ricci  $\gamma_{ABC}$ , definidos por (2.40), podem ser imediatamente calculados. Este cálculo foi feito no apêndice 1, utilizando-se o formalismo de formas diferenciais. As componentes não nulas de  $\gamma_{ABC}$  dão

$$\begin{aligned} \gamma_{010} &= (\dot{\alpha}' + \dot{\alpha}/\alpha^2) & \gamma_{122} &= -\dot{\beta}/\beta\alpha + \beta'\alpha/\beta \\ \gamma_{011} &= -\dot{\alpha}/\alpha^2 & \gamma_{033} &= \dot{\beta}/\beta\alpha \\ \gamma_{022} &= \dot{\beta}/\beta\alpha & \gamma_{133} &= -\dot{\beta}/\beta\alpha + \beta'\alpha/\beta \\ \gamma_{233} &= \cot \theta / \beta \end{aligned} \quad (4.57)$$

Aqui, um ponto e uma linha denotam, respectivamente, derivadas com relação a  $u$  e  $r$ . Com as expressões (4.57), os coeficientes de Fock-Ivanenko (cf. apêndice 1)

$$\Gamma_A = -\frac{1}{4} \gamma_{MNA} \gamma^M \gamma^N$$

são dados por



$$\begin{aligned}
 \Gamma_0 &= -\frac{1}{2} (\alpha^1 + \dot{\alpha}/\alpha^2) \gamma^0 \gamma^1 \\
 \Gamma_1 &= \frac{1}{2} \dot{\alpha}/\alpha^2 \gamma^0 \gamma^1 \\
 \Gamma_2 &= -\frac{1}{2} \dot{\beta}/\beta^2 \gamma^0 \gamma^2 - \frac{1}{2} (\beta^1 \alpha/\beta - \dot{\beta}/\beta \alpha) \gamma^1 \gamma^2 \\
 \Gamma_3 &= -\frac{1}{2} \dot{\beta}/\beta \alpha \gamma^0 \gamma^3 - \frac{1}{2} (\beta^1 \alpha/\beta - \dot{\beta}/\beta \alpha) \gamma^1 \gamma^3 - \cot \theta / 2\beta \gamma^2 \gamma^3
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Como somente neutrinos radiais são considerados, vamos nos restringir a campos spinoriais da forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \sigma^1 \varphi \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

onde  $\varphi$  é um 2-spinor e  $\sigma^1$  a matriz constante de Pauli, que correspondem a uma 4-corrente

$$j^A = (\mathcal{E}, \mathcal{E}, 0, 0) \tag{4.60}$$

radialmente ao longo dos cones de luz locais. Desde que, em (4.58), o coeficiente de Fock-Ivanenko  $\Gamma_3$  depende de  $\theta$ , tomamos em (4.59)

$$\varphi = \varphi(u, r, \theta)$$

Com a convenção (3.2), (3.3) das matrizes  $\gamma^A$  e a propriedade do spinor (4.59)

$$\gamma^0 \psi = \gamma^1 \psi \tag{4.61}$$

a equação de Dirac (2.44), na base (4.56), se escreve

$$\gamma^0 (\alpha \partial/\partial r + \alpha'/2 + \beta' \kappa/\beta) \psi + \gamma^2 (1/\beta \partial/\partial \theta + \cot \theta \partial/\partial \phi) \psi = 0$$

ou, em termos do 2-spinor

$$1/\beta (\partial/\partial \theta + \frac{1}{2} \cot \theta) \varphi + (\alpha \partial/\partial r + \alpha'/2 + \beta' \kappa/\beta) \sigma^2 \sigma^1 \varphi = 0$$

$$1/\beta (\partial/\partial \theta + \frac{1}{2} \cot \theta) \varphi + (\alpha \partial/\partial r + \alpha'/2 + \beta' \kappa/\beta) \sigma^1 \sigma^2 \varphi = 0$$

O par de equações acima se reduz a

$$\partial \varphi / \partial \theta + \frac{1}{2} \cot \theta \varphi = 0 \quad (4.62a)$$

$$\alpha \varphi' + \left( \frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta' \kappa}{\beta} \right) \varphi = 0 \quad (4.62b)$$

Notemos que, devido à propriedade (4.61), a dependência em  $u$  do spinor  $\varphi$  não é determinada pela equação de Dirac. De (4.62a), vemos que  $\varphi$  deve depender de  $\theta$  na forma

$$\varphi(u, r, \theta) = C_0 (\sin \theta)^{1/2} \varphi(u, r)$$

A equação (4.62b) pode ser diretamente integrada, dando

$$\varphi(r, u) = \Lambda(u) / \beta \alpha^{1/2}$$

onde  $\Lambda(u)$  é um 2-spinor arbitrário. Assim, a solução mais geral da equação de Dirac para o neutrino na métrica (4.54), com a forma (4.59), é dada por

$$\psi = \frac{1}{(\alpha \sin \theta)^{1/2} \beta} \begin{pmatrix} \Lambda(u) \\ \sigma^1 \Lambda(u) \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

onde  $\Lambda(u)$  é um spinor a duas componentes arbitrário. No sistema de coordenadas usado, para a métrica esfericamente simétrica geral (4.54), a equação de Dirac para campos de neutrinos radiais pode ser imediatamente integrada na forma (4.63), cuja dependência funcional em  $(u, r, \theta)$  se reflete na

forma da corrente e do tensor momentum-energia permitindo uma interpretação bem simples. Esta é a razão mais forte para tal escolha do sistema de coordenadas da solução interior (4.54).

Na expressão da corrente (4.60), a solução (4.63) nos dá

$$\xi = \frac{1}{\sin\theta} \frac{2}{\alpha\beta^2} \Lambda^+(u) \Lambda(u) \quad (4.64)$$

cuja dependência em  $\theta$  é análoga à da corrente (4.14) para o problema exterior. Usando (4.58), (4.61) e (4.62b), as componentes não-nulas  $T_{AB}$  do tensor momentum-energia do neutrino podem ser obtidas por um cálculo direto

$$\begin{aligned} T_{00} = -T_{01} = T_{11} &= \frac{2i}{\alpha} (\bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi) \\ T_{03} &= \omega \tau_y \theta / \beta \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 \psi \\ T_{13} &= -\omega \tau_y \theta / \beta \bar{\psi} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \psi \end{aligned} \quad (4.65)$$

No cálculo de  $T_{AB}$ , as seguintes propriedades adicionais do spinor da forma (4.59) foram usadas:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^2 \psi &= \bar{\psi} \gamma^3 \psi = 0 \\ \bar{\psi} \gamma^2 \partial \psi / \partial x^\alpha &= \bar{\psi} \gamma^3 \partial \psi / \partial x^\alpha = 0 \\ \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \psi &= \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \psi = 0 \end{aligned}$$

A substituição de (4.63) em (4.65) resulta

$$T_{00} = -T_{01} = T_{11} = \frac{4i}{\sin\theta} \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} (\Lambda^+ \dot{\Lambda} - \dot{\Lambda}^+ \Lambda) \quad (4.66a)$$

(4.66b)

$$T_{03} = -T_{13} = \frac{2}{\sin\theta} \frac{\omega \tau_y \theta}{\beta^3 \alpha} \Lambda^+ \sigma^1 \Lambda$$

com uma dependência em  $\theta$  análoga à de (4.15). Como no caso da solução exterior, a dependência em ângulo de (4.66b) não é tão drástica, porque poderíamos considerar campos de neutrinos satisfazendo

$$\Lambda^+ \sigma^1 \Lambda = 0 \quad (4.67)$$

e que, portanto, não são autoestados de  $\gamma^5$ . O fator  $\frac{1}{\sin\theta}$  em (4.64) e (4.66) permite uma discussão análoga à que foi feita no caso da solução exterior: a dependência em  $\theta$  que aparece em  $\Gamma_3$  é devida puramente ao sistema de coordenadas usado e que se reflete em quantidades mensuráveis - corrente, tensor momentum-energia - através do fator  $1/\sin\theta$  que, como já visto, é um fator que simplesmente corrige áreas no sistema de coordenadas usado (análogo ao do problema exterior). Desta forma, como em (4.29), somos levados a redefinir o tensor momentum-energia do neutrino, que deve entrar do lado direito das equações de Einstein, por

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \int T_{\mu\nu} d\Omega \quad (4.68)$$

Analogamente a (4.31), se na redefinição (4.68) a integral em  $\theta$  for tomada como o valor principal, a condição (4.67) de termos campos de neutrinos com helicidade não-definida pode ser eliminada porque, neste caso,  $\tilde{T}_{03} = \tilde{T}_{13} = 0$ . E a emissão de neutrinos pode eventualmente ser de um único tipo  $\psi_{(\pm)} = \pm \gamma^5 \psi$ . Esta redefinição não deve alterar a física do problema, e a métrica esfericamente simétrica (4.54), solução das equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa [T_{\mu\nu}(s, p) + \tilde{T}_{\mu\nu}(\text{neutrino})] \quad (4.69)$$

descreverá a geometria interior de uma esfera de fluido emitindo neutrinos isotropicamente, autoestados ou não de  $\gamma^r$ .

Substituindo (4.66) em (4.68), obtemos

$$\tilde{T}_{00} = \tilde{T}_{11} = -\tilde{T}_{01} = 2\pi i \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} (\Lambda^+ \dot{\Lambda} - \dot{\Lambda}^+ \Lambda) \quad (4.70)$$

$$\tilde{T}_{03} = \tilde{T}_{13} = 0$$

Na base de coordenadas, o tensor momentum-energia  $\tilde{T}_{\mu\nu} = e_{\mu}^{(A)} e_{\nu}^{(B)} \tilde{T}_{AB}$  tem uma única componente não nula

$$\tilde{T}_{00} = \frac{2\pi i}{\beta^2} (\Lambda^+ \dot{\Lambda} - \dot{\Lambda}^+ \Lambda) \quad (4.71)$$

onde  $e_{\mu}^{(A)}$  é dado por (4.56) e  $\tilde{T}_{AB}$  por (4.70) e deste modo podemos escrever

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{2\pi i}{\beta^2} (\Lambda^+ \dot{\Lambda} - \dot{\Lambda}^+ \Lambda) u_{1\mu} u_{1\nu} \quad (4.72)$$

com  $u_{1\mu} = (1, \vec{0})$  um vetor nulo radial, tangente ao cone de luz local. A forma (4.72) é a de um tensor momentum-energia para um fluido nulo, que é a descrição fenomenológica comumente usada [72] para neutrinos. Na expressão (4.70) o fator

$$2\pi i / \alpha^2 \beta^2 (\Lambda^+ \dot{\Lambda} - \dot{\Lambda}^+ \Lambda)$$

pode ser convenientemente interpretado como a densidade de energia dos neutrinos, medida localmente pelo observador com 4-velocidade  $(\alpha^{-1}, \vec{0})$ .

Para obter o tensor momentum-energia do fluido perfeito, vamos supor que um observador se comovendo com a matéria tenha 4-velocidade

$$V^A = \delta^A_0, \quad V_A = \delta_A^0 \quad (4.73)$$

no referencial inercial local determinado por (4.56). Isto corresponde a um campo de velocidade da matéria dado por

$$V^\mu = e_{(A)}^\mu V^A = e_{(0)}^\mu$$

Denotamos por  $\rho$  e  $p$ , respectivamente, a densidade de matéria (massa-energia) e a pressão do fluido medidos localmente pelo observador (4.73). Assim, no referencial inercial local definido por (4.56), o tensor momentum-energia do fluido assume a forma

$$T_{AB} = (\rho + p) V_A V_B - p \eta_{AB} = (\rho + p) \delta_A^0 \delta_B^0 - p \eta_{AB} \quad (4.74)$$

que é a expressão conhecida do tensor momentum-energia de um fluido perfeito em Relatividade Restrita [65].

Assim, o tensor momentum-energia total para o problema interior será a soma do tensor momentum-energia do neutrino (4.70) e do tensor momentum-energia do fluido (4.74) que, na base local (4.56), assume a forma

$$T_{AB}(\text{total}) = (\rho + p) \delta_A^0 \delta_B^0 - p \eta_{AB} + \frac{2\mathcal{L}(u)}{\alpha^2 \beta^2} k_A k_B \quad (4.75)$$

onde  $k_A = (1, -1, 0, 0)$ , e

$$\mathcal{L}(u) = \pi i (\dot{\Lambda}^+ \dot{\Lambda} - \dot{\Lambda}^+ \Lambda) \quad (4.76)$$

As componentes do tensor de curvatura, bem como as componentes do tensor de Ricci da métrica (4.54) são calculadas no apêndice 1, usando o formalismo de formas diferenciais. As componentes não nulas  $R_{AB}$  do tensor de Ricci, na base (4.56), são dadas por

$$R_{00} = -2\alpha\alpha'' - 2\alpha'^2 + 4\ddot{\beta}/\beta\alpha^2 + 4\dot{\beta}\alpha'/\beta\alpha - 4\alpha\alpha'\beta'/\beta - 4\dot{\alpha}\beta'/\alpha\beta$$

$$R_{01} = -4\ddot{\beta}/\beta\alpha^2 + 4\dot{\beta}'/\beta - 4\dot{\beta}\alpha'/\beta\alpha + 4\beta'\dot{\alpha}/\beta\alpha$$

$$R_{11} = 2\alpha\alpha'' + 2\alpha'^2 + 4\ddot{\beta}/\beta\alpha^2 - 8\dot{\beta}'/\beta - 4\beta'\dot{\alpha}/\beta\alpha + 4\dot{\beta}\alpha'/\beta\alpha + 4\beta''\alpha^2/\beta + 4\alpha\alpha'\beta'/\beta \quad (4.77)$$

$$R_{22} = R_{33} = -4\dot{\beta}'/\beta + 2\beta''\alpha^2/\beta + 4\alpha\alpha'\beta'/\beta - 2/\beta^2 - 4\dot{\beta}\beta'/\beta^2 + 2\beta'^2\alpha^2/\beta^2$$

As equações de Einstein, na base local, são dadas por

$$R_{AB} - \frac{1}{2} \eta_{AB} R = \kappa T_{AB} \text{ (total)}$$

Notemos que aqui estamos usando  $\kappa < 0$ . Usando (4.75), podemos escrever as equações independentes

$$R_{00} - \frac{1}{2} R = 2\kappa \frac{\mathcal{L}(u)}{\alpha^2\beta^2} + \kappa \rho$$

$$R_{01} = -2\kappa \frac{\mathcal{L}(u)}{\alpha^2\beta^2}$$

$$R_{11} + \frac{1}{2} R = \kappa p + 2\kappa \frac{\mathcal{L}(u)}{\alpha^2\beta^2}$$

$$R_{22} + \frac{1}{2} R = \kappa p$$

(4.78)

O escalar de Ricci  $R$  que aparece em (4.78) é dado por

$$R = R_{00} - R_{11} - R_{22} - R_{33}$$

e usando as expressões (4.77) obtemos

$$R = -4\alpha\alpha'' - 4\alpha'^2 - 16\alpha\alpha'\beta'/\beta + 16\dot{\beta}'/\beta - 8\beta''\alpha^2/\beta + 4/\beta^2 + 8\dot{\beta}\beta'/\beta^2 - 4\beta'^2\alpha^2/\beta^2 \quad (4.79)$$

As equações de campo (4.78) podem ser reescritas

$$R_{00} = 2\kappa \frac{\mathcal{L}(u)}{\alpha^2 \beta^2} + \kappa \rho + \frac{1}{2} R \quad (4.80a)$$

$$R_{01} = -2\kappa \frac{\mathcal{L}(u)}{\alpha^2 \beta^2} \quad (4.80b)$$

$$R_{22} = \kappa p - \frac{1}{2} R \quad (4.80c)$$

$$R_{11} + R_{01} - R_{22} = 0 \quad (4.80d)$$

A equação (4.80d) é obtida a partir da relação  $T_{11} - T_{22} + T_{01} = 0$  que vale para o tensor momentum-energia total (4.75). Ela é equivalente a uma combinação linear das três últimas equações (4.78).

Das equações (4.78) podemos também obter a relação

$$R_{00} + R_{11} + 2R_{01} = \kappa(\rho + p) \quad (4.81)$$

e um cálculo explícito do lado esquerdo de (4.81), usando (4.77), nos dá a relação importante

$$4\beta''/\beta \alpha^2 = \kappa(\rho + p) \quad (4.82)$$

Como, para equações de estado fisicamente razoáveis,

$$\rho + p > 0 \quad (4.83)$$

e desde que  $\kappa < 0$ , devemos ter  $\beta''/\beta < 0$  em todos os pontos da região interior. Vemos também que a existência de matéria na região interior, descrita pela métrica (4.54) depende essencialmente de  $\beta''/\beta$  ser diferente de zero.

A condição (4.80d) restringe as funções  $\alpha$  e  $\beta$ , soluções do problema interior. Uma vez conhecidas, podemos em



princípio determinar  $\xi$ ,  $P$  e  $\mathcal{L}(u)$  a partir das outras equações (4.80) e a equação (4.82) nos determina então a equação de estado do fluido  $p = p(\xi)$ .

Tendo em vista as expressões (4.77), a obtenção de soluções das equações de campo (4.80) torna-se bastante complicada. Vamos tentar uma solução por separação de variáveis, no presente caso de matéria sem opacidade para neutrinos. Tomamos

$$\begin{aligned}\alpha &= R_1(r) T_1(u) \\ \beta &= R_2(r) T_2(u)\end{aligned}\tag{4.84}$$

Usando as expressões (4.77) nas equações de campo (4.80,b,d) podemos escrever

$$\alpha \alpha'' + \alpha'^2 + \beta'' \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + 2 \frac{\dot{\beta} \beta'}{\beta^2} - \beta'^2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} = 0\tag{4.80d}$$

$$2\beta\ddot{\beta} - 2\alpha^2\beta\dot{\beta}' + 2\alpha\beta\alpha'\dot{\beta} - 2\alpha\beta\dot{\alpha}\beta' = \kappa\mathcal{L}(u)\tag{4.80d}$$

Substituindo (4.84) em (4.80d) acima obtemos

$$R_1 R_1'' T_1^2 + R_1'^2 T_1^2 + \frac{R_2''}{R_2} R_1^2 T_1^2 + \frac{1}{R_2^2} T_2^{-2} + 2 \frac{R_2'}{R_2} \frac{\dot{T}_2}{T_2} - \left(\frac{R_2'}{R_2}\right)^2 R_1^2 T_1^2 = 0$$

ou

$$\left\{ R_1 R_1'' + R_1'^2 + \frac{R_2''}{R_2} R_1^2 - \left(\frac{R_2' R_1}{R_2}\right)^2 \right\} T_1^2 + \frac{1}{R_2^2} T_2^{-2} + 2 \frac{R_2'}{R_2} \frac{\dot{T}_2}{T_2} = 0\tag{4.85}$$

Em (4.81), temos duas escolhas possíveis:

I)

$$\frac{\dot{T}_2}{T_2} = \xi T_2^{-2}\tag{4.86}$$

o que implica

$$\frac{R_1 R_1'' + R_1'^2 + \frac{R_2''}{R_2} R_1^2 - \left(\frac{R_2' R_1}{R_2}\right)^2}{\frac{1}{R_2^2} + 2\zeta \frac{R_2'}{R_2}} = -\frac{1}{\eta^2} = -\frac{1}{T_1^2 T_2^2} \quad (4.87, 88)$$

onde  $\zeta$  e  $\eta$  são constantes arbitrárias;

II)

$$\frac{2R_2'}{R_2} = \zeta \frac{1}{R_2^2}$$

o que implica

$$R_2^2 \left\{ R_1 R_1'' + R_1'^2 + \frac{R_2''}{R_2} R_1^2 - \left(\frac{R_2' R_1}{R_2}\right)^2 \right\} = \eta = -T_1^{-2} \left( T_2^{-2} + \zeta \frac{\dot{T}_2}{T_2} \right)$$

### Solução I

Vamos estudar a escolha I). As equações (4.86) a

(4.88) podem ser reescritas

$$\dot{T}_2 = \zeta T_2^{-1} \quad (4.86)$$

$$T_1^2 T_2^2 = \frac{1}{\eta^2} \quad (4.87)$$

$$R_1 R_1'' + R_1'^2 + \frac{R_2''}{R_2} R_1^2 - \left(\frac{R_2' R_1}{R_2}\right)^2 = -\eta^2 \left( \frac{1}{R_2^2} + 2\zeta \frac{R_2'}{R_2} \right) \quad (4.88)$$

Vamos agora examinar a equação (4.80b) para este caso, Substituindo (4.84) em (4.80b) obtemos

$$2 R_2^2 T_2 \ddot{T}_2 - 2 R_1^2 R_2 R_2' \left( T_1^2 T_2 \dot{T}_2 + T_2^2 T_1 \dot{T}_1 \right) + 2 R_1 R_1' R_2^2 T_1^2 T_2 \dot{T}_2 = \kappa \mathcal{L}$$

O fator entre parêntesis na segunda parcela à esquerda é nulo, devido a (4.87) e (4.80b) para a escolha I) reduz-se a

$$2R_2^2 T_2 \ddot{T}_2 + 2R_1 R_1' R_2^2 T_1^2 T_2 \dot{T}_2 = \kappa \mathcal{L} \quad (4.89)$$

Porém, por (4.86)

$$\ddot{T}_2 = -\dot{\xi}^2$$

e, substituindo em (4.89) juntamente com (4.86) e (4.87), temos

$$-2R_2^2 \dot{\xi}^2 T_2^{-2} + 2R_1 R_1' R_2^2 \xi \frac{T_2^{-2}}{\eta^2} = \kappa \mathcal{L}$$

ou

$$-2R_2^2 \dot{\xi}^2 + 2R_1 R_1' R_2^2 \frac{\xi}{\eta^2} = \kappa \mathcal{L} T_2^2 = \chi \quad (4.90)$$

onde  $\chi$  é uma constante de separação. A equação (4.90) resulta nas duas equações

$$\mathcal{L} = \frac{\chi}{\kappa} T_2^{-2} \quad (4.91)$$

$$R_1' = \frac{\eta^2}{\xi} (\chi + 2\xi^2 R_2^2) \frac{1}{2R_1 R_2^2} \quad (4.92)$$

Comparando (4.91) com (4.76) vemos que o funcional do campo spinorial arbitrário  $\Lambda(u)$  do neutrino pode ser descrito pela função métrica  $T_2$  ou vice-versa. De qualquer forma, (4.91) relaciona  $\mathcal{L}(u)$  e  $T_2$ . Analogamente, pelas condições usadas na junção das soluções exterior e interior, que será feita mais tarde, poderemos também determinar a forma funcional de  $m(u)$ , parâmetro da solução exterior que aparece arbitrário na expressão (4.34), em termos das funções métricas interiores.

Derivando (4.92) resulta

$$R_1'' = 2\eta^2 \left\{ \frac{R_2'}{R_2 R_1} - \frac{\eta^4}{4\bar{z}^2} (\chi + 2\bar{z}^2 R_2^2)^2 \frac{1}{R_1^3 R_2^4} - \frac{\eta^2}{\bar{z}} (\chi + 2\bar{z}^2 R_2^2) \frac{R_2'}{R_2^3 R_1} \right\} \quad (4.93)$$

e, substituindo (4.92) e (4.93) em (4.88), após um longo cálculo, obtemos

$$\frac{R_2''}{R_2} = \frac{R_2'}{R_2} \left( \frac{R_2'}{R_2} + 2 \frac{R_1'}{R_1} \right) - \frac{1}{R_1^2} \left( \frac{\eta^2}{R_2^2} + 4\bar{z} \eta^2 \frac{R_2'}{R_2} \right) \quad (4.94)$$

(4.92) e (4.94) constituem um par de equações diferenciais acopladas para as duas funções métricas  $R_1$  e  $R_2$ . Uma vez determinada uma solução  $(R_1, R_2)$ ,  $(\rho + p)$  está determinado por (4.82),

$$\rho + p = \frac{4}{k} \left\{ R_1^2 \frac{R_2''}{R_2} \right\} T_1^{-2}$$

e se supomos uma equação de estado para o fluido

$$p = \lambda \rho, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (4.95)$$

a densidade de matéria  $\rho$  fica determinada

$$\rho = \frac{4}{k(1+\lambda)} \left\{ R_1^2 \frac{R_2''}{R_2} \right\} T_1^{-2} = \frac{4}{k(1+\lambda)\eta^2} \left\{ R_1 \frac{R_2''}{R_2} \right\} T_2^{-2} \quad (4.96)$$

Em (4.96),  $R_2''/R_2$  é dado por (4.94) e  $T_2$  uma solução de (4.86).

No entanto, resta verificar se as soluções dadas por (4.86), (4.87), (4.93) e (4.94) são compatíveis com as equações de campo restantes (4.80a) e (4.80c). Para isto vamos inicialmente mostrar que a equação (4.80c),

$$R_{22} = kp - \frac{1}{2} R$$

pode ser obtida por uma combinação linear conveniente de (4.80a), (4.80d), (4.80b) e (4.81): substituindo (4.80d) em (4.81) resulta

$$R_{00} + R_{22} + R_{01} = k(\varphi + p)$$

e usando (4.80b) acima obtemos

$$R_{00} + R_{22} = k\varphi + \frac{2k\mathcal{L}}{\alpha^2\beta^2} + kp$$

que, por (4.80a), reproduz (4.80c). Notemos que a equação (4.81) não impõe restrições adicionais sobre as soluções  $R_1, T_1, R_2, T_2$  mas apenas define a variável adicional  $(\varphi + p)$  em termos das soluções métricas. Assim, a única condição adicional a ser satisfeita pelas soluções (4.86), (4.87), (4.93) e (4.94) é a equação

$$R_{00} = \frac{2k\mathcal{L}}{\alpha^2\beta^2} + k\varphi + \frac{1}{2} R \quad (4.80a)$$

Usando as expressões anteriores, podemos mostrar que (4.80a) é equivalente a

$$R_{22} = \frac{k}{2} (\varphi - p) \quad (4.97)$$

ou, usando (4.77) e (4.84),

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} (\varphi - p) = & -8 \frac{R_2'}{R_2} \frac{\dot{T}_2}{T_2} + 2 \frac{R_2''}{R_2} R_1^2 T_1^2 + 4 \frac{R_2'}{R_2} R_1' R_1 T_1^2 - \frac{2}{R_2^2} T_2^{-2} \\ & + 2 \left( \frac{R_2' R_1}{R_2} \right)^2 T_1^2 \end{aligned}$$

Tendo em vista (4.86) e (4.87), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} (\varphi - p) = & \left[ -8 \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{R_2'}{R_2} + 2 \frac{R_2''}{R_2} R_1^2 + 4 \frac{R_2'}{R_2} R_1' R_1 \right. \\ & \left. - \frac{2}{R_2^2} \gamma^2 + 2 \left( \frac{R_2' R_1}{R_2} \right)^2 \right] T_1^2 \end{aligned} \quad (4.98)$$

Vamos mostrar que a restrição (4.98), juntamente

com

$$\kappa(\rho+p) = 4 \frac{R_2''}{R_2} R_1^2 T_1^2 \quad (4.82)$$

determina de modo unívoco a equação de estado  $P=P(\rho)$ . Substituindo (4.82), na forma acima, em (4.98) obtemos

$$\kappa \rho = \left[ -8 \frac{R_2'}{R_2} \eta^2 + 4 \frac{R_2''}{R_2} R_1^2 + 4 \frac{R_2'}{R_2} R_1' R_1 - \frac{2}{R_2^2} \eta^2 + 2 \left( \frac{R_2' R_1}{R_2} \right)^2 \right] T_1^2 \quad (4.99)$$

Usando o valor (4.94) de  $\frac{R_2''}{R_2}$  em (4.99) a densidade de matéria fica determinada por

$$\kappa \rho = 3 \left[ -8 \frac{R_2'}{R_2} \eta^2 + 4 \frac{R_2'}{R_2} R_1' R_1 + 2 \left( \frac{R_2' R_1}{R_2} \right)^2 - \frac{2 \eta^2}{R_2^2} \right] T_1^2 \quad (4.100)$$

Analogamente, usando (4.100) e (4.94) em (4.82), temos

$$\kappa p = \left[ 8 \frac{R_2'}{R_2} \eta^2 - 2 \left( \frac{R_2' R_1}{R_2} \right)^2 + \frac{2}{R_2^2} \eta^2 - 4 \frac{R_2'}{R_2} R_1' R_1 \right] T_1^2 \quad (4.101)$$

De (4.100) e (4.101) tiramos a relação

$$P/\rho = -\frac{1}{3}$$

ou

$$P = -\frac{1}{3} \rho \quad (4.102)$$

A equação de estado (4.102), embora satisfazendo às condições de energia<sup>(\*)</sup> ( $\rho+p > 0$ ), implica na existência de pressões escala

(\*) Para uma discussão completa das condições de energia em seu significado, ver Hawking e Ellis, ref. [13], capítulo 4.

res negativas, o que é fisicamente insatisfatório. Para evitar tal fato, somos levados mais tarde a introduzir nas equações de Einstein (ou, equivalentemente, no tensor momentum-energia total) um termo que descreve o resfriamento do fluido pela emissão de neutrinos.

Vamos, portanto, examinar a lei de conservação local

$$T^{\mu\nu}(\text{total})_{;\nu} = 0 \quad (4.103)$$

do tensor momentum-energia total (4.75). Um cálculo explícito de (4.103) nos dá

$$\dot{\rho} - (1+\lambda)\alpha\beta\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} - 2\frac{\dot{\beta}}{\beta\alpha}\right) = 0 \quad (4.104a)$$

$$\dot{\rho} - \alpha^2\beta' - \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)\alpha\beta\left(\alpha' + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}\right) = 0 \quad (4.104b)$$

onde usamos  $p = \lambda$ ,  $\rho = \text{constante}$ . Notemos que as componentes do tensor momentum-energia do neutrino não contribuem em (4.104a,b) desde que, por construção, o tensor momentum-energia do neutrino (2.35) tem divergência covariante nula e a redefinição (4.29) (ou (4.31)) não altera esta propriedade. Usando a expressão (4.96) para  $\rho(u,r)$ , a equação (4.104a) se escreve

$$\left[ 2T_1\dot{T}_1 - (1+\lambda)R_1T_1^3\left(\frac{\dot{T}_1}{R_1T_1^2} - 2\frac{\dot{T}_2}{R_1T_1T_2}\right) \right] \left(\frac{4}{K(1+\lambda)}R_1^2\frac{R_2''}{R_2}\right) = 0$$

o que implica

$$2T_1\dot{T}_1 - (1+\lambda)\left(T_1\dot{T}_1 - 2T_1^2\frac{\dot{T}_2}{T_2}\right) = 0 \quad (4.105)$$

Como, por (4.87),  $\frac{\dot{T}_2}{T_2} = -\frac{\dot{T}_1}{T_1}$ , (4.105) resulta

$$[2-3(1+\lambda)] T_1 \dot{T}_1 = 0$$

ou

$$\lambda = -\frac{1}{3}$$

consistente com (4.102). Assim, vemos que a equação (4.104a) não acarreta novas restrições sobre a solução e é consistente com a equação de estado encontrada (4.102). Vamos agora examinar a equação (4.104b). Usando  $\lambda = -\frac{1}{3}$  e a expressão de  $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = \frac{4}{\kappa(1+\lambda)} \left( R_1^2 \frac{R_2''}{R_2} \right) T_1^2$$

dada por (4.96), podemos reescrever (4.104b) como

$$4 \left( R_1^2 \frac{R_2''}{R_2} \right) T_1 \dot{T}_1 - R_1^2 \left( R_1^2 \frac{R_2''}{R_2} \right)' T_1^4 + 2 R_1 R_1' \left( R_1^2 \frac{R_2''}{R_2} \right) T_1^4 = 0 \quad (4.106)$$

Usando (4.86) e (4.87) em (4.106) resulta, após alguns cálculos,

$$-4z\eta^2 \left( R_1^2 \frac{R_2''}{R_2} \right) - R_1^2 \left( R_1^2 \frac{R_2''}{R_2} \right)' + 2R_1 R_1' \left( R_1^2 \frac{R_2''}{R_2} \right) = 0 \quad (4.107)$$

O segundo termo em (4.107) pode ser escrito  $(-2R_1^3 R_1' \frac{R_2''}{R_2} - R_1^4 (\frac{R_2''}{R_2})')$  e, simplificando com o último termo de (4.107), obtemos finalmente

$$\left( \frac{R_2''}{R_2} \right)' + 4z\eta^2 R_1^{-2} \left( \frac{R_2''}{R_2} \right) = 0 \quad (4.108)$$

Assim, a solução interior, dada por (4.84), (4.86), (4.87), (4.92), (4.94), (4.100) e (4.102), satisfaz às equações de Einstein e à lei de conservação local do tensor momentum-energia desde que (4.108) seja satisfeita. Quer dizer, as funções métricas  $R_1(r)$  e



$R_2(r)$  devem satisfazer simultaneamente as três equações

$$R_1' = \frac{\eta^2}{\xi} (\chi + 2\xi^2 R_2^2) \frac{1}{2R_1 R_2^2} \quad (4.92)$$

$$\frac{R_2''}{R_2} = \left(\frac{R_2'}{R_2}\right)^2 - \frac{\eta^2}{R_1^2 R_2^2} - 4\xi \eta^2 \frac{R_2'}{R_2} \frac{1}{R_1^2} + 2 \frac{R_1'}{R_1} \frac{R_2'}{R_2}, \quad (4.94)$$

$$\left(\frac{R_2''}{R_2}\right)' + 4\xi \eta^2 R_1^{-2} \left(\frac{R_2''}{R_2}\right) = 0 \quad (4.108)$$

Um cálculo direto e longo nos mostra que (4.94) é uma integral primeira de (4.108) contanto que (4.92) seja válida. Portanto as três equações acima para  $R_1$  e  $R_2$  são consistentes e restam somente duas equações independentes que vão nos determinar  $R_1(r)$  e  $R_2(r)$ . Em resumo, podemos interpretar esta solução como descrevendo a métrica (campo gravitacional) interior de um fluido perfeito, em interação com neutrinos descritos pelo tensor momento-energia (4.72), mas completamente desacoplados da matéria para a equação de estado  $p = -\frac{1}{3}$ .

A equação (4.108) nos permite estudar o comportamento de  $g$  com  $r$ . Por (4.96) temos

$$g(r, u) = g(r) T_1^2$$

onde

$$g(r) = \frac{6}{k} \frac{R_2''}{R_2} R_1^2$$

Assim

$$\frac{dg(r)}{dr} = \frac{12}{k} \frac{R_2''}{R_2} R_1 R_1' + \frac{6}{k} R_1^2 \left(\frac{R_2''}{R_2}\right)'$$

e, usando (4.92) e (4.108), obtemos

$$\frac{dg(r)}{dr} = \frac{6}{k} \frac{R_2''}{R_2} \eta^2 \left\{ \frac{\chi}{\xi} \frac{1}{R_2^2} - 2\xi \right\}$$

ou

$$\frac{d\varrho(r)}{dr} = \varrho(r) \frac{\eta^2}{R_1^2} \left\{ \frac{\chi}{z} \frac{1}{R_2^2} - 2z \right\} \quad (4.109)$$

Desde que  $\varrho(r) > 0$ , o sinal de  $\frac{d\varrho(r)}{dr}$  é dado por  $\left( \frac{\chi}{z} \frac{1}{R_2^2} - 2z \right)$ .

Para o caso de densidade decrescendo com  $r$ , temos

$$\frac{\chi}{z} \frac{1}{R_2^2} - 2z < 0$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\chi}{z} - 2z R_2^2 < 0 \quad (4.110)$$

A desigualdade (4.110) se verifica para os casos abaixo:

$$(i) \quad \begin{array}{l} \chi > 0 \\ z > 0 \end{array} \quad -\sqrt{\frac{\chi}{2z^2}} > R_2(r) > \sqrt{\frac{\chi}{2z^2}}$$

$$(ii) \quad \begin{array}{l} \chi > 0 \\ z < 0 \end{array} \quad -\sqrt{\frac{\chi}{2z^2}} < R_2(r) < \sqrt{\frac{\chi}{2z^2}}$$

$$(iii) \quad \begin{array}{l} \chi < 0 \\ z > 0 \end{array} \quad \text{para qualquer valor de } R_2(r)$$

$$(iv) \quad \begin{array}{l} \chi < 0 \\ z < 0 \end{array} \quad \text{incompatível com (4.110)}$$

A possibilidade cada caso acima para  $\varrho$  decrescendo com  $r$  fica restrita pelos sinais de  $\chi$  e  $z$ . No estudo das condições de junção da presente solução com a solução exterior, veremos que, em alguns casos,  $\chi$  deve ter o mesmo sinal de  $\dot{m}$ , de modo que  $\chi < 0$  corresponde a emissão e  $\chi > 0$  corresponde a absorção de neutrinos.

nos. Em outras situações de junção,  $\xi < 0$  corresponde a emissão de neutrinos pelo fluido, com conseqüente resfriamento e diminuição da massa-energia total como observada no infinito. Devemos também levar em conta que, pela relação (4.91), o sinal de  $\chi$  determina (ou está determinado por) o sinal de  $\mathcal{L}(u)$ , desde que o sinal de  $K$  e  $T_2^2$  são fixos, com  $K < 0$ .

Para a densidade  $\rho$  crescendo com  $r$ , devemos ter

$$\frac{\chi}{\xi} - 2\xi R_2^2 > 0 \quad (4.111)$$

que se verifica para os casos abaixo:

$$(i') \quad \begin{array}{l} \chi > 0 \\ \xi > 0 \end{array} \quad - \sqrt{\frac{\chi}{2\xi^2}} < R_2(r) < \sqrt{\frac{\chi}{2\xi^2}}$$

$$(ii') \quad \begin{array}{l} \chi > 0 \\ \xi < 0 \end{array} \quad - \sqrt{\frac{\chi}{2\xi^2}} > R_2(r) > \sqrt{\frac{\chi}{2\xi^2}}$$

$$(iii') \quad \begin{array}{l} \chi < 0 \\ \xi < 0 \end{array} \quad \text{qualquer valor de } R_2(r)$$

$$(iv') \quad \begin{array}{l} \chi < 0 \\ \xi > 0 \end{array} \quad \text{incompatível com (4.111)}$$

se em algum ponto  $r=r_m$ , correspondendo ao interior da estrela, a função  $R_2$  assume o valor

$$R_2(r_m) = \sqrt{\frac{\chi}{2\xi^2}} \quad (4.112)$$

então a densidade da estrela tem um máximo ou um mínimo sobre a 2-esfera de raio  $R_2(r_m)$ . Para as duas regiões  $0 < r < r_m$  e

$r_m < r < r_s$ , onde  $r_s$  é o valor de  $r$  correspondendo ao raio da estrela, escolhas compatíveis de (i)-(iii) e (i')-(iii') podem ser feitas. Como a junção de dois casos em  $r = r_m$  deve valer para qualquer  $u$ , ambas as escolhas devem ter  $\xi$  de mesmo sinal, devido a (4.86). Isto exclui a possibilidade de  $\kappa < 0$  com a densidade  $\rho$  tendo um máximo ou mínimo no interior da estrela; para  $\kappa < 0$  a densidade  $\rho$  deve ser uma função monótona de  $r$ .

Vamos interpretar o parâmetro  $\xi$ . A congruência de observadores se comovendo com o fluido é definida pelo campo de 4-velocidades (cf (4.73))

$$V^\mu = e_{(o)}^\mu = (\alpha^{-1}, \vec{0}) \quad (4.113)$$

Para nossa escolha de observadores no interior dos cones de luz do futuro, temos a condição

$$\alpha > 0 \quad (4.114)$$

Para a congruência determinada por (4.113), o parâmetro de expansão é definido por

$$\theta = V^\mu{}_{;\mu} = e_{(o)}^\mu{}_{;\mu}$$

ou, usando (2.40),

$$\theta = -\gamma_0^A{}_A \quad (4.115)$$

O parâmetro  $\theta$  tem a seguinte interpretação [74]: no sistema inercial local de um observador determinado por (4.113), vamos considerar um volume esférico infinitesimal do fluido, em torno da origem deste sistema de coordenadas -  $\theta$  mede a razão de variação deste volume ao longo da sua linha de universo determinada por (4.113). O volume se expande se  $\theta > 0$  ou se contrai se  $\theta < 0$ .

Equivalentemente, o observador na origem de seu referencial inercial vê as partículas do fluido numa vizinhança infinitesimal da origem se aproximarem ou se afastarem - o fluido está em contração ou em expansão devido aos processos físicos que ocorrem ao longo de sua linha de universo - se  $\theta$  menor ou maior que zero, respectivamente. Usando (4.57) em (4.115),

$$\theta = 2\dot{\beta}/\beta\alpha - \dot{\alpha}/\alpha^2$$

e, por (4.84), (4.86) e (4.87), resulta

$$\theta = \zeta \frac{3}{R_1 T_1 T_2^2} \quad (4.116)$$

Desde que  $\alpha > 0$ , o sinal de  $\theta$  é determinado pelo sinal de  $\zeta$ . Assim, para  $\zeta > 0$  ou  $\zeta < 0$ , o fluido está em expansão ou em contração, respectivamente.

#### REINTERPRETAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO

Apresentamos acima uma solução completa para o problema interior mas as equações de campo e a conservação local do tensor momentum-energia implicam na equação de estado

$$p = -\frac{1}{3} \rho \quad (4.102)$$

envolvendo, portanto, pressões escalares negativas. Podemos, porém, considerar tal solução, com equação de estado (4.102), como uma descrição efetiva de um comportamento mais complicado, envolvendo o resfriamento do fluido por emissão de neutrinos. Para isto vamos escrever as equações de Einstein com um termo tipo cosmológico<sup>(\*)</sup>

---

(\*) O lado esquerdo de (4.117) pode ser derivado de um princípio variacional, mas as identidades de Bianchi não mais implicam na conservação local do tensor momentum-energia.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda(x) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} (\text{total}) \quad (4.117)$$

ou, na base local (4.56),

$$R_{AB} - \frac{1}{2} \eta_{AB} R = \kappa T_{AB} + \Lambda \eta_{AB}$$

Usando a forma (4.75) temos

$$\kappa T_{AB} (\text{total}) + \Lambda \eta_{AB} = \kappa \left[ (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \delta_A^0 \delta_B^0 - \tilde{p} \eta_{AB} \right] + \Lambda \eta_{AB} + \kappa T_{AB} (\text{neutrino}) \quad (4.118)$$

onde  $\tilde{\rho}$  e  $\tilde{p}$  são a densidade de energia e pressão reais do fluido, medidas no referencial local de um observador comovente com o fluido. O lado direito de (4.118) pode ser reescrito

$$\begin{aligned} \kappa T_{AB} (\text{total}) + \Lambda \eta_{AB} = \kappa \left[ \left( \tilde{\rho} + \frac{\Lambda}{\kappa} + \tilde{p} - \frac{\Lambda}{\kappa} \right) \delta_A^0 \delta_B^0 - \left( \tilde{p} - \frac{\Lambda}{\kappa} \right) \eta_{AB} \right] \\ + \kappa T_{AB} (\text{neutrino}) \end{aligned} \quad (4.119)$$

e o lado direito de (4.119) tem a forma de (4.75) para densidade  $\rho$  e pressão  $p$  definidas por

$$\rho = \tilde{\rho} + \frac{\Lambda}{\kappa} \quad (4.120a)$$

$$p = \tilde{p} - \frac{\Lambda}{\kappa} \quad (4.120b)$$

Se tomarmos  $(\rho, p)$  da solução interior exata obtida, satisfazendo a equação de estado

$$p = -\frac{1}{3} \rho$$

resulta que  $\tilde{\rho}$  e  $\tilde{p}$  correspondem à mesma solução métrica das equações de Einstein (4.117) com termo  $\Lambda$ , satisfazendo a equação

$$\tilde{p} + \frac{1}{3} \tilde{\rho} = \frac{2}{3} \frac{\Lambda}{\kappa} \quad (4.121)$$

As identidades de Bianchi contraídas implicam, por (4.117), a lei de conservação

$$\kappa T_{\mu}^{\nu} (\text{total})_{||\nu} = - \Lambda_{|\mu} \quad (4.122)$$

Como, por construção, o tensor momentum-energia do neutrino tem divergência covariante nula (a redefinição (4.29) não altera esta propriedade), (4.122) se reduz a

$$\kappa T_{\mu\nu} (\tilde{\rho}, \tilde{p})^{||\nu} = - \Lambda_{|\mu} \quad (4.123)$$

O segundo membro de (4.123) permite descrever a quantidade de calor por volume específico perdida pelo sistema (ou cedida a ele) e que pode ser interpretada como a taxa de resfriamento do fluido devida à emissão de neutrinos. Para isto, vamos escrever (4.123) na base local de tetrados (4.56)

$$\kappa e_{(A)}^{\mu} T_{\mu}^{\nu} (\tilde{\rho}, \tilde{p})_{||\nu} = - e_{(A)}^{\mu} \Lambda_{|\mu} \quad (4.124)$$

Usando (4.74), (4.56) e a definição (2.40), podemos escrever (4.124) como

$$\kappa e_{(A)}^{\mu} \left\{ (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \alpha^{-1} e_{\mu(0)} - (\tilde{\rho} + \tilde{p}) e_{\mu(0)} \gamma_0^B - (\tilde{\rho} + \tilde{p}) e_{\mu(0)} \gamma_0^B - \tilde{p} \delta_{\mu}^0 - \tilde{p}' \delta_{\mu}^1 \right\} = - e_{(A)}^{\mu} \Lambda_{|\mu} \quad (4.125)$$

Notemos que, para  $A=0$ , obtemos a equação (4.123) descrita no referencial de repouso do fluido desde que, por (4.73),  $v^{\mu} = e_{(0)}^{\mu}$ . Temos então

$$\kappa \left\{ \tilde{\rho} - \tilde{\rho} + \tilde{p} \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} - 2 \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) \right\} = - \dot{\Lambda} \quad (4.126)$$

onde usamos (4.56) e (4.57). Denotando por  $n$  a densidade de número bariônico medida localmente pelo observador (4.73) comovente

com o fluido (referencial de repouso do fluido), a conservação de matéria é, então, expressa por

$$\left( n e_{(0)}^{\mu} \right)_{||\mu} = 0 \quad (4.127)$$

ou por (4.56) e (4.57),

$$\dot{n} - n \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} - 2 \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) = 0 \quad (4.128)$$

Podemos definir uma energia interna específica (i.e., energia interna por barion)  $\mathcal{E}$ , que não inclui a energia específica de massa de repouso, por

$$\tilde{\mathcal{E}} = n (\mu_0 + \mathcal{E}) \quad (4.129)$$

onde  $\mu_0$  é a massa de repouso do barion. Usando (4.128) e (4.129) em (4.126) resulta

$$\kappa \left\{ \dot{\mathcal{E}} n - \tilde{p} \frac{\dot{n}}{n} \right\} = - \dot{\Lambda}$$

ou

$$\dot{\mathcal{E}} + \tilde{p} \left( \frac{1}{n} \right)^{\cdot} = - \frac{1}{\kappa} \frac{\dot{\Lambda}}{n} \quad (4.130)$$

A equação (4.130) é a expressão, no referencial de repouso do fluido<sup>(\*)</sup>, da primeira lei da termodinâmica, onde  $\left( -\frac{1}{\kappa} \frac{\dot{\Lambda}}{n} \right)$  é a variação da quantidade de calor por barion cedida (ou recebida) pelo fluido.

Para  $A=1$ , a equação (4.125) nos dá

---

(\*) Notemos, por exemplo, que  $\dot{\mathcal{E}} = \kappa \varepsilon_{1\mu} V^{\mu}$ .



$$k \left\{ \tilde{\rho} + \tilde{p} \gamma_0^{-1} + \dot{\tilde{p}} \alpha^{-1} - \tilde{p}' \alpha \right\} = \alpha^{-1} \dot{\Lambda} - \alpha \Lambda' \quad (4.131)$$

Usando (4.126) no lado direito de (4.131), bem como o valor  $\gamma_0^{-1}$  no lado esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{p}' + (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \left( \alpha' + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} \right) \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha^2} (\dot{\tilde{\rho}} + \dot{\tilde{p}}) \\ + \frac{1}{\alpha} (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \left( \frac{2\dot{\beta}}{\beta\alpha} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} \right) + \frac{\Lambda'}{k} \end{aligned} \quad (4.132)$$

que substitui a equação usual para distribuições estáticas  $\rho' + (\rho + p) \frac{\alpha'}{\alpha} = 0$ .

A expressão (4.132) pode ser considerada como a equação de equilíbrio hidrostático para a configuração da estrela. De fato, por (4.131) ou (4.132) podemos ver que  $\Lambda/k$  é homogêneo a uma pressão. Vamos agora considerar distribuições quasi-estacionárias. Desde que, por (4.116), a taxa de expansão ou contração é determinada pelo parâmetro  $\xi$ , vamos definir configurações quasi-estacionárias para valores de  $\xi$  tais que

$$\xi^2 \lll |\xi| \quad (4.133)$$

Uma integração imediata de (4.86) e (4.87) nos dá

$$T_2^2 = 2\xi u + \xi_0 \quad (4.134)$$

$$T_1^2 = \frac{1}{\eta^2 (2\xi u + \xi_0)} \quad (4.135)$$

onde  $\xi_0$  é uma constante de integração. Para (4.133) e valores finitos de  $u$ , as funções (4.134) e (4.135) assumem aproximadamente os valores constantes

$$T_2^2 \simeq z_0 \quad (4.136)$$

$$T_1^2 \simeq 1/\eta^2 z_0$$

Notemos também que, por (4.86) e (4.87), as derivadas em relação a  $u$  das funções métricas  $\alpha$  e  $\beta$ , bem como das quantidades  $\tilde{\rho}$  e  $\tilde{p}$  (cf. (4.100)), dependem linearmente de  $\tilde{z}$  e portanto podem ser desprezadas para (4.133) e valores finitos de  $u$ . Neste caso, a equação (4.132) pode ser escrita

$$\tilde{\rho}' - \left(\frac{\Lambda}{\kappa}\right)' + (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \frac{\alpha'}{\alpha} = 0 \quad (4.137)$$

que é a equação de equilíbrio radiativo para configurações quasi-estacionárias esfericamente simétricas. Neste caso a quantidade  $\Lambda/\kappa$  pode ser interpretada como pressão de radiação<sup>(\*)</sup> no interior do fluido e que denotaremos por

$$p_r = \frac{\Lambda}{\kappa} \quad , \quad \tilde{z}^2 \ll |\tilde{z}| \quad (4.138)$$

A equação

$$\tilde{\rho}' - p_r' + (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \frac{\alpha'}{\alpha} = 0$$

é o análogo relativístico quasi-estacionário, para neutrinos, da equação de Chandrasekhar<sup>[66]</sup>, para equilíbrio radiativo da configuração de uma estrela, em aproximação Newtoniana. A denominação de pressão de radiação é feita por analogia formal com a pressão de radiação de ftons na equação Newtoniana de Chandrasekhar. A diferença básica é que o gradiente da pressão de radiação de neu -

---

(\*) Notemos que, por (4.121),  $\Lambda/\kappa > 0$  e portanto  $p_r$  tem o sinal positivo correto, como era de se esperar.

trinos (4.138) contribui negativamente na equação de equilíbrio radiativo da configuração da estrela. Isto era de se esperar, desde que neutrinos não tem interação com o fluido (o fluido é suposto transparente para neutrinos) e o efeito dos neutrinos é resfriar a configuração, este resfriamento sendo equivalente a uma pressão no sentido inverso, adicional à pressão gravitacional (neste caso, devemos garantir que efetivamente  $\Lambda'/k > 0$ ). Assim, uma vez conhecida a forma da função  $\Lambda(r,u)$  podemos em princípio determinar as grandezas características de uma configuração estelar com emissão de neutrinos, a função  $\Lambda$  contendo informação da taxa de resfriamento do fluido (cf. (4.130)) pela emissão de neutrino, bem como a pressão de radiação devida aos neutrinos como foi visto no caso estacionário.

### Condições de Junção (e Contorno) das Soluções Interior e Exterior

Vamos denotar o sistema de coordenadas usado para a solução interior (4.54) por  $x_I^\alpha = (U, R, \theta, \varphi)$  e o da solução exterior (4.2) por  $x_{II}^\alpha = (u, r, \theta, \varphi)$ . Para a solução exterior, as coordenadas  $x_{II}^\alpha$  são admissíveis na região do espaço-tempo restrita por  $r > 2m(u)$ . Para a solução interior, podemos ver, por (4.92), (4.94) e (4.108), que não existe restrição no domínio da coordenada  $R$ , excluídos os pontos tais que  $R_2(R) = 0$  (que são improváveis desde que  $R_2^{-2}$  é proporcional à curvatura das esferas  $U, R = \text{const}$  e que é sempre suposta finita), a coordenada  $U$  deve ser restrita pela condição (cf. (4.134))

$$U < - \frac{3_0}{23}$$

consequência de  $T_2(V) = 0$  e  $T_1(V)$  finito, no domínio admissível de  $V$ . Na análise que segue, estamos considerando apenas as regiões do espaço-tempo (das soluções) cobertas pelas coordenadas acima.

Segundo Lichnerowicz [67], fazemos a suposição básica que as métricas-soluções, nas respectivas coordenadas, são contínuas e tem derivadas parciais de terceira ordem seccionalmente contínuas. É fácil ver que estas condições são satisfeitas pelas presentes soluções, nas regiões acima consideradas. Vamos agora, considerar a hipersuperfície 3-dim  $\Sigma$  de junção das duas soluções e uma vizinhança  $D$  finita de  $\Sigma$ .  $\Sigma$  é escolhida de tal forma que existe uma vizinhança finita  $D$  que pode ser coberta simultaneamente pelos sistemas de coordenadas  $x_I^\alpha$  e  $x_{II}^\alpha$ . Supondo que em  $D$  as funções de transformação de coordenadas  $x_{II}^\alpha \rightarrow x_I^\alpha$  tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas através de  $\Sigma$  e derivadas parciais de segunda ordem seccionalmente contínuas em  $D$ , a métrica transformada será contínua através de  $\Sigma$  e com derivadas segundas seccionalmente contínuas em  $D$  (quer dizer, as derivadas parciais segundas da métrica podem tender para limites diferentes em cada lado de  $\Sigma$ ). Se a equação de  $\Sigma$  é dada por  $\phi = 0$ , tem-se a condição de junção [68]

$$G_\mu^\nu \phi_{,\nu} = \text{contínuo através de } \Sigma \quad (4.139)$$

onde  $G_\mu^\nu$  é o tensor de Einstein. Usando as equações de Einstein em (4.139), podemos escrever a condição de junção de O'-Brien-Synge [69]

$$T_\mu^\nu \phi^{,\nu} = \text{contínuo através de } \Sigma \quad (4.140)$$

que expressa a continuidade do fluxo do 4-momentum através de  $\Sigma$ . Embora seccionalmente contínuas em  $D$ , as derivadas parciais de primeira ordem da métrica serão descontínuas através de  $\Sigma$  se o tensor momentum-energia for descontínuo através de  $\Sigma$ .

Vamos tomar como hipersuperfície de junção uma esfera com raio variando, descrita em coordenadas exteriores por

$$r = r_s(u) \quad (4.141)$$

Em coordenadas interiores  $x_{\text{I}}^\alpha$ , notemos que  $R$  é uma coordenada comoviente com o fluido, desde que

$$e_{\text{I}}^{\mu} \frac{\partial R}{\partial x_{\text{I}}^\mu} = 0$$

Então  $\Sigma$  é descrita por

$$R = R_s = \text{const.} \quad (4.142)$$

A métrica induzida sobre  $\Sigma$  pela métrica exterior pode ser calculada: tomamos sobre  $\Sigma$  as coordenadas  $\lambda^i = (u, \theta, \varphi)$ . As coordenadas extrínsecas de pontos sobre  $\Sigma$ , parametrizadas por  $\lambda^i$ , são dadas por

$$x_{\text{II}}^\alpha (\lambda^i) = (u, r_s(u), \theta, \varphi)$$

e a métrica induzida sobre  $\Sigma$ ,

$$\gamma_{ij} = x_{\text{II}i}^\alpha x_{\text{II}j}^\beta g_{\alpha\beta}$$

resulta

$$(ds^2)_\Sigma = \left( 1 - \frac{2m(u)}{r_s(u)} + 2\dot{r}_s \right) du^2 - r_s^2 d\Omega^2 \quad (4.143)$$

A métrica induzida sobre  $\Sigma$  pela métrica interior pode ser calculada analogamente: tomamos sobre  $\Sigma$  as coordenadas  $\tilde{\lambda}^i = (U, \theta, \varphi)$ . As coordenadas extrínsecas dos pontos sobre  $\Sigma$ , parametrizadas por  $\tilde{\lambda}_i$ , são dadas por

$$x_{\text{I}}^{\alpha}(\tilde{\lambda}_i) = (U, R_s = \text{const.}, \theta, \varphi)$$

e a métrica induzida sobre  $\Sigma$  pela métrica interior,

$$\gamma_{ij} = x_{\text{I}i}^{\alpha} x_{\text{I}j}^{\beta} g_{\alpha\beta}$$

nos dá<sup>(\*)</sup>

$$(ds^2)_{\Sigma} = \alpha^2(R_s, U) dU^2 - \beta^2(R_s, U) d\Omega^2 \quad (4.144)$$

De acordo com a discussão anterior, a primeira condição de junção é dada pela igualdade de (4.143) e (4.144) e resulta

$$\beta^2(R_s, U) = r_s^2(u) \quad (4.145)$$

$$\alpha^2(R_s, U) dU^2 = \left( 1 - \frac{2m(u)}{r_s^2} + 2\dot{r}_s \right) du^2 \quad (4.146)$$

A expressão (4.145) nos dá a equação da superfície de contorno e a expressão (4.146) nos relaciona o intervalo de tempo próprio (ou tempo Newtoniano)  $du$  de um observador em repouso no infinito e o intervalo  $dU$  de um observador sobre a superfície  $\Sigma$ . A igualdade das duas primeiras formas fundamentais de  $\Sigma$ , (4.143) e (4.144), garante a continuidade das componentes da métrica atra

---

(\*) Notemos que, contrariamente à hipersuperfície  $r=2m(u)$  que era tipo-espaço para  $\dot{m} < 0$ , a hipersuperfície  $\Sigma : r=r_s(u)$  tem assinatura  $(+, -, -)$ , por (4.144).

vés de  $\Sigma$ . Notemos que se  $\dot{r}_s = 0$ , pela equação (4.146) poderíamos tomar  $\mathcal{U} = u$  e prolongar o sistema de coordenadas exterior naturalmente para o interior  $R < r_s$ , correspondendo a uma solução completa do problema de Schwarzschild para uma esfera estática de fluido. Para  $\dot{r}_s \neq 0$ , a identificação  $x_{\text{II}}^\alpha = x_{\text{I}}^\alpha$  torna (4.145), (4.146) incompatíveis com a continuidade das componentes da métrica através de  $\Sigma$ .

Dadas as duas métricas

$$ds_{\text{I}}^2 = \alpha^2(\mathcal{U}, R) d\mathcal{U}^2 + 2 d\mathcal{U} dR - \beta^2(\mathcal{U}, R) d\Omega^2$$

$$ds_{\text{II}}^2 = (1 - 2m(u)r^{-1}) du^2 + 2 du dr - r^2 d\Omega^2$$

vamos examinar o conjunto de transformações de coordenadas de  $x_{\text{I}}^\alpha \rightarrow x_{\text{II}}^\alpha$  dado por

$$u = F(\mathcal{U}, R) \tag{4.147}$$

$$r = G(\mathcal{U}, R) \tag{4.148}$$

Diferenciando (4.147),

$$du = F' dR + \dot{F} d\mathcal{U} \tag{4.149}$$

onde  $F' = \frac{\partial F}{\partial R}$  e  $\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \mathcal{U}}$ . Calculando (4.149) em  $R=R_s$  e comparando com (4.146), temos a condição

$$F'(R_s, \mathcal{U}) = 0 \tag{4.150}$$

Poderíamos, eventualmente, escolher  $F'(R, \mathcal{U}) = 0 \Rightarrow F = F(\mathcal{U})$ , mas deixamos em aberto.

Assim, podemos escrever

$$ds_{\text{II}}^2 = (1 - 2m(F) G^{-1})(\dot{F}^2 + \dot{F}\dot{G}) d\mathcal{U}^2 + 2 \dot{F} G' d\mathcal{U} dR - G^2 d\Omega^2 \tag{4.151}$$

Para  $R=R_s$ , comparando com  $ds_I^2$ , tiramos

$$G^2(R_s, U) = R_2^2(R_s) T_2^2(U) \quad (4.152a)$$

$$(\dot{F} G') (R_s) = 1 \quad (4.152b)$$

$$\left[ (1 - 2m(F)G^{-1})(\dot{F}^2 + \dot{F}\dot{G}) \right]_{R=R_s} = R_1^2(R_s) T_1^2(U) \quad (4.152c)$$

As equações (4.152) definem um conjunto de transformações de coordenadas (4.147), (4.148), numa vizinhança D finita de  $\Sigma$ , que permite realizar as condições de junção acima discutidas e com as propriedades convenientes. De fato, (4.152) é a expressão da continuidade das componentes da métrica através de  $\Sigma$ . Por (4.149) e (4.150), (4.146) nos dá

$$R_1^2(R_s) T_1^2(U) = \left\{ 1 - 2m(F(R_s, U)) \dot{G}^{-1}(R_s, U) + 2\dot{G}(R_s, U) \right\} \dot{F}^2(R_s, U) \quad (4.153)$$

e, de (4.152b) com (4.153),

$$G'(R_s, U) = \frac{1}{R_1(R_s) T_1(U)} \left\{ 1 - 2m(F(R_s, U)) \dot{G}^{-1}(R_s, U) + 2\dot{G}(R_s, U) \right\}^{1/2} \quad (4.154)$$

As transformações inversas de (4.147) e (4.148) são definidas por

$$dR = \frac{1}{\Delta} (\dot{G} du - \dot{F} dr)$$

$$dU = \frac{1}{\Delta} (-G' du + F' dr)$$

onde  $\Delta = F'\dot{G} - \dot{F}G'$  e  $G' = \frac{\partial G}{\partial R}$ ,  $\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial U}$ , por exemplo. Para a escolha  $F = F(U)$ ,

$$dU = \dot{F}^{-1} du$$



e podemos então, por (4.145), (4.148), (4.152a) e (4.153), calcular  $dr_s/du$ .

Assim

$$\frac{dr_s}{du} = 2\zeta \dot{F}^{-1}(U) R_2(R_s) T_2^{-1}(U)$$

ou

$$\frac{dr_s}{du}(u) = 2\zeta \frac{R_2(R_s)}{R_1(R_s)} \eta \left\{ 1 - \frac{2m(u)}{r_s(u)} + 2 \dot{r}_s(u) \right\}^{1/2} \quad (4.155)$$

onde a variável  $u$  está relacionada à variável  $U$  por  $u = F(R_s, U)$ . A equação (4.155) é uma equação de evolução da superfície  $\Sigma$  e permite determinar - por (4.145) e uma vez conhecida a função de transformação  $F$ , restrita por (4.152) - a função  $m(u)$  da solução exterior. Desde que, por (4.146),  $\left\{ 1 - 2m(u)/r_s(u) + 2 \dot{r}_s(u) \right\}^{1/2}$  é sempre positivo, podemos ver que o sinal de  $\dot{r}_s(u)$  é dado por  $\zeta$ , de modo que se o fluido está em contração  $\dot{r}_s < 0$ , e se o fluido está em expansão  $\dot{r}_s > 0$ , correspondendo a crescimento ou diminuição da área de  $\Sigma$ .

Vamos examinar agora a condição de junção de O'Brien-Synge (4.140), na superfície de junção (4.141),

$$\Sigma : r = r_s(u)$$

Denotando a normal à superfície  $\Sigma$  por  $\Sigma_{1\mu}$ , temos

$$\Sigma_{1\mu} = (-\dot{r}_s, 1, 0, 0) \quad , \quad \Sigma^{\mu\alpha} = g^{\mu\alpha} \Sigma_{1\alpha} = (1, -(\dot{R}_s + \alpha^2), 0, 0) \quad (4.156)$$

Como a métrica é contínua através de  $\Sigma$ , a condição de junção (4.140) pode ser expressa, por exemplo, na base de tetradas (4.5)

$$e_{(A)}^{\mu} T_{\mu}^{\nu} e_{(B)}^{\rho} e_{(B)}^{\sigma} \Sigma_{1\sigma} = \text{contínua através de } \Sigma$$

ou

$$T_{AB} \sum^{1B} = \text{contínua através de } \Sigma \quad (4.157)$$

onde  $\sum_{1B} = (-\alpha^{-1} \dot{r}_s, \alpha^{-1} (\dot{r}_s + \alpha^2), 0, 0)$  e  $\alpha$  é dada por

$$\alpha_{II}^2 = (1 - 2m(u) r_s^{-1}(u))$$

desde que a normal (4.156) é expressa em termos da métrica externa. Aqui a função  $\alpha^2$  é calculada sobre  $\Sigma$  e a coordenada  $u$  é, então, dada por  $u = F(R_s, U)$  em termos das coordenadas  $x_I^\alpha$  da solução interior. Por isto, designamos a função métrica acima por  $\alpha_{II}^2(\Sigma)$  e seguiremos uma notação análoga em outros casos. Das equações (4.157) tiramos que

$$(\Delta T_A^B) \sum_{1B} = 0 \quad (4.158)$$

onde  $\Delta T_A^B$  designa a descontinuidade em  $T_A^B$  ao atravessar  $\Sigma$ , explicitamente  $\Delta T_A^B = T_A^B(\text{I})_\Sigma - T_A^B(\text{II})_\Sigma$ . Notemos que as quantidades em (4.158), expressas na base de tetradas, são invariantes pelas transformações de coordenadas (4.147) e (4.148) e, portanto, as componentes (4.32) e (4.75) do tensor momentum-energia interior e exterior podem ser usadas diretamente no cálculo de  $\Delta T_A^B$ . Com a notação

$$\ell(u) = 2\pi i C_0^2 (\lambda^+ \dot{\lambda} - \dot{\lambda}^+ \lambda)$$

em (4.32) e usando (4.145), temos

$$\Delta T_0^1 = \frac{2}{r_s^2} \left( \frac{\mathcal{L}}{\alpha_I^2(\Sigma)} - \frac{\ell}{\alpha_{II}^2(\Sigma)} \right) \quad (4.159)$$

$$\Delta T_0^0 = \Delta \mathcal{P} + \frac{2}{r_s^2} \left( \frac{\mathcal{L}}{\alpha_I^2(\Sigma)} - \frac{\ell}{\alpha_{II}^2(\Sigma)} \right)$$

$$\Delta T_1^1 = -\Delta \mathcal{P} - \frac{2}{r_s^2} \left( \frac{\mathcal{L}}{\alpha_I^2(\Sigma)} - \frac{\ell}{\alpha_{II}^2(\Sigma)} \right)$$

onde  $\alpha_{\text{I}}^2(\Sigma) = R_1^2(R_s) T_1^2(U)$ .

Usando a expressão de  $\Sigma_{\text{IB}}$ , (4.158) pode ser escrita

$$\Delta T_0^1(\dot{r}_s + \alpha_{\text{II}}^2(\Sigma)) - \Delta T_0^0 \dot{r}_s = 0 \quad (4.160)$$

$$\Delta T_1^1(\dot{r}_s + \alpha_{\text{II}}^2(\Sigma)) - \Delta T_1^0 \dot{r}_s = 0$$

e, substituindo (4.159), resulta

$$\Delta \varrho \dot{r}_s = \frac{2}{r_s^2} \left( \frac{\ell}{\alpha_{\text{I}}^2(\Sigma)} - \frac{\ell}{\alpha_{\text{II}}^2(\Sigma)} \right) \alpha_{\text{II}}^2(\Sigma) \quad (4.161)$$

$$-\Delta p(\dot{r}_s + \alpha_{\text{II}}^2(\Sigma)) - \frac{2}{r_s^2} \left( \frac{\ell}{\alpha_{\text{I}}^2(\Sigma)} - \frac{\ell}{\alpha_{\text{II}}^2(\Sigma)} \right) \alpha_{\text{II}}^2(\Sigma) = 0 \quad (4.162)$$

As equações (4.161) e (4.162) são a expressão das condições de junção do problema interior e exterior para uma estrela emitindo neutrinos.  $\Delta \varrho$  e  $\Delta p$  denotam a descontinuidade na densidade de matéria e pressão através de  $\Sigma$ . Aqui  $\varrho$  e  $p$  são as quantidades (4.100) e (4.101) da solução interior das equações de Einstein, que devem satisfazer  $p = -\varrho/3$ . Isto implica que as descontinuidades através de  $\Sigma$  devem satisfazer

$$\Delta p = -\frac{1}{3} \Delta \varrho \quad (4.163)$$

Esta condição (4.163) nos determina como a solução real  $(\tilde{\varrho}, \tilde{p}, \Lambda)$  deve sofrer descontinuidade através de  $\Sigma$ . Por (4.120 a,b)

$$\Delta \varrho = \Delta \tilde{\varrho} + \frac{1}{\kappa} \Delta \Lambda \quad (4.164a)$$

$$\Delta p = \Delta \tilde{p} - \frac{1}{\kappa} \Delta \Lambda \quad (4.164b)$$

onde  $\Delta \Lambda = \Lambda(R_s, U)$ , com a condição adicional, de (4.163),

$$\frac{1}{3} \Delta \tilde{\varrho} + \Delta \tilde{p} = \frac{2}{3\kappa} \Delta \Lambda \quad (4.165)$$

Fisicamente devemos ter

$$\Delta \tilde{p} = 0 \quad (4.166)$$

o que reduz (4.164a,b) e (4.165) a

$$\begin{aligned} \Delta p &= \Delta \tilde{p} + \frac{1}{k} \Delta \Lambda \\ \Delta p &= -\frac{1}{k} \Delta \Lambda \quad \Delta \tilde{p} = \frac{2}{k} \Delta \Lambda \end{aligned} \quad (4.167)$$

Ao examinar as condições de junção (4.161) e (4.162), podemos distinguir duas situações relevantes:

$$(a) \quad \Delta s, \Delta p \neq 0$$

Substituindo (4.161) e (4.162) em (4.163) obtemos

$$\frac{2 \alpha_{II}^2(\Sigma)}{r_s^2} \left( \frac{\mathcal{L}}{\alpha_I^2(\Sigma)} - \frac{\ell}{\alpha_{II}^2(\Sigma)} \right) \left( \frac{1}{3} \frac{\dot{r}_s + \alpha_{II}^2(\Sigma)}{\dot{r}_s} - 1 \right) = 0$$

o que implica

$$\frac{\mathcal{L}}{\alpha_I^2(\Sigma)} - \frac{\ell}{\alpha_{II}^2(\Sigma)} = 0 \quad (4.168)$$

ou

$$\alpha_{II}^2(\Sigma) = 2 \dot{r}_s \quad (4.169)$$

O caso (4.168) será examinado mais tarde. A equação (4.169) pode ser escrita

$$2 \dot{r}_s = 1 - \frac{2m(u)}{r_s}, \quad u = F(R_s, V) \quad (4.170)$$

Substituindo (4.170) em (4.155) podemos tirar a expressão para  $m(u)$

$$m(u) = \left\{ 1 - 64 \bar{z}^2 \gamma^2 \frac{R_2^2(R_s)}{R_1^2(R_s)} \right\} \frac{r_s(u)}{2} \quad (4.171)$$

Podemos ver que  $r_s > 2m(u)$  sempre, correspondendo, portanto, a uma região do espaço-tempo admissível ao sistema de coordenadas usado. A equação (4.171), que resulta da escolha (4.169), contém a informação importante de que, no limite estático  $\xi \rightarrow 0$ , a superfície  $\Sigma$  coincide com a superfície de Schwarzschild da estrela, quer dizer, para  $\xi \rightarrow 0$  o fluido está todo contido no interior de seu raio de Schwarzschild. Em (4.171), usando a expressão (4.145) para  $r_s(u)$  bem como (4.134), o valor da massa de Schwarzschild no limite estático ( $\xi \rightarrow 0$ ) é dado por

$$m = \xi_0 \frac{R_2(R_s)}{2} \quad (4.172)$$

ou

$$M = \xi_0 \frac{R_2(R_s)}{2G}$$

que é o limite estático da configuração de uma estrela emitindo neutrinos (imediatamente antes de passar o seu raio de Schwarzschild).

Pelo que foi discutido acima, a escolha (4.169) que resulta em (4.171) não é satisfatória para distribuição quasi-estacionárias, em equilíbrio radiativo (cf. (4.137)), com um eventual limite Newtoniano. Por isto vamos considerar

(b) distribuições  $(\xi, p, \Lambda)$  que se anulam suavemente em  $\Sigma$ , sem descontinuidade:  $\Delta \xi, \Delta p, \Delta \Lambda = 0$ .

Por (4.161) e (4.162), isto implica

$$\frac{\mathcal{L}}{\alpha_I^2(\Sigma)} - \frac{\ell}{\alpha_{II}^2(\Sigma)} = 0 \quad (4.168)$$

que é o primeiro caso de (a). Usando (4.91), temos

$$\ell(u) = \frac{\alpha_{II}^2(\Sigma)}{\alpha_I^2(\Sigma)} \frac{\kappa}{\kappa} T_2^{-2}(U) \quad (4.173)$$

ou, tendo em vista que  $\alpha_I^2(\Sigma) = R_1^2(R_3) T_1^2(U)$  e por (4.87),

$$\ell(u) = \left( 1 - \frac{2m(u)}{r_3(u)} \right) \eta^2 \chi / K \quad (4.174)$$

Por (4.34) (estamos tomando agora  $K < 0$ )

$$\ell(u) = 4\dot{m}/K$$

que, substituído em (4.174), nos dá uma equação diferencial ordinária para  $m(u)$

$$4\dot{m}(u) = \eta^2 \chi \left( 1 - \frac{2m(u)}{r_3(u)} \right) \quad (4.175)$$

A equação (4.175) nos permite discutir o sinal de  $\chi$ . Sabemos que se há emissão de neutrinos  $\dot{m} < 0$  e se há absorção  $\dot{m} > 0$ . Desde que o termo entre parêntesis do lado direito é sempre maior que zero, temos então

$$(b.1) \quad \chi < 0 \quad \text{emissão } (\dot{m} < 0)$$

$$(b.2) \quad \chi > 0 \quad \text{absorção } (\dot{m} > 0)$$

sem nenhuma relação com o sinal de  $\xi$ . Contrariamente ao caso (4.169), (4.171), onde o sinal de  $\dot{m}$  é dado por  $\xi$ , nos presentes casos (b.1) e (b.2) podemos eventualmente ter emissão com expansão e absorção com contração do fluido da estrela. Por outro lado, como já vimos anteriormente, para emissão de neutrinos ( $\chi < 0$ ) a densidade  $\rho$  deve ser uma função monótona de  $r$ , monótona crescente no caso de contração e monótona decrescente no caso de expansão do fluido (cf. estudo do sinal de  $d\rho(r)/dr$ , nos casos (iii) e (iii')). Finalmente, por (4.90), podemos ver que para se ter  $R_1'(r)$  finito,  $\chi$  deve ser da mesma ordem de  $\xi$ , quer dizer,  $\chi \rightarrow 0$  quando  $\xi \rightarrow 0$  independente do sinal de ambos.

Finalizando, vamos ver como determinar a função  $\Lambda(R, U)$  (que contém informações sobre a dinâmica da configuração do fluido) bem como a densidade real  $\tilde{\rho}$  do fluido, definida em (4.120a) (que deve ser distinguida da densidade efetiva  $\rho$ ). Por exemplo, utilizamos o caso da condição de junção (4.169). A densidade  $\tilde{\rho}$  é medida no referencial local de um observador comovente com o fluido. O volume próprio deste observador é dado por

$$dV = e_{\alpha}^{(1)} e_{\beta}^{(2)} e_{\gamma}^{(3)} dx^{\alpha} dx^{\beta} dx^{\gamma} \quad (4.176)$$

onde  $(e_{\alpha}^{(A)})$  é dado por (4.56) (notemos que a 4-velocidade do observador é  $v^{\alpha} = e_{(0)}^{\alpha}$  (cf. (4.73)). Assim, a energia total de repouso do fluido contido numa esfera com raio correspondente à coordenada  $R$ , para um dado  $U$ , pode ser calculada como

$$M(R, U) = \int_0^R \tilde{\rho}(R, U) dV \quad (4.177)$$

Devemos, no entanto, notar que a densidade de massa-energia  $\tilde{\rho}$ , medida localmente, inclui somente a massa de repouso e as energias interna e de interação dos barions - mas não a energia de interação gravitacional. Assim, a definição (4.177), para  $R=R_S$ , difere de  $m(u)$  - função que aparece na métrica exterior - pela energia de interação gravitacional. Como nossa solução interior tem um limite estático natural definido por  $\xi \rightarrow 0$ , podemos definir a energia total de uma esfera de fluido, com raio correspondente à coordenada  $R$ , de modo análogo ao caso estático [70, 71]

$$m(R, U) = 4\pi \int_0^R \tilde{\rho}(R, U) \beta^2(R, U) dR \quad (4.178)$$

incluindo corretamente a energia de interação gravitacional. Como foi discutido anteriormente, devido à estrutura algébrica do espaço-tempo bem como à forma do tensor de curvatura, não existe emissão de radiação gravitacional simultaneamente com a emissão de neutrinos. Portanto, o problema de localização da energia de ondas gravitacionais não se apresenta e a energia total  $m(R, \mathcal{V})$ , definida por (4.178), é localizada, desde que outros fluxos de energia (neutrino, etc.) são sempre localmente mensuráveis (cf. equações (4.130) e (4.132)). Para  $R=R_S$ , a massa-energia total do fluido é dada por

$$m(R_S, \mathcal{V}) = 4\pi \int_0^{R_S} \left[ \rho(R, \mathcal{V}) - \frac{\Lambda}{k}(R, \mathcal{V}) \right] R_2^2(R) T_2^{-2}(\mathcal{V}) dR \quad (4.179)$$

onde usamos (4.120a). Igualando (4.179) a (4.171) e usando (4.145) podemos escrever

$$\gamma^2 \int_0^{R_S} R_2'(R) T_2^{-2}(\mathcal{V}) dR = 4\pi \int_0^{R_S} \left[ \rho(R, \mathcal{V}) - \frac{\Lambda}{k}(R, \mathcal{V}) \right] R_2^2(R) T_2^{-2}(\mathcal{V}) dR \quad (4.180)$$

onde  $\gamma^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - 64 \xi^2 \eta^2 R_2^2(R_S) / R_1^2(R_S) \right\}$ . Por (4.96), escreven-

do  $\rho(R, \mathcal{V}) = \rho(R) T_2^{-2}(\mathcal{V})$ , tiramos de (4.180)

$$\gamma^2 R_2'(R) T_2^{-2}(\mathcal{V}) = 4\pi \rho(R) R_2^2(R) - 4\pi \frac{\Lambda}{k}(R, \mathcal{V}) R_2^2(R) T_2^{-2}(\mathcal{V})$$

a menos de uma função de  $(R, \mathcal{V})$  cuja integral em  $R$ , entre 0 e  $R_S$  seja identicamente nula. Podemos então ter a expressão de  $\Lambda(R, \mathcal{V})$  para este caso

$$\frac{\Lambda}{k}(R, \mathcal{V}) = \rho(R, \mathcal{V}) - \frac{1}{4\pi R_2^2(R)} \gamma^2 R_2'(R) T_2^{-1}(\mathcal{V}) \quad (4.181)$$



onde  $(R, U)$  é dado por (4.100). Substituindo (4.181) em (4.120a) obtemos a expressão para a densidade real

$$\tilde{\mathcal{G}}(R, U) = \frac{1}{4\pi R_2^2(R)} \gamma^2 R_2'(R) T_2^{-1}(U) \quad (4.182)$$

Usando (4.82) podemos verificar diretamente que  $\tilde{\mathcal{G}}(R) = \frac{\gamma^2 R_2'(R)}{4\pi R_2^2(R)}$  é sempre decrescente com  $R$ , i.e.,  $d\tilde{\mathcal{G}}(R)/dR < 0$ . No presente caso, em que  $\Delta T_0^1$ ,  $\Delta \tilde{\mathcal{G}}$ , etc. são diferentes de zero, o valor da coordenada  $R_S$  correspondendo ao raio da configuração pode ser escolhido com alguma arbitrariedade, sujeito a condições que uma determinada solução  $R_2(R)$  deve satisfazer, por exemplo, por (4.182),  $R_2'(R)/R_2^2(R) > 0$  para  $0 < R < R_S$ , etc. No caso de o tensor momentum-energia não ter descontinuidade através de  $\Sigma$ , o valor da coordenada  $R_S$  pode ser tomado como a primeira raiz da equação  $\tilde{\mathcal{G}}(R) = 0$ .

Nota: a escolha (II) em (4.81) nos dá uma outra solução (por separação de variáveis) para o problema interior. Esta solução não apresenta nenhuma característica excepcional. O tensor momentum-energia total não se conserva e somos levados a introduzir nas equações de Einstein um termo tipo cosmológico que, como já vimos, dá conta dos processos locais de troca de energia do fluido emitindo neutrinos. Equações de estado  $p = \lambda \mathcal{G}$ ,  $\lambda$  constante, são compatíveis e, uma vez dada a equação de estado, todos os parâmetros da solução ficam fixados.

## 5. CONCLUSÕES

No presente trabalho, examinamos dois modelos onde a interação gravitação-neutrinos tem um papel dominante. A gravitação é descrita pela Teoria da Relatividade Geral, onde temos um campo métrico clássico  $g_{\mu\nu}(x)$ , que satisfaz às equações de Einstein cujo lado direito é suposto conter o tensor momentum-energia do campo clássico de neutrino. O campo de neutrino satisfaz à equação de Dirac ( $m=0$ ) sobre a métrica  $g_{\mu\nu}$ . Este conjunto de equações constitui as equações acopladas de Einstein-Dirac (o tensor momentum-energia bem como a equação de Dirac para este campo são derivados a partir de um princípio variacional, pela prescrição usual (cf. seção 2)). As duas soluções completas apresentadas, do conjunto de equações acopladas de Einstein-Dirac, correspondem a duas situações físicas específicas. Uma solução cosmológica para neutrinos - de fato, uma classe de soluções - foi obtida, descrevendo um universo tendo neutrinos como única fonte de curvatura. A motivação na procura desta solução cosmológica é a sugestão da existência, na história do Universo, de uma época dominada por neutrinos, por analogia com uma fase dominada por ftons descrita pelas soluções de Friedmann e observacionalmente verificada [22]. Os principais parâmetros e propriedades que caracterizam um modelo cosmológico foram estudados. O modelo tem expansão, apresenta uma hipersuperfície bidimensional tipo-espaço de homogeneidade e isotropia, mas é anisotrópico devido à existência de uma direção privilegiada. Embora sendo a primeira solução cosmológica tendo neutrinos como fonte, é pouco provável que esta classe de soluções possa constituir uma descrição realista de uma fase da história do Universo.

A segunda solução descreve um modelo completo simples de uma estrela emitindo neutrinos. A estrela é suposta ser constituída de um fluido perfeito - descrito por sua densidade de matéria  $\rho$ , pressão  $p$  e densidade de número de barions  $n$  - esfericamente simétrico e limitado no espaço. Os neutrinos são supostos interagir somente com a gravitação, quer dizer, a matéria da estrela é transparente para neutrinos, e o tensor momentum-energia total para a solução interior é dado pela soma do tensor momentum-energia do fluido e do tensor-energia do neutrino. Este último é construído com campos spinoriais clássicos  $\psi$ , soluções da equação de Dirac para neutrino na métrica do espaço-tempo considerado. No sistema de coordenadas usado, e para a escolha da corrente  $j^\alpha = \bar{\psi} \gamma^\alpha(x) \psi$  radial ao longo dos cones nulos locais, a equação de Dirac é diretamente integrável (para o caso interior como para o exterior) e o spinor-solução depende de um spinor arbitrário função da coordenada nula  $u$ . Esta solução depende necessariamente de  $\theta$  como  $(\sin \theta)^{-1/2}$ , o que implica que não somente a corrente mas todas as componentes não nulas do tensor momentum-energia do campo de neutrino dependem de  $\theta$  por um fator  $(\sin \theta)^{-1}$ . Interpretamos este fator como uma correção de áreas devida ao sistema de coordenadas esféricas usado e propomos uma redefinição, para o caso esfericamente simétrico, do tensor momentum-energia do neutrino, que deve entrar do lado direito das equações de Einstein. O tensor momentum-energia redefinido tem duas propriedades importantes: (i) tem (ainda) divergência covariante nula; (ii) tem a forma do tensor momentum-energia para um fluido nulo, que é a descrição fenomenológica usual para neutrinos em Relatividade Geral. A redefinição permite também que campos de neutrino com helicidade definida ( $\psi = \pm \gamma^5 \psi$ ) se

jam soluções compatíveis. A métrica exterior é a métrica de Schwarzschild radiante (a região contém somente neutrinos e campo gravitacional) e obtemos a variação da massa da estrela como um funcional determinado do spinor-solução de neutrinos e que é interpretada como a luminosidade total da estrela relativa a um observador assintótico em repouso. A solução interior é obtida por separação de variáveis e a forma do tensor momentum-energia do neutrino interior (que é um funcional de um spinor arbitrário dependendo somente de  $u$  com um fator dependendo somente de funções métricas) já determina a forma de algumas funções da solução. Para a solução obtida, as equações de campo implicam uma equação de estado  $p = -\rho/3$ , que corresponde a neutrinos completamente desacoplados da matéria no seguinte sentido: para  $p = -\rho/3$  o tensor momentum-energia do fluido e o tensor momentum-energia do neutrino tem, independentemente, divergência covariante nula. Para evitar pressões escalares negativas na nossa solução, introduzimos nas equações de Einstein um termo tipo cosmológico, descrito pela função  $\Lambda(x)$ . A solução acima corresponde uma solução para densidade de matéria e pressão  $\tilde{\rho} = \rho - \Lambda/k$  e  $\tilde{p} = p + \Lambda/k$ , respectivamente, com  $\tilde{\rho} + \tilde{p}/3 = \Lambda/k$ . As identidades de Bianchi implicam na lei de conservação local  $k T_{\mu}^{\nu}{}_{;\nu} = -\Lambda_{;\mu}$  - que nos fornece duas equações de conservação. Para  $\mu = 0$ , temos o análogo da primeira lei da termodinâmica para o sistema, onde  $\dot{\Lambda}$  é interpretado como proporcional à taxa de resfriamento (calor cedido) do fluido. Para distribuições quasi-estacionárias, estas equações nos fornecem o análogo relativístico da equação de equilíbrio radiativo de Chandrasekher para uma configuração esfericamente simétrica, onde interpretamos  $\Lambda/k$  como uma pressão de radiação de neutri-

nos. Diferentemente da pressão de radiação de ftons na equação Newtoniana de Chandrasekhar, o gradiente da pressão de radiação de neutrinos tem sinal negativo, de modo que tem efeito aditivo à compressão gravitacional (o efeito dos neutrinos é resfriar a configuração, este resfriamento sendo equivalente a uma pressão no sentido inverso à pressão de ftons e adicional à pressão gravitacional). Esta função  $\Lambda(x)$ , que contém suficiente informação sobre a dinâmica do sistema, é determinada a partir de um exame cuidadoso das condições de junção das duas soluções (exterior e interior), na superfície do fluido definida pelo raio  $r_g(u)$ . As condições usadas foram as de Israel-Synge-O'Brien, que decorrem de um estudo definitivo do problema de junção em Relatividade Geral (cf. referência [68]). Temos duas escolhas possíveis que correspondem a situações físicas distintas. Para uma delas a solução descreve a fase de emissão de neutrinos, com consequente contração da configuração, imediatamente antes de a superfície do fluido coincidir com a sua superfície de Schwarzschild, quer dizer, imediatamente antes de o fluido estar totalmente contido no interior do seu raio de Schwarzschild - isto acontece quando a emissão de neutrinos e/ou a contração da estrela cessa ( $\dot{z} \rightarrow 0$ ). A função  $\Lambda$  fica então completamente determinada. A outra possibilidade pode, por exemplo, corresponder a uma configuração quasi-estacionária onde  $\Lambda/\kappa$  tem a interpretação de uma pressão de radiação de neutrinos.

No entanto, embora seja razoável desprezar efeitos gravitacionais quânticos - a incerteza na curvatura produzida, via equações de Einstein, pela incerteza na densidade de energia é desprezível para valores da curvatura  $R_0 \ll 10^{33} \text{ cm}^{-1}$  (\*) -

(\*) para um dado observador com velocidade  $v^\alpha$  em um ponto P,  $R_0^2$  é dado por  $\sup |R_{\alpha\beta\gamma\delta}|$  em qualquer tetrada ortonormal cujo vetor tipo-tempo coincide com  $v^\alpha$  [72]. O comprimento de Planck tem o valor  $10^{-33} \text{ cm}$ .

a teoria quântica tem um papel fundamental na descrição dos campos da matéria. Assim, deveríamos procurar quantizar o campo de neutrino sobre o espaço-tempo curvo clássico, descrito pela nossa solução obtida. A construção de uma teoria quântica de campos num espaço-tempo Riemanniano arbitrário é bastante controversa [73-77], não havendo um procedimento padrão para a quantização no espaço-curvo. Em geral, a expansão do campo em termos de uma dada base de funções - correspondendo a modos de excitação do campo associados a frequências positivas e negativas ou, equivalentemente, à definição de operadores de criação e aniquilação de modos de excitação do campo - não tem significado invariante, desde que a escolha de um novo sistema de base em geral mistura frequências positivas e negativas e, desta forma, torna também ambígua a definição de um estado de vácuo. No caso de o espaço-tempo apresentar um número suficiente de simetrias (vetores de Killing), podemos construir um sistema de base que permite uma definição invariante de estados de "partícula" e "antipartícula", e do estado de vácuo. Por exemplo [77], vamos considerar um campo escalar complexo  $\phi$  solução da equação de Klein-Gordon num espaço-tempo que admite um vetor de Killing tipo-tempo  $K^\alpha$ . Podemos então construir um operador momentum-generalizado definido por

$$\tilde{K} = \int T_{\alpha\beta} K^\alpha d\Sigma^\beta \quad (5.1)$$

onde  $T_{\alpha\beta}$  é o operador energia-momentum obtido de acordo com (2.34) e onde a integração se estende sobre uma hipersuperfície  $\Sigma$  conveniente de valores iniciais. (5.1) independe de  $\Sigma$  con-  
tanto que  $\phi$  se anule suficientemente rápido no infinito, des-

de que  $(T^\alpha_\beta k^\beta)_{||\alpha} = 0$ . Pode-se mostrar que o operador (5.1) gera transformações sobre  $\phi$  no sentido de que ele é um gerador infinitesimal de transformações unitárias sobre o espaço dos operadores<sup>(\*)</sup>,  $i[\phi, K] = \mathcal{L}_{K^\alpha} \phi$ . Vamos escolher soluções  $\phi$  com uma dependência exponencial no parâmetro do grupo correspondente

$$\mathcal{L}_{K^\alpha} \phi = i\omega \phi \quad (5.2)$$

onde  $\omega$  é constante. As soluções de (5.2) podem ser consideradas uma definição invariante de estados de frequência  $\omega$ , desde que  $K^\alpha$  é uma simetria associada a translações temporais (comparar, no caso de espaço-plano, com  $e^{i\omega t}$ ). Estas soluções vão atuar como operadores de criação e aniquilação de modos de frequência  $\omega$ , desde que se  $|k\rangle$  é um autoestado de  $K$  com autovalor  $k$ , então  $\phi^+ |k\rangle$  é um campo de autoestados de  $K$  com autovalor  $k + \omega$ , e  $\phi |k\rangle$  é um campo de autoestados com autovalor  $k - \omega$ . Se  $L^\alpha$  é um outro vetor de Killing, que comuta com  $K^\alpha$ , então podemos considerar soluções de (5.2) que também obedeçam

$$\mathcal{L}_{L^\alpha} \phi = i\alpha \phi \quad (5.3)$$

e escolhendo tais soluções como base, então  $\phi^+$  corresponderá a uma operação de criação de estado de partícula com momentum generalizado  $(\omega, \alpha)$ . E assim sucessivamente, para um subgrupo  $G_r$  Abelianiano de simetria do espaço-tempo. É interessante notar

---

(\*) Notemos que, por definição  $[\phi(x), \phi^+(x')] = i \delta(x, x')$ ,  $[\phi(x), \phi(x')] = 0$ ,  $[\phi^+(x), \phi^+(x')] = 0$ , onde  $\delta(x, x')$  é a função delta sobre  $\Sigma$ .

que no caso do espaço-plano podemos escolher como vetores de Killing os quatro geradores das translações,  $(\vec{\nabla}, \partial_t)$ ; alternativamente, poderíamos usar o gerador das translações temporais e os geradores  $L_z$  (momentum angular relativo ao eixo Z) e  $L^2$  (momentum angular total). Ambas as escolhas podem ser relacionadas por transformações unitárias, não havendo mistura de frequências  $\omega$  (associadas a  $\partial/\partial t$ ) positivas e negativas.

Na nossa aproximação, a criação de partículas pelo campo gravitacional clássico (cf. referências [72] e [74]) não é levada em conta porque consideramos que, se há o efeito de partículas criadas pelo campo gravitacional, a densidade de energia destas partículas é pequena quando comparada localmente com a curvatura que as criou.

No caso do modelo cosmológico tendo neutrinos como fonte, estudado na seção 3, a quantização<sup>(\*)</sup> do campo de neutrinos  $\psi$ , no espaço-curvo do modelo, não apresenta problema devido à propriedade de o espaço-tempo ser conformalmente plano. Isto quer dizer que é sempre possível colocar a métrica do modelo na forma

$$g_{\alpha\beta} = \Omega^2(x) \eta_{\alpha\beta} \quad (5.4)$$

onde  $\eta_{\alpha\beta}$  é a métrica de Minkowski e  $\Omega(x)$  uma função determinada, e podemos, convenientemente, considerar (5.4) como uma transformação conforme sobre a métrica plana de Minkowski. É imediato verificar que uma transformação conforme não altera a quantização canônica de um campo de Dirac (i.e., preserva as relações de comutação canônicas) se, sob (5.4), se transforma como

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \Omega^{-3/2} \psi \quad (5.5)$$

(\*) Em toda esta seção, estamos considerando somente a representação de Heisenberg.



Como vimos na seção 3, o spinor  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \sigma^i \varphi \end{pmatrix}$  não tem nenhuma restrição desde que a equação de Dirac é automaticamente satisfeita e temos uma única equação de campo para A, C e  $\varphi$ . Assim o campo

$$\psi = \Omega^{3/2} \begin{pmatrix} \varphi \\ \sigma^i \varphi \end{pmatrix}$$

no espaço-plano  $\eta_{\alpha\beta}$  (\*), pode ser expandido na base de ondas planas na direção do eixo  $\bar{z}$  e seus coeficientes convenientemente interpretados. Podemos então calcular, sem ambiguidade na métrica do modelo, o valor

$$\langle L \rangle = \langle : i(\dot{\psi}^\dagger \varphi - \varphi^\dagger \dot{\psi}) : \rangle$$

para um dado estado  $|N\rangle$  de neutrinos e  $\langle L \rangle$ , na equação de campo (3.14) determina as funções métricas A(t) e C(t). A quantidade  $\langle L \rangle$  pode ser interpretada como a densidade média de energia dos neutrinos num dado estado e as funções métricas A e C, soluções de  $\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} = \langle L \rangle$  são as soluções das equações de Einstein correspondendo a um espaço-tempo com neutrinos como fonte de curvatura.

No caso da solução de uma estrela emitindo neutrinos, a quantização não nos parece imediata. As soluções (interior e exterior) são não estacionárias e os únicos vetores de Killing que elas admitem são os geradores do grupo das rotações espaciais. Estas simetrias não são suficientes para caracterizar uma base de decomposição do campo em modos invariantes de excitação (por exemplo, caracterizar frequências de modo invariante) e o processo descrito acima não se aplica. Como a solução exterior é assintoticamente plana (para  $r \rightarrow \infty$  a métrica assume a forma

(\*) Notemos que nas coordenadas  $(\bar{t}, \bar{z}, x, y)$  definidas em (3.48),  $\bar{t}$  é uma função determinada de  $(\bar{t}, \bar{z})$  e  $\varphi$  uma função arbitrária de  $(\bar{t}, \bar{z})$ . Elas constituem um sistema de coordenadas Cartesianas para o espaço de Minkowski, nas quais a métrica  $\eta_{\alpha\beta}$  assume a forma  $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ .

da métrica de Minkowski e até  $O(r^{-1})$  todas as componentes do tensor de curvatura podem ser desprezadas) considerações assintóticas poderiam permitir uma escolha das funções-base assintóticas como funções de base usuais no espaço-plano <sup>25,79</sup>. No caso da condição de junção (4.168), a forma (4.91) de  $\mathcal{L}(v) = \frac{\chi}{K} T_2^{-2}$  pode ser um guia adicional na escolha das funções assintóticas de base usadas para expressar  $\ell(u)$ . A partir da forma clássica de  $\ell(u)$  e seguindo um eventual esquema de quantização consistente (por exemplo, processos usuais de decomposição numa dada base, identificação dos operadores de criação e aniquilação, ordenação normal e média num estado  $|N\rangle$  de neutrinos), podemos, utilizando (4.168) e (4.91), caracterizar o parâmetro  $\chi$  como uma função dos momenta generalizados correspondentes à base escolhida. Tal programa não será desenvolvido nesta tese, mas deve constituir o objeto de um futuro trabalho.

APÊNDICE 1FORMAS DIFERENCIAIS EM UM ESPAÇO-TEMPO RIEMANNIANO

Este apêndice contém os principais resultados da teoria de formas diferenciais sobre uma variedade Riemanniana 4-dim, que se seguem de uma maneira intuitiva a partir dos conceitos usuais de álgebra linear e geometria Riemanniana, mas que apresentamos, em geral, sem demonstração. Para um tratamento completo, ver Cohn e Cartan, referências [11] e [12].

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade 4-dimensional,  $P$  um ponto de  $\mathcal{M}$  e  $\{x\}$  um sistema de coordenadas <sup>(\*)</sup> admissível em  $P$ . Por definição, um objeto da forma

$$L = \lambda^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{I.1}$$

onde  $(\lambda^\alpha, \alpha = 0, 1, 2, 3)$  são constantes reais arbitrárias, é um vetor tangente em  $P$ . Esta definição envolve um particular sistema de coordenadas em  $P$ . No entanto, podemos mostrar que um vetor tangente  $L$ , em qualquer sistema de coordenadas  $\{x\}$ , pode ser expresso por

$$L = L x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

que é da forma (I.1) onde  $\lambda^\alpha = L x^\alpha$ . Os vetores tangentes em  $P$  (I.1)

---

(\*) Um sistema de coordenadas em  $P$  é definido por um homeomorfismo de algum aberto de  $\mathcal{M}$  contendo  $P$  em  $\mathbb{R}^4$ .

formam um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , que denotamos por  $\mathcal{L}_p$ . Se  $\{x\}$  é um sistema de coordenadas admissível em  $P$ , então os vetores tangentes  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\}$  formam uma base do espaço  $\mathcal{L}_p$ .

Vamos agora considerar o espaço dual  $\mathcal{L}_p^*$  de  $\mathcal{L}_p$ , que é o espaço das formas lineares sobre  $\mathcal{L}_p$ .  $\mathcal{L}_p^*$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  e define o produto bilinear

$$\langle u, z \rangle \in \mathbb{R}$$

para todo  $u \in \mathcal{L}_p, z \in \mathcal{L}_p^*$ . Temos o resultado:  $\mathcal{L}_p^*$  tem a mesma dimensão de  $\mathcal{L}_p$  e se  $\{v_\alpha, \alpha=0,1,2,3\}$  é uma base para  $\mathcal{L}_p$ , então  $\mathcal{L}_p^*$  tem uma base  $z^\alpha$  satisfazendo

$$\langle v_\alpha, z^\beta \rangle = \delta_\alpha^\beta \quad (\text{I.2})$$

Esta base  $\{z^\alpha\}$  de  $\mathcal{L}_p^*$ , e que é unicamente determinada por (I.2), é chamada base dual da base  $\{v_\alpha\}$ .

Toda função  $f$ , analítica em  $p$ , define uma forma linear sobre  $\mathcal{L}_p$  por  $L \rightarrow Lf = \lambda^\alpha \left( \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \right)_p$ . Este mapeamento de  $\mathcal{L}_p$  em  $\mathbb{R}$  é denotado por  $df$ . Assim  $df$  é o elemento de  $\mathcal{L}_p^*$  definido por

$$\langle L, df \rangle = Lf \quad (\text{I.3})$$

Em particular, se  $\{x\}$  é um sistema de coordenadas em  $p$ , os elementos  $\{dx^\alpha\}$  formam uma base de  $\mathcal{L}_p^*$ , porque eles pertencem a  $\mathcal{L}_p^*$  e satisfazem

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^\beta}, dx^\alpha \right\rangle = \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \right)_p = \delta_\beta^\alpha \quad (\text{I.4})$$

constituindo, portanto, uma base dual à base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\}$ . Os elementos de  $\mathcal{L}_p^*$  são chamados diferenciais em  $p$  e tem a forma  $\mu_\alpha dx^\alpha$ .

Uma forma diferencial  $\omega$  de primeira ordem (1-for

ma) sobre  $\mathcal{M}$  é, por definição, uma coleção de diferenciais  $\omega_p$ , uma em cada ponto de  $p$ . Um exemplo de uma 1-forma diferencial é a coleção de diferenciais  $df$ , onde  $f$  é uma função analítica definida sobre toda a variedade  $\mathcal{M}$ . Esta forma será denotada também por  $df$ , sem ambiguidade significando a forma diferencial ou seu valor em um ponto particular. Formas diferenciais de ordem mais alta podem ser definidas da seguinte forma: em cada ponto  $p$  de  $\mathcal{M}$ , consideramos o produto Cartesiano anti-simetrizado de  $n$  espaços vetoriais  $\mathcal{L}_p^*$ , que denotaremos por  $E(n, \mathcal{L}_p^*)$ . Uma forma diferencial de ordem  $n$  é uma coleção de elementos de  $E(n, \mathcal{L}_p^*)$ , um para cada ponto  $p$  de  $\mathcal{M}$ .

### PRODUTO EXTERIOR

Se  $\alpha$  e  $\beta$  são duas 1-formas diferenciais, definimos produto exterior (ou produto de Grassmann) por suas propriedades

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha \tag{I.5}$$

$$\alpha \wedge \alpha = 0$$

Para um sistema de coordenadas  $\{x\}$  admissível em  $p$ , podemos expressar

$$\alpha_p = \alpha_\mu dx^\mu \tag{I.6}$$

$$\beta_p = \beta_\nu dx^\nu$$

e

$$(\alpha \wedge \beta)_p = \alpha_\mu \beta_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Pelas propriedades (I.5) vemos que somente a parte anti-simétrica  $\alpha_{[\mu} \beta_{\nu]}$  contribui na definição de  $\alpha \wedge \beta$ . Pela definição acima

de  $E(n, \mathcal{L}_p^*)$ , fica claro que  $\alpha \wedge \beta$  é uma 2-forma diferencial. Em geral, em termos de um sistema de coordenadas admissível em  $\mathcal{M}$ , uma n-forma linear pode ser escrita como

$$\omega = \int_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (x) dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n} \quad (\text{I.7})$$

onde  $dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}$  é o produto de Grassmann de ordem n, completamente antissimétrico em  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e portanto  $\{dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}\}$  constitui uma base para as formas diferenciais lineares de ordem n. As seguintes propriedades podem ser mostradas, relativas a (I.7): se  $\eta$  é uma p-forma e  $\zeta$  uma q-forma, então o produto  $\eta \wedge \zeta$  é uma (p+q)-forma e temos a relação

$$\eta \wedge \zeta = (-1)^{pq} \zeta \wedge \eta \quad (\text{I.8})$$

Notemos que se p e q forem ímpares, o produto anti-comuta; caso contrário, comuta. O objeto completamente antissimétrico  $\int_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (x)$  se transforma como um tensor covariante de ordem n, pela mudança de sistemas de coordenadas admissíveis em p. A forma  $\omega$  é dita analítica em p se  $\int_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (x)$  for analítica em p.

### DERIVADA EXTERIOR

A derivada exterior d de uma p-forma é uma p+1-forma diferencial, definida do seguinte modo: se

$$\omega = \int_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (x) dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}$$

então

$$d\omega = \frac{\partial \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n}}{\partial x^\beta} dx^\beta \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n} \quad (\text{I.9})$$

e as seguintes propriedades podem ser verificadas:

(i)  $d$  é uma operação linear

$$d(a\omega + b\eta) = a d\omega + b d\eta \quad , \quad \omega, \eta \in E(\mathcal{L}_p^*) \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(ii) para todo  $\omega \in E(n, \mathcal{L}_p^*)$ ,  $d^2\omega = 0$

(iii) Se  $\omega$  e  $\eta$  são formas,  $\omega$  de ordem  $p$ , então

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$$

Em particular, notemos por (I.6) e (I.7) que a diferencial de uma função analítica em  $\mathcal{M}$  (0-forma) é uma 1-forma diferencial,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

Vamos considerar agora uma variedade Riemanniana 4-dim, localmente Lorentziana, determinada pela métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  num dado sistema de coordenadas. Vamos introduzir o campo de tetradas linearmente independente  $\{e_{(A)}^\mu(x) \mid A=0,1,2,3\}$  (cf. por exemplo, (2.5)) tal que

$$g_{\mu\nu}(x) e_{(A)}^\mu(x) e_{(B)}^\nu(x) = \eta_{AB} \quad (\text{I.10})$$

ou

$$g^{\mu\nu}(x) = e_{(A)}^\mu e_{(B)}^\nu \eta^{AB} \quad (\text{I.11})$$

onde  $\eta_{AB}$  é a métrica constante de Minkowski e a inversa  $\eta^{AB}$  é definida tal que  $\eta^{AB} \eta_{BC} = \delta_C^A$ . Índices de tetrada são levantados e abaixados com  $\eta^{AB}$ ,  $\eta_{AB}$ , respectivamente, e índices de coordenadas, com  $g^{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu}$ . De (I.10) e (I.11) seguem as propriedades óbvias

$$e_{(A)}^\mu e_\mu^{(B)} = \delta_A^B \quad (\text{I.12})$$

$$e_{(A)}^\mu e_\nu^{(A)} = \delta_\nu^\mu$$

Associada à base dual  $\{dx^\alpha\}$ , introduzimos as 1-formas

$$\theta^A = e^{(A)\alpha} dx^\alpha \quad (\text{I.13})$$

com inversa

$$dx^\alpha = e^\alpha_{(A)} \theta^A \quad (\text{I.14})$$

As 1-formas de conexão são obtidas a partir de derivar exteriormente as 1-formas (I.13). Por (I.9) temos

$$d\theta^A = e^{(A)\alpha|_\gamma} dx^\gamma \wedge dx^\alpha \quad (\text{I.15})$$

Notemos que em (I.15) (bem como em (I.9)) é irrelevante se usamos a derivada simples ou a derivada covariante, desde que o símbolo de Christoffel  $\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\gamma \end{smallmatrix} \right\}$  é simétrico em  $(\alpha, \gamma)$  e portanto não contribui nas expressões (I.9) ou (I.15). Reescrevemos então (I.15) como

$$d\theta^A = e^{(A)\alpha|_\gamma} dx^\gamma \wedge dx^\alpha$$

ou, por (I.14)

$$d\theta^A = e^{(A)\alpha|_\gamma} e^\alpha_{(c)} e^\gamma_{(b)} \theta^b \wedge \theta^c \quad (\text{I.16})$$



Em (I.16) aparecem naturalmente os coeficientes de rotação de Ricci, definidos em (2.40),

$$\gamma_{ABC} = - e_{(A)\alpha} \parallel_{\beta} e_{(B)}^{\alpha} e_{(C)}^{\beta}$$

e podemos então reescrever (I.16) como

$$d\theta^A = - \gamma^A{}_{cB} \theta^B \wedge \theta^c \quad (\text{I.17})$$

Notando que

$$d e_{\alpha}^{(A)} = e_{\alpha}^{(A)} \parallel_{\gamma} dx^{\gamma} = - \gamma^A{}_{\beta c} \theta^c e_{\alpha}^{(\beta)} \quad (\text{I.18})$$

definimos as 1-formas de rotação por

$$\omega^A{}_{\beta} = \gamma^A{}_{\beta c} \theta^c \quad (\text{I.19})$$

Então (I.18) é escrito

$$d e_{\alpha}^{(A)} = - \omega^A{}_{\beta} e_{\alpha}^{(\beta)} \quad (\text{I.20})$$

e (I.17) assume a forma

$$d\theta^A = - \omega^A{}_{\beta} \wedge \theta^{\beta} \quad (\text{I.21})$$

que é chamada a primeira equação de estrutura de Cartan. Derivando exteriormente (I.10), usando (I.20) e levando em conta que  $g_{\mu\nu}(x)$  é constante com relação à derivação exterior, obtemos

$$d(\eta_{AB}) = \omega_{AB} + \omega_{BA} \quad (\text{I.22})$$

Para  $\eta_{AB}$  constante, como é o nosso caso,  $d(\eta_{AB}) = 0$  e

$$\omega_{AB} = -\omega_{BA} \quad (I.23)$$

(I.21) e (I.23) determinam  $\omega^A_B$  de modo único. Conhecendo-se  $\omega^A_B$ , podemos determinar os coeficientes de rotação de Ricci  $\gamma^A_{BC}$  diretamente por (I.19).

Os coeficientes de Fock-Ivanenko, expressos por (2.25)

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{8} (\gamma^\mu \gamma_{\mu||\alpha} - \gamma_{\mu||\alpha} \gamma^\mu) + A_\alpha \mathbf{1}$$

podem ser reescritos ( $A_\alpha = 0$  para neutrinos)

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{4} \gamma^\mu \gamma_{\mu||\alpha} \quad (I.24)$$

(notemos que  $\gamma^\mu(x) \gamma_\mu(x) = e_{(A)}^\mu e_{(B)\mu}^A \gamma^A \gamma_B = 4 \mathbf{1}$ ), ou

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{4} e_{\mu(A)||\alpha} e_{(B)}^\mu \gamma^B \gamma^A \quad (I.25)$$

Na base de tetradas, (I.25) se escreve

$$\Gamma_A = e_{(A)}^\alpha \Gamma_\alpha = -\frac{1}{4} e_{\mu(D)||\alpha} e_{(B)}^\mu e_{(A)}^\alpha \gamma^B \gamma^D = \frac{1}{4} \gamma_{DBA} \gamma^B \gamma^D$$

ou, usando a propriedade  $\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC}$ ,

$$\Gamma_A = -\frac{1}{4} \gamma_{BCA} \gamma^B \gamma^C \quad (I.25)$$

que é a expressão usada para cálculos e que pode ser imediatamente obtida uma vez que se conheçam  $\gamma^A_{BC}$  ou  $\omega^A_B$ .

Por (I.19) temos

$$\omega^A_B = \gamma^A_{BC} e^{(C)}_{\mu} dx^{\mu}$$

Tomando a derivada exterior desta expressão

$$d\omega^A_B = (\gamma^A_{BC} e^{(C)}_{\mu})_{||\rho} dx^{\rho} \wedge dx^{\mu} \quad (I.26)$$

Por (I.20) tiramos

$$e^{(A)}_{\mu || \rho} = -\gamma^A_{BC} e^{(B)}_{\mu} e^{(C)}_{\rho}$$

e daí,

$$e^{(A)}_{\mu || \rho || \sigma} = -(\gamma^A_{BC} e^{(C)}_{\rho})_{||\sigma} e^{(B)}_{\mu} - \gamma^A_{BC} e^{(C)}_{\rho} e^{(B)}_{\mu || \sigma}$$

ou

$$e^{(A)}_{\mu || \rho || \sigma} = -(\gamma^A_{BC} e^{(C)}_{\rho})_{||\sigma} e^{(B)}_{\mu} + \gamma^A_{BC} e^{(C)}_{\rho} \gamma^B_{MN} e^{(M)}_{\mu} e^{(N)}_{\sigma} \quad (I.27)$$

Contraindo (I.27) com  $e^{(K)}_{(\nu)} dx^{\nu} \wedge dx^{\sigma}$ , usando (I.14), (I.26) e a definição

$$e^{(A)}_{\mu || [\rho || \sigma]} = -\frac{1}{2} R^{\alpha}_{\mu \rho \sigma} e^{(A)}_{\alpha}$$

obtemos finalmente

$$-\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \quad (I.28)$$

onde  $R^A_{BCD} = e^{(A)}_{\alpha} e^{(\beta)}_{(B)} e^{(\gamma)}_{(C)} e^{(\delta)}_{(D)} R^{\alpha}_{\beta \gamma \delta}$ . Definindo as 2-formas de curvatura por

$$\Omega^A_B = -\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \quad (I.29)$$

obtemos a segunda equação de estrutura de Cartan

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \quad (I.30)$$

Com (I.29) e (I.30) as componentes-tetradas do tensor de curvatura  $R^A_{BCD}$  podem ser imediatamente obtidas por inspeção, após um cálculo imediato de  $d\omega^A_B$  a partir de  $\omega^A_B$ .

As identidades de Bianchi, bem como as condições de integrabilidade de (I.17) (equivalente a  $R^A_{[BCD]} = 0$ ) podem também ser expressas em termos das formas  $\omega^A_B$  e/ou  $\Omega^A_B$  e suas derivadas exteriores, bem como dos coeficientes  $\gamma^A_{BC}$ . Também, desde que as formas diferenciais são uma espécie de dual das transformações infinitesimais, nós podemos considerar a variedade como sendo um grupo de Lie, cujos geradores são os vetores de Killing da métrica, e o formalismo de formas diferenciais se adapta perfeitamente a uma tal descrição (cf. ref. [11]). Aqui, porém, nos limitamos à utilização do formalismo de formas para os cálculos da tese como, por exemplo, componentes do tensor de curvatura, componentes do tensor de Ricci, coeficientes de Fock-Ivanenko.

#### CÁLCULOS EXPLÍCITOS UTILIZANDO

$$d\theta^A = -\omega^A_B \wedge \theta^B$$

$$\omega^A_B = \gamma^A_{BC} \theta^C$$

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B$$

$$\Omega^A_B = -\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D$$

As componentes omitidas são nulas.

#### I) Modelo Cosmológico (seção 3)

$$ds^2 = dt^2 - 2A(t)dzdt - C^2(t)(dx^2 + dy^2)$$

Escolhemos

$$\theta^0 = dt - A(t) dz$$

$$dt = \theta^0 - \theta^1$$

$$\theta^1 = -A(t) dz$$

$$dz = -\frac{1}{A} \theta^1$$

$$\theta^2 = C(t) dx$$

$$dx = \frac{1}{C} \theta^2$$

$$\theta^3 = C(t) dy$$

$$dy = \frac{1}{C} \theta^3$$

tal que

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2$$

$$d\theta^0 = \dot{A}/A \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$d\theta^1 = \dot{A}/A \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$d\theta^2 = \dot{C}/C \theta^0 \wedge \theta^2 - \dot{C}/C \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$d\theta^3 = \dot{C}/C \theta^0 \wedge \theta^3 - \dot{C}/C \theta^1 \wedge \theta^3$$

Por inspeção, obtemos (  $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$  )

$$\omega^0_1 = \dot{A}/A (\theta^1 - \theta^0)$$

$$\omega^1_2 = \dot{C}/C \theta^2$$

$$\omega^0_2 = \dot{C}/C \theta^2$$

$$\omega^1_3 = \dot{C}/C \theta^3$$

$$\omega^0_3 = \dot{C}/C \theta^3$$

e

$$\gamma^0_{10} = -\dot{A}/A$$

$$\gamma^0_{22} = \dot{C}/C$$

$$\gamma^1_{22} = \dot{C}/C$$

$$\gamma^0_{11} = \dot{A}/A$$

$$\gamma^0_{33} = \dot{C}/C$$

$$\gamma^1_{33} = \dot{C}/C$$

2-formas de curvatura (  $\Omega_{AB} = -\Omega_{BA}$  )

$$\Omega^0_2 = (\ddot{C}/C - \dot{A}\dot{C}/AC) \theta^0 \wedge \theta^2 - (\ddot{C}/C - \dot{A}\dot{C}/AC) \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega^0_3 = (\ddot{C}/C - \dot{A}\dot{C}/AC) \theta^0 \wedge \theta^3 - (\ddot{C}/C - \dot{A}\dot{C}/AC) \theta^1 \wedge \theta^3$$

$$\Omega^1_2 = (\ddot{C}/C - \dot{A}\dot{C}/AC) \theta^0 \wedge \theta^2 - (\ddot{C}/C - \dot{A}\dot{C}/AC) \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega^1_3 = (\ddot{C}/C - \dot{A}\dot{C}/AC) \theta^0 \wedge \theta^3 - (\ddot{C}/C - \dot{A}\dot{C}/AC) \theta^1 \wedge \theta^3$$

As componentes  $R^A_{BCD}$  do tensor de curvatura podem ser obtidas diretamente

$$R^0_{202} = -2(\ddot{C}/C - \dot{A}\dot{C}/AC)$$

$$R^0_{212} = 2(\ddot{C}/C - \dot{A}\dot{C}/AC)$$

$$R^0_{303} = -R^0_{313} = -2(\ddot{C}/C - \dot{A}\dot{C}/AC)$$

$$R^1_{202} = -R^1_{212} = -2\left(\ddot{c}/c - \dot{A}\dot{c}/AC\right)$$

$$R^1_{303} = -R^1_{313} = -2\left(\ddot{c}/c - \dot{A}\dot{c}/AC\right)$$

O tensor de Ricci  $R_{AB} = R^D_{ADB}$  tem componentes

$$R_{00} = -R_{01} = R_{11} = -4\left(\ddot{c}/c - \dot{A}\dot{c}/AC\right)$$

II) Métrica Interior e Exterior da Estrela (seção 4)

$$ds^2 = \alpha^2(u, r) du^2 + 2 du dr - \beta^2(u, r) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Nossa escolha

$$\theta^0 = \alpha du + \alpha^{-1} dr$$

$$du = \alpha^{-1} (\theta^0 - \theta^1)$$

$$\theta^1 = \alpha^{-1} dr$$

$$dr = \alpha \theta^1$$

$$\theta^2 = \beta d\theta$$

$$d\theta = \beta^{-1} \theta^2$$

$$\theta^3 = \beta \sin\theta d\varphi$$

$$d\varphi = (\beta \sin\theta)^{-1} \theta^3$$

implica

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2.$$

$$d\theta^0 = -(\alpha' + \dot{\alpha}/\alpha^2) \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$d\theta^3 = \dot{\beta}/\beta\alpha \theta^0 \wedge \theta^3 - (\dot{\beta}/\beta\alpha - \beta'\alpha/\beta) \theta^1 \wedge \theta^3 + \beta^{-1} \cot\theta \theta^2 \wedge \theta^3$$

$$d\theta^1 = -\dot{\alpha}/\alpha^2 \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$d\theta^2 = \dot{\beta}/\beta\alpha \theta^0 \wedge \theta^2 - (\dot{\beta}/\beta\alpha - \beta'\alpha/\beta) \theta^1 \wedge \theta^2$$

e, por inspeção, obtemos ( $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$ )

$$\omega^0_1 = (\alpha' + \dot{\alpha}/\alpha^2) \theta^0 - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2} \theta^1$$

$$\omega^2_3 = -\beta^{-1} \cot\theta \theta^3$$

$$\omega^0_2 = \dot{\beta}/\beta\alpha \theta^2$$

$$\omega^1_2 = (\dot{\beta}/\beta\alpha - \beta'\alpha/\beta) \theta^2$$

$$\omega^0_3 = \dot{\beta}/\beta\alpha \theta^3$$

$$\omega^1_3 = (\dot{\beta}/\beta\alpha - \beta'\alpha/\beta) \theta^3$$

As componentes do tensor de curvatura podem ser obtidas diretamente, a partir de derivar exteriormente  $\omega_{AB}$  e usar a expressão para  $\Omega_{AB}$ . Resulta:

$$R^0_{101} = 2(\alpha \alpha'' + \alpha'^2)$$

$$R^0_{202} = 2(\beta' \ddot{\alpha} / \beta \alpha + \alpha \alpha' \beta' / \beta - \dot{\beta} \alpha' / \beta \alpha - \ddot{\beta} / \beta \alpha^2)$$

$$R^0_{212} = 2(\ddot{\beta} / \beta \alpha^2 - \dot{\beta}' / \beta + \dot{\beta} \alpha' / \beta \alpha - \beta' \ddot{\alpha} / \beta \alpha)$$

$$R^0_{303} = 2(-\ddot{\beta} / \beta \alpha^2 - \alpha' \dot{\beta} / \alpha \beta + \alpha \alpha' \beta' / \beta - \dot{\alpha} \beta' / \alpha \beta)$$

$$R^0_{313} = 2(-\dot{\beta}' / \beta + \dot{\beta} \alpha' / \beta \alpha + \ddot{\beta} / \beta \alpha^2 - \dot{\alpha} \beta' / \alpha \beta)$$

$$R^1_{212} = 2(\ddot{\beta} / \beta \alpha^2 - 2 \dot{\beta}' / \beta - \beta' \ddot{\alpha} / \beta \alpha + \dot{\beta} \alpha' / \beta \alpha + \beta'' \alpha^2 / \beta + \alpha \alpha' \beta' / \beta)$$

$$R^1_{313} = 2(\ddot{\beta} / \beta \alpha^2 - 2 \dot{\beta}' / \beta + \dot{\beta} \alpha' / \beta \alpha - \beta' \ddot{\alpha} / \beta \alpha + \beta'' \alpha^2 / \beta + \alpha \alpha' \beta' / \beta)$$

$$R^2_{323} = 2\left(-\frac{1}{\beta^2} - 2 \dot{\beta} \beta' / \beta^2 + \beta'^2 \alpha^2 / \beta^2\right)$$

As componentes do tensor de Ricci  $R_{AB}$  ( $=R^D_{ADB} = \eta^{CD} R_{CADB}$ ) são:

$$R_{00} = -2\alpha \alpha'' - 2\alpha'^2 + 4\ddot{\beta} / \beta \alpha^2 + 4\dot{\beta} \alpha' / \beta \alpha - 4\alpha \alpha' \beta' / \beta - 4\dot{\alpha} \beta' / \alpha \beta$$

$$R_{01} = -4\ddot{\beta} / \beta \alpha^2 + 4\dot{\beta}' / \beta - 4\dot{\beta} \alpha' / \beta \alpha + 4\beta' \ddot{\alpha} / \beta \alpha$$

$$R_{11} = 2\alpha \alpha'' + 2\alpha'^2 + 4\ddot{\beta} / \beta \alpha^2 - 8\dot{\beta}' / \beta - 4\beta' \ddot{\alpha} / \beta \alpha + 4\dot{\beta} \alpha' / \beta \alpha + 4\beta'' \alpha^2 / \beta + 4\alpha \alpha' \beta' / \beta$$

$$R_{22} = R_{33} = -4\dot{\beta}' / \beta + 2\beta'' \alpha^2 / \beta + 4\alpha \alpha' \beta' / \beta - 2 / \beta^2 - 4\dot{\beta} \beta' / \beta^2 + 2\beta'^2 \alpha^2 / \beta^2$$

APÊNDICE 2NEUTRINOS NO FORMALISMO DE SPINORES A DUAS COMPONENTES EM UM  
ESPAÇO-TEMPO RIEMANNIANO

Este apêndice constitui uma revisão suscinta do material contido nas referências [16] e [80] a [85], para o formalismo de spinores a duas componentes. Neutrinos no formalismo de spinores a duas componentes são tratados, por exemplo, nas referências [82] a [84].

Definimos, em cada ponto do espaço-tempo, um espaço-vetorial linear de duas dimensões. Os elementos deste espaço são funções complexas ordenadas

$$\begin{pmatrix} u^1(x) \\ u^2(x) \end{pmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Chamaremos este espaço vetorial linear de espaço spinorial e seus elementos de spinores a duas componentes. Índices spinoriais são denotados por letras latinas maiúsculas e variam de 1 a 2. Nesta convenção, (II.1) é expresso por  $u^A(x)$ . Os spinores são caracterizados por suas propriedades de transformação com relação a mudança de base do espaço spinorial, num mesmo ponto do espaço-tempo. As componentes da matriz de transformação de spin ( $S^A_B(x)$ ),

$$u'^A = S^A_B u^B \quad (\text{II.2})$$

são funções complexas arbitrárias, mas restritas pela condição

$$\det(S^A_B) = 1 \quad (\text{II.3})$$



Estas transformações constituem o grupo que será referido como  $SL_2(x)^{(*)}$ . Spinores pontuados são definidos como o conjugado complexo de (II.1)

$$u^{\dot{A}}(x) = (u^A(x))^* \quad (\text{II.4})$$

com as matrizes de transformação correspondentes

$$S^{\dot{A}}_{\dot{B}}(x) = (S^A_B(x))^* \quad (\text{II.5})$$

de modo que

$$u^{\dot{A}} = S^{\dot{A}}_{\dot{B}} u^{\dot{B}} \quad (\text{II.6})$$

Índices spinoriais são abaixados e levantados por meio das matrizes spinoriais  $\epsilon_{AB}$ ,  $\epsilon^{AB}$  e suas conjugadas complexas

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^{AB} \quad (\text{II.7})$$

$$\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \quad (\text{II.8})$$

com a propriedade

$$\epsilon^{AB} \epsilon_{BC} = -\delta^A_C \quad (\text{II.9})$$

Definindo

---

(\*) Os spinores  $u^A(x)$  e as matrizes de transformação  $S^A_B(x)$  estão associados à representação  $(0, 1/2)$  das transformações de Lorentz locais (2.8) restritas. Analogamente, os spinores pontuados  $u^{\dot{A}}(x)$  e as matrizes de transformação  $S^{\dot{A}}_{\dot{B}}(x)$  correspondem à representação  $(1/2, 0)$  local.

$$u^A = \varepsilon^{AB} u_B \quad (\text{II.10})$$

e

$$u_A = u^B \varepsilon_{BA} \quad (\text{II.11})$$

segue que

$$u^A v_A = - u_A v^A \quad (\text{II.12})$$

Em particular

$$u^A u_A = - u_A u^A = 0 \quad (\text{II.13})$$

Spinors de ordem mais alta se transformam como produto direto de vetores de spin, por exemplo,  $\omega^{AB}$  se transforma como  $u^A v^B \omega$ , sob o grupo  $SL_2(x)$ . Usando (II.2), segue que

$$\varepsilon^{IAL} = S^A_K S^L_B \varepsilon^{KB}$$

Por (II.7) e a condição unimodular (II.3) obtemos que

$$\varepsilon^{IAB} = \varepsilon^{AB}$$

de modo que estas matrizes tem a mesma expressão em todos os sistemas de base. O mesmo resultado vale para  $\varepsilon_{AB}$  e para as conjugadas complexas.

Um spinor hermitiano de segunda ordem é definido por

$$\omega_{\dot{A}\dot{C}} = \omega_{C\dot{A}}$$

A hermiticidade é preservada sob transformações do  $SL_2(x)$  e qualquer spinor hermitiano de segunda ordem pode ser descrito por um conjunto de quatro funções reais.

A correspondência usual entre tensores e spinores po

de ser feita pelo conjunto de quatro matrizes de spin, hermitianas e linearmente independentes,  $\sigma_{\mu}^{KH}(x)$ , definidas em cada ponto do espaço-tempo<sup>(\*)</sup>. Sob o grupo  $SL_2(x)$  elas se transformam como

$$\sigma_{\mu}^{KH}(x) = S^{\kappa}_L(x) S^{\dot{M}}_{\dot{P}}(x) \sigma_{\mu}^{L\dot{P}}(x) \quad (II.14)$$

Com relação às transformações de coordenadas  $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x)$ , elas se comportam como um quadri vetor covariante

$$\sigma'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} \sigma_{\kappa}(x) \quad (II.15)$$

Estas matrizes de spin  $\sigma_{\mu}^{A\dot{B}}(x)$  permitem associar a qualquer tensor  $T^{\mu\nu} \dots$  um spinor  $T^{A\dot{B}, K\dot{M}, \dots}$  tal que para cada índice spinorial corresponde um par de índices spinoriais, um pontuado e outro não pontuado,

$$T^{A\dot{B}, K\dot{M}, \dots} = \sigma_{\mu}^{A\dot{B}} \sigma_{\nu}^{K\dot{M}} \dots T^{\mu\nu} \dots \quad (II.16)$$

$$T^{\mu\nu} \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma_{KH}^{\mu} \sigma_{RS}^{\nu} \dots T^{KHRS} \dots$$

onde  $n$  é a ordem do tensor. Da condição de hermiticidade das segue que

$$T^{K\dot{M}R\dot{S}} \dots = T^{\dot{M}K\dot{S}R} \dots$$

de modo que o mesmo número de componentes em ambos os lados de (II.16) é preservado. A realidade de tensores leva à hermiticidade de seus spinores correspondentes.

---

Estas quantidades foram introduzidas por Infeld e van der Waerden em 1933, referência [1].

Numa base local (2.3), as matrizes  $\tilde{\sigma}_{\mu}^{AB}(x)$  assumem a forma

$$\tilde{\sigma}^{0KH} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}^{1KH} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}^{2KH} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}^{3KH} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.17})$$

que são as matrizes de Pauli hermitianas e a identidade 2x2. As correspondentes matrizes  $\tilde{\sigma}_{\mu}(x)$  são então dadas por

$$\tilde{\sigma}_{\mu}^{KH}(x) = e_{\mu(\alpha)}(x) \tilde{\sigma}^{\alpha KH} \quad (\text{II.18})$$

onde  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ , etc. denotam os índices de tetradas (ou índices internos). As matrizes (II.17) constituem uma representação da álgebra de Clifford associada à métrica local  $\eta^{\alpha\beta}$ ,

$$\tilde{\sigma}^{\alpha KH} \tilde{\sigma}^{\beta HL} + \tilde{\sigma}^{\beta KH} \tilde{\sigma}^{\alpha HL} = 2 \eta^{\alpha\beta} \delta_L^K \quad (\text{II.19})$$

onde

$$\tilde{\sigma}_{KH}^A = e_{RK} \tilde{\sigma}^{BRS} e_{SH}$$

ou, em forma matricial  $\tilde{\sigma}^{\alpha\beta} = \varepsilon^T \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} \varepsilon^*$ . Analogamente, podemos ter

$$\tilde{\sigma}_K^{\alpha H} \tilde{\sigma}_{HL}^{\beta} + \tilde{\sigma}_K^{\beta H} \tilde{\sigma}_{HL}^{\alpha} = 2 \eta^{\alpha\beta} \varepsilon_{KL} \quad (\text{II.20})$$

Notemos que os índices vetoriais de (II.17) são abaixados com a métrica local  $\eta_{\alpha\beta}$ .

Formando o produto simetrizado de (II.18) e usando (II.19), obtemos

$$\tilde{\sigma}_{\mu}^{KH}(x) \tilde{\sigma}_{\nu HL}(x) + \tilde{\sigma}_{\nu}^{KH}(x) \tilde{\sigma}_{\mu HL}(x) = 2 g_{\mu\nu}(x) \delta_L^K \quad (\text{II.21})$$

desde que, por construção,

$$g_{\mu\nu}(x) = e_{\mu(\alpha)}(x) e_{\nu(\beta)}(x) \eta^{\alpha\beta} \quad (\text{II.22})$$

Usando (II.3) e (II.14) em (II.21) vemos que o campo métrico em um dado ponto do espaço-tempo é o mesmo para todas as escolhas possíveis de referencial de spin. Uma conexão entre as transformações de Lorentz locais (2.8), (2.9) e as transformações de spin pode ser feita utilizando-se (II.14) e (II.18) e supondo que as matrizes constantes (II.17) são invariantes. Obtemos

$$L_{(\beta)}^{(\alpha)}(x) \tilde{\sigma}^{\beta \dot{K} \dot{H}} = S^k_L(x) S^{\dot{H}}_{\dot{P}}(x) \tilde{\sigma}^{\alpha \dot{K} \dot{P}} \quad (\text{II.23})$$

ou

$$L_{(\beta)}^{(\alpha)}(x) \tilde{\sigma}^{\beta} = S(x) \tilde{\sigma}^{\alpha} S^{\dagger}(x)$$

Por (II.19), ou diretamente, as seguintes propriedades podem ser verificadas

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\dot{A} \dot{B}}^{\mu} \tilde{\sigma}_{\mu}^{\dot{C} \dot{D}} &= 2 \delta_{\dot{A}}^{\dot{C}} \delta_{\dot{B}}^{\dot{D}} \\ \tilde{\sigma}^{\mu \dot{K} \dot{H}} \tilde{\sigma}_{\mu \dot{H} \dot{L}} &= 4 \delta_{\dot{L}}^{\dot{K}} \\ \tilde{\sigma}^{\mu \dot{K} \dot{H}} \tilde{\sigma}_{\nu \dot{K} \dot{H}} &= 2 \delta_{\nu}^{\mu} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

A última relação (II.24) pode ser reescrita

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{\mu}^{\dot{K} \dot{H}} \tilde{\sigma}_{\nu}^{\dot{R} \dot{S}} \epsilon_{\dot{K} \dot{R}} \epsilon_{\dot{H} \dot{S}} \quad (\text{II.24}')$$

de modo que o equivalente spinorial da métrica  $g_{\mu\nu}$  são as matrizes  $\epsilon$ .

## ALGEBRA DE SPINORES E EQUIVALENTES SPINORES DE ALGUNS VETORES E TENSORES

Pela propriedade do spinor  $\epsilon_{AB}$ ,

$$\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA} \quad (\text{II.25})$$

temos a seguinte identidade

$$\varepsilon_A [\varepsilon_{CD}] = 0 \quad (\text{II.26})$$

ou, explicitamente, usando (II.25)

$$\varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} + \varepsilon_{AC} \varepsilon_{DB} + \varepsilon_{AD} \varepsilon_{BC} = 0$$

Levantando os índices C e D, levando em conta (II.9), podemos reescrever (II.26) como

$$\varepsilon_{AB} \varepsilon^{CD} = \delta_A^C \delta_B^D - \delta_A^D \delta_B^C$$

e contraindo com um 2-spinor arbitrário  $\varphi_{CD}$  resulta

$$\varphi_{AB} - \varphi_{BA} = \varepsilon_{AB} \varphi_C^C \quad (\text{II.27})$$

Para quaisquer dois spinores de primeira ordem  $\varphi_A, \psi_A$ , temos

$$\varphi_A \psi_B - \varphi_B \psi_A = \varepsilon_{AB} \varphi_C \psi^C \quad (\text{II.28})$$

de modo que  $\varphi_A$  e  $\psi_A$  são proporcionais se e somente se seu produto se anula. Também qualquer par de spinores  $(\kappa_A, \mu_A)$  com

$\kappa_A \mu^A = 1$  pode ser tomado como uma base no espaço de spin, desde que, por (II.28)

$$\delta_A^B = \kappa_A \mu^B - \mu_A \kappa^B \quad (\text{II.29})$$

Como já vimos por (II.16), a todo vetor  $k^\alpha$  podemos associar o spinor

$$k^{A\dot{B}} = \tilde{\sigma}_\alpha^{A\dot{B}} k^\alpha \quad (\text{II.30})$$

Usando (II.24) temos

$$k^{\dot{A}\dot{B}} k_{\dot{A}\dot{B}} = 2 k_{\alpha} k^{\alpha} = \epsilon_{cA} \epsilon_{\dot{D}\dot{B}} k^{\dot{A}\dot{B}} k^{c\dot{D}} =$$

$$= 2 \det |k^{\dot{A}\dot{B}}| \quad (\text{II.31})$$

quer dizer

$$\det |k^{\dot{A}\dot{B}}| = k^{\alpha} k_{\alpha} \quad (\text{II.32})$$

De (II.32) tiramos que  $k^{\alpha}$  é um vetor nulo ( $k^{\alpha} k_{\alpha} = 0$ ) se e somente se  $k^{\dot{A}\dot{B}} = \chi^{\dot{A}} \eta^{\dot{B}}$ . Além disso, se  $k^{\alpha}$  é real,  $k^{\dot{A}\dot{B}}$  é hermitiana isto é,  $k^{\dot{A}\dot{B}} = k^{\dot{B}\dot{A}}$  ou  $\chi^{\dot{A}} \eta^{\dot{B}} = \chi^{\dot{B}} \eta^{\dot{A}}$ , o que implica  $\eta^{\dot{A}} = \lambda \chi^{\dot{A}}$  para algum  $\lambda$  real. Absorvendo  $\lambda$  em  $\chi^{\dot{A}}$ , temos (em resumo)

$$k^{\alpha} \text{ real, } k^{\alpha} k_{\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^{\dot{A}\dot{B}} = \pm \chi^{\dot{A}} \chi^{\dot{B}} \quad (\text{II.33})$$

Assim a todo vetor real nulo está associado um spinor de primeira ordem.

Vamos considerar um bivector (tensor antisimétrico de segunda ordem)

$$F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta]}$$

O spinor equivalente deve ter a mesma simetria

$$F_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = - F_{\dot{C}\dot{D}\dot{A}\dot{B}} \quad (\text{II.34})$$

e pode ser reescrito

$$F_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = \frac{1}{2} (F_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} - F_{\dot{C}\dot{D}\dot{A}\dot{B}}) =$$

$$= \frac{1}{2} (F_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} - F_{\dot{C}\dot{B}\dot{A}\dot{D}} + F_{\dot{C}\dot{B}\dot{A}\dot{D}} - F_{\dot{C}\dot{D}\dot{A}\dot{B}})$$
(II.35)

Usando (II.27)

$$F_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = \frac{1}{2} (\epsilon_{\dot{A}\dot{C}} F_{\dot{R}\dot{B}}^{\dot{R}} + \epsilon_{\dot{B}\dot{D}} F_{\dot{C}\dot{R}\dot{A}}^{\dot{R}}) \quad (\text{II.36})$$

Vamos denotar  $F_{CRA}^{\dot{R}} = \phi_{AC}$ . Temos

$$\phi_{AC} = \phi_{CA}$$

Analogamente denotando  $F_{RB}^{\dot{D}} = \psi_{DR}$  temos

$$\psi_{DR} = \psi_{RD}$$

Em particular, se  $F_{\alpha\beta}$  é real,  $(\phi_{AC})^* = \psi_{\dot{A}\dot{C}}$  ou  $(\psi_{\dot{A}\dot{C}})^* = \phi_{AC}$ .

Assim

$$F_{\alpha\beta} \leftrightarrow \epsilon_{AB} \phi_{\dot{C}\dot{D}} + \epsilon_{\dot{C}\dot{D}} \phi_{AB} \quad (\text{II.37})$$

onde  $\phi_{AB}$  é um spinor simétrico. Portanto um bivector real determina um spinor simétrico e vice-versa. As seis componentes reais independentes de  $F_{\alpha\beta}$  correspondem as três componentes complexas independentes  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{12}$  e  $\phi_{22}$ . Pode-se também mostrar que o equivalente spinorial do tensor de Levi-Civita  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  é dado por

$$\epsilon_{AB\dot{C}\dot{D}}^{FRG\dot{S}} = i(\delta_A^F \delta_C^G \delta_{\dot{B}}^{\dot{S}} \delta_{\dot{D}}^{\dot{R}} - \delta_A^G \delta_C^F \delta_{\dot{B}}^{\dot{R}} \delta_{\dot{D}}^{\dot{S}}) \quad (\text{II.38})$$

e então podemos calcular o equivalente spinorial do dual de  $F_{\alpha\beta}$

$$F_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \leftrightarrow i(\epsilon_{AB} \phi_{\dot{C}\dot{D}} - \epsilon_{\dot{C}\dot{D}} \phi_{AB}) \quad (\text{II.39})$$

de modo que

$$F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} + i F_{\alpha\beta}^* \leftrightarrow \epsilon_{\dot{C}\dot{D}} \phi_{AB} \quad (\text{II.40})$$

Finalmente, vamos considerar um tensor de 4 índices  $C_{\alpha\beta\mu\nu}$  com as mesmas simetrias do tensor de Weyl ou do tensor de Riemann no vazio



$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = C_{[\alpha\beta][\mu\nu]} = C_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (\text{II.41})$$

$$C^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} = 0$$

Usando procedimento análogo na determinação dos equivalentes spinoriais (II.37) e (II.38) obtemos

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} \leftrightarrow C_{ABCD\dot{E}\dot{F}\dot{G}\dot{H}} = \phi_{ACEG} \epsilon_{\dot{B}\dot{D}} \epsilon_{\dot{F}\dot{H}} + \epsilon_{AC} \epsilon_{EG} \phi_{\dot{B}\dot{D}\dot{F}\dot{H}} \quad (\text{II.42})$$

e

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} + i C_{\alpha\beta\mu\nu}^* \leftrightarrow \phi_{ABCD} \epsilon_{\dot{A}\dot{D}} \epsilon_{\dot{C}\dot{B}} \quad (\text{II.43})$$

onde  $\phi_{ABCD}$  é um spinor de quatro índices completamente simétrico,  $\phi_{ABCD} = \phi_{(ABCD)}$ . Assim, um tensor com as simetrias do tensor de Weyl determina e é determinado por um spinor simétrico de quatro ordens,  $\phi_{(ABCD)} = \frac{1}{4} C_{(A\dot{F} B \dot{C}\dot{D})}^{\dot{F}\dot{R}}$ .

## BASES PARA SPINORES DE PRIMEIRA ORDEM E SEUS CORRESPONDENTES VETORIAIS

Por (II.33), vimos que um spinor de primeira ordem  $k^A$  determina um vetor real nulo  $k^\alpha$  segundo

$$k^\alpha = \sigma^\alpha_{A\dot{B}} z^A \bar{z}^{\dot{B}}$$

O vetor  $k^\alpha$  fica inalterado pela transformação  $z^A \rightarrow e^{i\theta} z^A$ ,  $\theta$  real. Vamos introduzir um spinor  $\eta^A$ , que forma uma base com  $z^A$

$$z_A \eta^A = 1, \quad \epsilon_{AB} = z_A \eta_B - z_B \eta_A \quad (\text{II.44})$$

De acordo com (II.6), com estes spinores podemos construir os quatro vetores nulos seguintes (e linearmente independentes)

$$\begin{aligned}
 k^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^\alpha_{A\dot{B}} z^A z^{\dot{B}} \\
 l^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^\alpha_{A\dot{B}} \eta^A \eta^{\dot{B}} \\
 m^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^\alpha_{A\dot{B}} z^A \eta^{\dot{B}} \\
 \bar{m}^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^\alpha_{A\dot{B}} z^{\dot{B}} \eta^A
 \end{aligned}
 \tag{II.45}$$

com os únicos produtos escalares não nulos  $k_\alpha l^\alpha = 1$ ,  $m_\alpha \bar{m}^\alpha = -1$ . Os dois primeiros vetores são reais e os outros dois complexos, sendo um o conjugado do outro. A condição de preservar a base sob

$$z^A \rightarrow z^A e^{i\theta} \tag{II.46}$$

é que

$$\eta^A \rightarrow \eta^A e^{-i\theta} + \lambda z^A \tag{II.47}$$

Substituindo (II.46) e (II.47) em (II.45) obtemos

$$\begin{aligned}
 k^\alpha &\rightarrow k^\alpha \\
 l^\alpha &\rightarrow l^\alpha + \lambda^* e^{-i\theta} \bar{m}^\alpha + \lambda e^{i\theta} m^\alpha + \lambda \lambda^* k^\alpha \\
 m^\alpha &\rightarrow m^\alpha + \lambda^* e^{i\theta} k^\alpha \\
 \bar{m}^\alpha &\rightarrow \bar{m}^\alpha + \lambda e^{-i\theta} k^\alpha
 \end{aligned}
 \tag{II.48}$$

Estas transformações são chamadas rotações nulas em torno de  $k^\alpha$ .

Usando (II.44) em (II.24'),

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha}^{AB} \sigma_{\beta}^{cb} \epsilon_{AC} \epsilon_{\dot{b}\dot{b}}$$

resulta

$$g_{\alpha\beta} = k_{\alpha} l_{\beta} + k_{\beta} l_{\alpha} - m_{\alpha} \bar{m}_{\beta} - m_{\beta} \bar{m}_{\alpha} \quad (\text{II.49})$$

Assim a base (II.45) constitui uma base de vetores para o espaço-tempo que é denominada base de tetradas nulas. Por (II.44) podemos verificar que as transformações (II.46) e (II.47) ou (II.48) deixam (II.49) invariante. Denotando

$$z_{(A)}^{\alpha} = (k^{\alpha}, l^{\alpha}, m^{\alpha}, \bar{m}^{\alpha}) \quad (\text{II.50})$$

podemos escrever (II.49)

$$g_{\alpha\beta} = z_{(A)}^{\alpha} z_{(B)}^{\beta} \eta^{AB}$$

onde  $\eta^{AB}$  é a matriz constante

$$\eta^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \eta_{AB}$$

que é interpretada como a matriz de Minkowski em coordenadas locais nulas (por exemplo,  $(U, V, X+iY, X-iY)$ ).

### DECOMPOSIÇÃO CANÔNICA DO TENSOR DE WEYL

Vamos agora ver que o spinor simétrico  $\phi_{(ABCD)}$  que determina o tensor de Weyl (ou é determinado por ele) pode ser decomposto num produto simetrizado de spinores de primeira ordem. Este resultado vale para spinores simétricos de qualquer ordem. Seja  $\zeta^A$  um spinor arbitrário e consideremos a expressão

$$\phi(z) = \phi_{ABCD} z^A z^B z^C z^D.$$

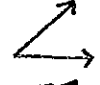

$\phi(z)$  é um polinômio homogêneo de grau 4 em  $z^1$  e  $z^2$ . Desde que estamos no corpo dos complexos (que é algebricamente fechado) este polinômio pode ser fatorado em 4 fatores lineares em  $(z^1, z^2)$  (o teorema fundamental da álgebra garante a existência e unicidade da fatoração). Assim podemos escrever identicamente

$$\phi(z) = (\alpha_A z^A)(\beta_B z^B)(\gamma_C z^C)(\delta_D z^D) \quad (\text{II.51})$$

ou, desde que  $z^A$  é arbitrário,

$$\phi_{ABCD} = \alpha_{(A} \beta_B \gamma_C \delta_{D)} \quad (\text{II.52})$$

Cada 1-spinor da decomposição (II.52) determina uma direção nula e, portanto, o tensor de Weyl tem no mínimo uma e no máximo quatro direções nulas, chamadas direções nulas principais, o que permite a classificação de Petrov-Penrose do tensor de Weyl. Como exemplo, vamos considerar o spinor simétrico  $\phi_{AB}$  (associado, por exemplo, ao campo eletromagnético). Neste caso, há somente duas possibilidades que dependem se as duas direções nulas principais são distintas ou não:

Forma de $\phi_{AB}$	Nome do Bivector Considerado	Partição
$\phi_{AB} = \alpha_{(A} \beta_{B)}$	geral	[11] 
$\phi_{AB} = \alpha_A \alpha_B$	nulo	[2] 

Os invariantes do campo podem ser expressos

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sim \text{Re}(\alpha_A \beta^A)$$

$$F_{\alpha\beta}^* F^{\alpha\beta} \sim \text{Im}(\alpha_A \beta^A)$$

Para o caso nulo ([2]) os invariantes do campo são nulos, correspondendo à zona de radiação do campo, onde as duas direções nulas coincidem. A classificação Petrov-Penrose do tensor de Weyl é feita de modo análogo, usando (II.52):

Tipo de Petrov-Penrose	Partição	Forma de $\phi_{ABCD}$	Equação satisfeita por $\phi_{ABCD}$
I	[1111]	$\phi_{ABCD} = \alpha_{(A} \beta_B \gamma_C \delta_{D)}$	$\phi_{ABCD} \alpha^B \alpha^C \alpha^D = \lambda \alpha_A, \lambda \neq 0$
II	[211]	$\phi_{ABCD} = \alpha_{(A} \alpha_B \beta_C \gamma_{D)}$	$\phi_{ABCD} \alpha^C \alpha^D = \lambda \alpha_A \alpha_B, \lambda \neq 0$
D	[22]	$\phi_{ABCD} = \alpha_{(A} \alpha_B \beta_C \beta_{D)}$	
III	[31]	$\phi_{ABCD} = \alpha_{(A} \alpha_B \alpha_C \beta_{D)}$	$\phi_{ABCD} \alpha^D = \lambda \alpha_A \alpha_B \alpha_C, \lambda \neq 0$
N	[4]	$\phi_{ABCD} = \alpha_A \alpha_B \alpha_C \alpha_D$	$\phi_{ABCD} = \alpha_A \alpha_B \alpha_C \alpha_D$
	0	$\phi_{ABCD} = 0$	

O tipo I é denominado algebricamente geral e os outros tipos, algebricamente especiais. A hierarquia dos tipos de Petrov (especialização no sentido I  $\rightarrow$  N) tem uma significação física considerável na caracterização das diversas regiões dos campos de radiação gravitacional emitida por fontes limitadas (ver teorema de "Peeling-off", referência [16]).

#### DERIVADA COVARIANTE DE UM SPINOR E COEFICIENTES DE NEWMAN-PENROSE

A derivada covariante de um spinor é definida de mo

do que o spinor derivado preserve todas suas propriedades de transformação, com relação ao grupo de transformações de coordenadas e ao  $SL_2(x)$ :

$$\nabla_{\alpha} k^A = \partial_{\alpha} k^A - \Gamma_{\alpha}^A{}_{\beta} k^{\beta} \quad (II.53)$$

onde

$$\Gamma_{\alpha}^A{}_{\beta} = -\frac{1}{4} \tilde{\sigma}_{\beta}{}^{BC} \left[ \sigma_{\alpha}^{PAC} + \left\{ \begin{matrix} S \\ \mu\alpha \end{matrix} \right\} \sigma^{\mu AC} \right] \quad (II.54)$$

Por (II.53) e (II.54), esta derivada covariante tem as seguintes propriedades: linearidade, regra de Leibnitz do produto,

$$\nabla_{\alpha} \epsilon_{AB} = 0 \quad (II.55)$$

$$\nabla_{\alpha} \tilde{\sigma}_{\beta}{}^{AB} = 0 \quad (II.56)$$

(II.55) e (II.56) são suficientes para  $\nabla_{\alpha} g_{\beta\gamma} = 0$ . Quando atuando sobre escalares, ela é a derivada parcial usual. (II.53) pode ser expressa como

$$\nabla_{AA} k^B \equiv \tilde{\sigma}_{AA}^{\alpha} \nabla_{\alpha} k^B \quad (II.57)$$

Nesta notação, as identidades de Bianchi no vazio são dadas por

$$\nabla^{DE} \phi_{ABCD} = 0 \quad (II.58)$$

Vamos considerar a base de tetradas (II.50) determinada pela base de 1-spinors  $(\xi^A, \eta^A)$ . Os coeficientes de Ricci com

plexos são definidos por

$$\gamma_{ABC} = z_{(A) \mu} z_{(B)}^{\mu} z_{(C)}^{\nu} \quad (\text{II.59})$$

Os doze coeficientes de Newman-Penrose podem ser expressos em termos de (II.59) ou na notação (II.57), usando (II.45), por

$$\begin{aligned} \chi &= \gamma_{020} = k_{\mu\nu} m^{\mu} k^{\nu} = z^A z^{\dot{A}} z^B \nabla_{A\dot{A}} z_B \\ \rho &= \gamma_{023} = k_{\mu\nu} m^{\mu} \bar{m}^{\nu} = \eta^A z^{\dot{A}} z^B \nabla_{A\dot{A}} z_B \\ \sigma &= \gamma_{022} = k_{\mu\nu} m^{\mu} m^{\nu} = z^A \eta^{\dot{A}} z^B \nabla_{A\dot{A}} z_B \\ \bar{\tau} &= \gamma_{021} = k_{\mu\nu} m^{\mu} l^{\nu} = \eta^A \eta^{\dot{A}} z^B \nabla_{A\dot{A}} z_B \\ \pi &= -\gamma_{130} = -l_{\mu\nu} \bar{m}^{\mu} k^{\nu} = z^A z^{\dot{A}} \eta^B \nabla_{A\dot{A}} \eta_B \\ \lambda &= -\gamma_{133} = -l_{\mu\nu} \bar{m}^{\mu} \bar{m}^{\nu} = \eta^A z^{\dot{A}} \eta^B \nabla_{A\dot{A}} \eta_B \\ \mu &= -\gamma_{132} = -l_{\mu\nu} \bar{m}^{\mu} m^{\nu} = z^A \eta^{\dot{A}} \eta^B \nabla_{A\dot{A}} \eta_B \\ \nu &= -\gamma_{131} = -l_{\mu\nu} \bar{m}^{\mu} l^{\nu} = \eta^A \eta^{\dot{A}} \eta^B \nabla_{A\dot{A}} \eta_B \\ \epsilon &= \frac{1}{2} (\gamma_{010} - \gamma_{230}) = \frac{1}{2} (k_{\mu\nu} l^{\mu} k^{\nu} - m_{\mu\nu} \bar{m}^{\mu} k^{\nu}) = z^A z^{\dot{A}} \eta^B \nabla_{A\dot{A}} z_B \\ \alpha &= \frac{1}{2} (\gamma_{013} - \gamma_{233}) = \frac{1}{2} (k_{\mu\nu} l^{\mu} \bar{m}^{\nu} - m_{\mu\nu} \bar{m}^{\mu} \bar{m}^{\nu}) = \eta^A z^{\dot{A}} z^B \nabla_{A\dot{A}} \eta_B \\ \beta &= \frac{1}{2} (\gamma_{012} - \gamma_{232}) = \frac{1}{2} (k_{\mu\nu} l^{\mu} m^{\nu} - m_{\mu\nu} \bar{m}^{\mu} m^{\nu}) = z^A \eta^{\dot{A}} \eta^B \nabla_{A\dot{A}} z_B \\ \gamma &= \frac{1}{2} (\gamma_{011} - \gamma_{231}) = \frac{1}{2} (k_{\mu\nu} l^{\mu} l^{\nu} - m_{\mu\nu} \bar{m}^{\mu} l^{\nu}) = \eta^A \eta^{\dot{A}} z^B \nabla_{A\dot{A}} \eta_B \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

As dez componentes independentes do tensor de Weyl (ou do tensor de Riemann no vácuo) podem ser expressas pelos cinco escalares complexos independentes

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= - C_{\mu\nu\rho\sigma} k^\mu m^\nu k^\rho m^\sigma = \phi_{ABCD} z^A z^B z^C z^D \\
 \psi_1 &= - C_{\mu\nu\rho\sigma} k^\mu l^\nu k^\rho m^\sigma = \phi_{ABCD} z^A z^B z^C \eta^D, \\
 \psi_2 &= -\frac{1}{2} C_{\mu\nu\rho\sigma} (k^\mu l^\nu k^\rho l^\sigma - k^\mu l^\nu m^\rho \bar{m}^\sigma) = \phi_{ABCD} z^A z^B \eta^C \eta^D \\
 \psi_3 &= - C_{\mu\nu\rho\sigma} k^\mu l^\nu \bar{m}^\rho l^\sigma = \phi_{ABCD} z^A \eta^B \eta^C \eta^D \\
 \psi_4 &= - C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu \bar{m}^\nu l^\rho \bar{m}^\sigma = \phi_{ABCD} \eta^A \eta^B \eta^C \eta^D
 \end{aligned} \tag{II.61}$$

Pelas equações satisfeitas por  $\phi_{ABCD}$ , no quadro de classificação de Petrov-Penrose, podemos concluir: (i) se o vetor nulo  $k^\alpha$  é tangente a uma congruência de geodésicas nulas,  $\kappa = 0$ . Além do mais, se  $k^\alpha$  é um vetor nulo principal do tensor de Weyl (determina uma direção nula principal em cada ponto do espaço-tempo) então  $\psi_0 = 0$ . (ii) Se o tensor de Weyl é algebricamente especial, com direção nula principal degenerada definida por  $k^\alpha$ ,  $\kappa = 0$  e  $\psi_0 = \psi_1 = 0$ . Pelo teorema de Goldberg-Sachs [86], então  $\sigma = 0$ . (iii) o tipo é Petrov II se  $\psi_2 \neq 0$ ; Petrov tipo D se somente  $\psi_2 \neq 0$  em (II.61), onde a outra direção nula principal degenerada é definida por  $l^\alpha$  (ou  $\eta^A$ ). (iv) Petrov tipo III se  $\psi_2 = 0$ ,  $\psi_3 \neq 0$  e Petrov tipo N se  $\psi_2 = \psi_3 = 0$  e  $\psi_4 \neq 0$ . Definindo as derivadas intrínsecas

$$\begin{aligned}
 D\phi &= k^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = z^A z^{\dot{A}} \nabla_{A\dot{A}} \phi \\
 \delta\phi &= m^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = z^A \eta^{\dot{A}} \nabla_{A\dot{A}} \phi \\
 \bar{\delta}\phi &= \bar{m}^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = \eta^A z^{\dot{A}} \nabla_{A\dot{A}} \phi \\
 \Delta\phi &= l^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = \eta^A \eta^{\dot{A}} \nabla_{A\dot{A}} \phi
 \end{aligned} \tag{II.62}$$



e fazendo todas as possíveis projeções na base (II.50) das identidades de Bianchi (por exemplo, para o vazio)

$$C^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{\parallel\gamma} = 0 \quad (\text{II.63})$$

bem como das identidades de Ricci

$$z_{(A)\alpha\parallel\beta\parallel\gamma} - z_{(A)\alpha\parallel\gamma\parallel\beta} = R^{\epsilon}{}_{\alpha\beta\gamma} z_{(A)\epsilon} \quad (\text{II.64})$$

e usando a notação anteriormente introduzida, obtemos as equações de Newman e Penrose<sup>[84]</sup> (para o vazio) que, para uma escolha conveniente de coordenadas, permitem obter classes muito gerais de soluções das equações de Einstein<sup>[87]</sup>. Estas equações poderiam ser analogamente obtidas, usando-se as expressões spinoriais correspondentes (por exemplo, (II.58) para identidade de Bianchi no vazio; para identidades de Ricci, conferir literatura citada) e tomando todas as possíveis projeções na base  $(z^A, \gamma^A)$ . Como ilustração, considerar (II.64) no caso  $A=0$ ,

$$k_{\alpha\parallel\beta\parallel\gamma} - k_{\alpha\parallel\gamma\parallel\beta} = R^{\epsilon}{}_{\alpha\beta\gamma} k_{\epsilon}$$

e a projeção sobre  $m^{\alpha} \bar{m}^{\gamma} k^{\beta}$  :

$$(R^{\epsilon}{}_{\alpha\beta\gamma} k_{\epsilon}) m^{\alpha} \bar{m}^{\gamma} k^{\beta} = (k_{\alpha\parallel\beta\parallel\gamma} - k_{\alpha\parallel\gamma\parallel\beta}) m^{\alpha} \bar{m}^{\gamma} k^{\beta} \quad (\text{II.65})$$

Usando (II.49) podemos escrever

$$m^{\alpha} \bar{m}^{\gamma} = -g^{\alpha\gamma} + k^{\alpha} \ell^{\gamma} + k^{\gamma} \ell^{\alpha} - m^{\gamma} \bar{m}^{\alpha}$$

e o lado esquerdo de (II.65) fica

$$R^{\epsilon}{}_{\alpha\beta\gamma} k_{\epsilon} k^{\beta} (-g^{\alpha\gamma} + k^{\alpha} \ell^{\gamma} + k^{\gamma} \ell^{\alpha} - m^{\gamma} \bar{m}^{\alpha}) = R^{\epsilon}{}_{\alpha\beta\gamma} k_{\epsilon} m^{\alpha} \bar{m}^{\gamma} k^{\beta}$$

ou

$$(R^{\epsilon}{}_{\alpha\beta\gamma} k^{\epsilon}) m^{\alpha} \bar{m}^{\delta} k^{\beta} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} k^{\alpha} k^{\beta}$$

Do lado direito, por exemplo,

$$k_{\alpha\parallel\beta\parallel\gamma} m^{\alpha} \bar{m}^{\delta} k^{\beta} = (k_{\alpha\parallel\beta} m^{\alpha} k^{\beta})_{\parallel\gamma} \bar{m}^{\delta} - k_{\alpha\parallel\beta} \delta_{\gamma}^{\beta} k^{\beta}_{\parallel\gamma} \bar{m}^{\delta} m^{\alpha}$$

e usando as definições (II.60) e (II.62), e (II.49)

$$k_{\alpha\parallel\beta\parallel\gamma} m^{\alpha} \bar{m}^{\delta} k^{\beta} = \bar{\delta} \chi - k_{\alpha\parallel\beta} (k^{\beta} l_{\gamma} + k_{\gamma} l^{\beta} - m^{\beta} \bar{m}_{\gamma} - m_{\gamma} \bar{m}^{\beta}) k^{\beta}_{\parallel\gamma} \bar{m}^{\delta} m^{\alpha}$$

De novo usando as definições (II.60)

$$k_{\alpha\parallel\beta\parallel\gamma} \bar{m}^{\delta} m^{\alpha} k^{\beta} = \bar{\delta} \chi - \chi (\alpha + \bar{\beta}) + \sigma \bar{\sigma} + \rho^2$$

Analogamente

$$\begin{aligned} k_{\alpha\parallel\gamma\parallel\beta} m^{\alpha} \bar{m}^{\delta} k^{\beta} &= (k_{\alpha\parallel\gamma} m^{\alpha} \bar{m}^{\delta})_{\parallel\beta} k^{\beta} - k_{\alpha\parallel\gamma} m^{\alpha}_{\parallel\beta} \bar{m}^{\delta} k^{\beta} - k_{\alpha\parallel\gamma} m^{\alpha} \bar{m}^{\delta}_{\parallel\beta} k^{\beta} = \\ &= D_{\beta} - k_{\alpha\parallel\gamma} \delta_{\beta}^{\alpha} m^{\beta}_{\parallel\beta} \bar{m}^{\delta} k^{\beta} - k_{\alpha\parallel\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} \bar{m}^{\beta}_{\parallel\beta} m^{\alpha} k^{\beta} \end{aligned}$$

Usando (II.49) e as definições (II.60), finalmente (II.65) pode ser reescrita

$$\begin{aligned} D_{\beta} - \bar{\delta} \chi &= \rho^2 + \sigma \bar{\sigma} + (\epsilon + \bar{\epsilon}) \rho - \bar{\chi} \tau - \chi (3\alpha + \bar{\beta} - \pi) \\ &\quad + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} k^{\alpha} k^{\beta} \end{aligned} \tag{II.65}$$

Temos ao todo 18 equações deste tipo, correspondendo às identidades de Ricci projetadas. Para o vácuo a última parcela do lado direito se anula. Para outros campos, usamos as equações de Einstein

$$R_{\alpha\beta} = \kappa \left( T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right), \quad \text{de modo que em (II.65) } R_{\alpha\beta} k^{\alpha} k^{\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} k^{\alpha} k^{\beta}.$$

No caso do neutrino ou campo eletromagnético, as identidades de Bianchi (II.63) se modificam para

$$C^{\alpha\beta\mu\nu}_{\parallel\nu} = \frac{1}{2} T^{\mu}{}_{\nu} [\alpha\parallel\beta] \tag{II.66}$$

onde usamos as equações de Einstein  $R_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ . As equações projetadas conterão termos correspondentes às projeções de  $T_{\alpha\beta}$  na base (II.50).

### NEUTRINOS NO FORMALISMO DE SPINORES A DUAS COMPONENTES

No formalismo de spinores a duas componentes, um campo de neutrino no espaço-tempo é descrito pelo 2-spinor  $\zeta^A(x)$ , que satisfaz a equação de Weyl para o neutrino

$$\sigma^{\alpha}_{AA'}(x) \nabla_{\alpha} \zeta^A(x) = 0 \quad (\text{II.67})$$

onde  $\sigma^{\alpha}_{AA'}$  e  $\nabla_{\alpha}$  são definidos em (II.18) e (II.53), respectivamente. Em cada ponto do espaço-tempo, o campo de neutrino  $\zeta^A(x)$  determina uma direção tangente ao cone nulo local

$$j^{\alpha} = \sigma^{\alpha}_{AA'} \zeta^A \zeta^{A'} \quad (\text{II.68})$$

No que se segue, fazemos a hipótese que a direção nula determinada por  $\zeta^A$  é uma direção nula principal. Isto implica  $\psi_0 = 0$ . A partir de  $\zeta^A$ , vamos construir a base  $(\zeta^A, \eta^A)$  com  $\zeta_A \eta^A = 1$ , que determina as tetradas nulas (II.45). A equação do neutrino (II.67)

$$\nabla_{AA'} \zeta^A = 0$$

pode ser reescrita

$$\nabla_{AA'} \varepsilon^{AB} \zeta_B = \varepsilon^{AB} \nabla_{AA'} \zeta_B = 0$$

e usando (II.29)

$$(\zeta^A \eta^B - \zeta^B \eta^A) \nabla_{AA} \zeta_B = 0 \quad (\text{II.67}')$$

Projetando sobre  $\zeta^{\dot{A}}$  e  $\eta^{\dot{A}}$  obtemos, respectivamente,

$$\zeta^A \zeta^{\dot{A}} \eta^B \nabla_{AA} \zeta_B - \eta^A \zeta^{\dot{A}} \zeta^B \nabla_{AA} \zeta_B = 0 \quad (\text{II.69})$$

$$\zeta^A \eta^{\dot{A}} \eta^B \nabla_{AA} \zeta_B - \eta^A \eta^{\dot{A}} \zeta^B \nabla_{AA} \zeta_B = 0 \quad (\text{II.70})$$

ou, pelas definições (II.60)

$$\varepsilon - \varrho = 0 \quad (\text{II.69})$$

$$\beta - \tau = 0 \quad (\text{II.70})$$

que expressam as equações de campo do neutrino no formalismo NP (notemos que o spinor do neutrino é determinado por (ou determina) uma direção nula principal em cada ponto do espaço-tempo, sendo que suas equações de campo implicam nas restrições adicionais (II.69) e (II.70)). O tensor momentum-energia do campo de neutrino tem forma análoga ao seu correspondente no formalismo de 4- spinores

$$T_{\alpha\beta} = i \{ \zeta^{\dot{A}} \sigma_{\alpha AA} \nabla_{\beta} \zeta^A - \nabla_{\alpha} \zeta^{\dot{A}} \sigma_{\beta)AA} \zeta^A \} \quad (\text{II.71})$$

Podemos reescrever (II.71) como

$$T_{\alpha\beta} = i \{ \sigma_{\alpha AA} \zeta^{\dot{A}} \varepsilon^{AB} \nabla_{\beta} \zeta_B + \sigma_{\beta AA} \zeta^{\dot{A}} \varepsilon^{AB} \nabla_{\alpha} \zeta_B \\ - \sigma_{\alpha AA} \zeta^A \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} \nabla_{\beta} \zeta_{\dot{B}} - \sigma_{\beta AA} \zeta^A \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} \nabla_{\alpha} \zeta_{\dot{B}} \}$$

Usando  $\epsilon^{AB} = z^A \eta^B - z^B \eta^A$  e (II.45), resulta

$$T_{\alpha\beta} = \sqrt{2} i \left\{ k_\alpha \eta^B \nabla_\beta z_B - \bar{m}_\alpha z^B \nabla_\beta z_B + k_\beta \eta^B \nabla_\alpha z_B - \bar{m}^\alpha z^B \nabla_\alpha z_B - k_\beta \eta^B \nabla_\alpha z_B + m_\beta z^B \nabla_\alpha z_B - k_\alpha \eta^B \nabla_\beta z_B + m_\alpha z^B \nabla_\beta z_B \right\} \quad (\text{II.72})$$

As expressões tipo  $\eta^B \nabla_\alpha z_B$  podem ser escritas em termos dos coeficientes de NP e das tetradas (II.45): por (II.16)

$$\eta^B \nabla_\alpha z_B = \frac{1}{2} \sigma_\alpha^{A\dot{A}} \eta^{\dot{B}} \nabla_{A\dot{A}} z_B = \frac{1}{2} \sigma_\alpha^{c\dot{c}} \epsilon^{cA} \epsilon^{\dot{c}\dot{A}} \eta^{\dot{B}} \nabla_{A\dot{A}} z_B$$

e usando  $\epsilon^{CA} = z^C \eta^A - z^A \eta^C$ ,

$$\eta^B \nabla_\alpha z_B = \frac{1}{2} \sigma_\alpha^{c\dot{c}} (z^c z^{\dot{c}} \eta^A \eta^{\dot{A}} - z^c z^{\dot{A}} \eta^A \eta^{\dot{c}} - \eta^c z^{\dot{c}} z^A \eta^{\dot{A}} + \eta^c \eta^{\dot{c}} z^A z^{\dot{A}}) \eta^{\dot{B}} \nabla_{A\dot{A}} z_B$$

ou

$$\eta^B \nabla_\alpha z_B = \frac{1}{2} (\gamma k_\alpha - \alpha m_\alpha - \beta \bar{m}_\alpha + \epsilon \ell_\alpha)$$

Tratando os outros termos em (II.72) de forma análoga e usando as equações de campo (II.69), (II.70), obtemos

$$T_{\alpha\beta} = \sqrt{2} i \left\{ 2(\gamma - \bar{\gamma}) k_\alpha k_\beta + (\rho - \bar{\rho}) 4(k_{(\alpha} \ell_{\beta)}) - g_{\alpha\beta} - 2\sigma m_\alpha m_\beta + 2\sigma \bar{m}_\alpha \bar{m}_\beta + 2\bar{\chi} \ell_{(\alpha} m_{\beta)} + 2\chi \ell_{(\alpha} \bar{m}_{\beta)} + 2(2\bar{\tau} - \alpha) k_{(\alpha} m_{\beta)} - 2(2\tau - \bar{\alpha}) k_{(\alpha} \bar{m}_{\beta)} \right\} \quad (\text{II.73})$$

Assim vemos que a forma do tensor momentum-energia do neutrino depende fortemente das propriedades da congruência de geodésicas nulas, determinada pela direção nula principal  $z^A$  (campo do neutrino). Se a congruência é geodésica  $\mathcal{K} = 0$ , sem distorção  $\sigma = 0$ , e sem rotação ( $\omega^2 = \frac{1}{2} k_{[\alpha\beta]} k^{\alpha\beta}$ ) se  $(\rho - \bar{\rho}) = 0$ .

Na integração das equações de Newman-Penrose, para uma métrica solução das equações de Einstein tendo neutrino como fonte de curvatura, usamos a expressão (II.73) (por exemplo, em (II.65) e (II.66)) cujas projeções na base (II.50) (notemos que

$k_\alpha l^\alpha = -m_\alpha \bar{m}^\alpha = 1$ , outros produtos nulos) serão funções so  
mente dos coeficientes de NP (II.60). Para exemplo de uma integra  
ção simples com neutrinos, ver referência [53] .

## REFERÊNCIAS

1. L. Infeld & B.L. van der Waerden - Sitzber. preuss. Akad. Wiss. Physik.-math. Kl. 9, 380 (1933), citado em R. Penrose, Ann.Phys. 10, 171 (1960).
2. E. Cartan - Bull.Soc. Math. France 41, 53 (1913)  
E. Cartan - The Theory of Spinors. The MIT Press, Massachusetts 1966.
3. Para uma revisão completa de spinores, incluindo bibliografia, W.C. Perke e H. Jehle, Covariant Spinor Formulation of Relativistic Wave Equation under the Homogeneous Lorentz Group, em Lectures in Theoretical Physics (University of Colorado), Boulder (1964).
4. D.R. Brill & J.A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. 29, 465 (1957).
5. S. Weinberg, Phys. Rev. 128, 1457 (1962).
6. J.V. Narkilar, Proc. Roy. Soc. (London) 270, 553 (1962).
7. A.A. Penzias & R.W. Wilson, Ap. J. 142, 419 (1965).
8. M.S. Longair, Rep.Prog.Phys., 34, 1125-1248 (1971).
9. H.Y. Chiu, Ann.Phys. 26, 364 (1964).  
C. Michel, Ap. J. 138, 1090 (1963).  
S.A. Colgate & R.H. White, Ap. J. 143, 626 (1966).
10. D.R. Brill & J.M. Cohen, J. Math.Phys., 7, 238 (1966).
11. P.M. Cohn - Lie Groups. Cambridge University Press, Cambridge 1957.

12. H. Cartan - Differential Forms. Kershaw, London 1971.
13. S.W. Hawking & G.F.R. Ellis - The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge University Press, Cambridge 1973.
14. C.G. Oliveira - Relativity and Gravitation. Monografias XXVI CBPF, Rio de Janeiro 1970.  
C.M. do Amaral, Notas de Física XIV, nº 1, CBPF, Rio de Janeiro 1968.
15. M. Spivac - A comprehensive introduction to differential geometry. Publish or Perish Inc., Boston 1970.
16. E.T. Newman & R. Penrose, J.Math.Phys. 3, 566 (1962).
17. S.S. Schweber - An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. Harper and Row, New York 1964.
18. V. Heine, Phys.Rev. 107, 620 (1957).
19. F.A.E. Pirani, em Lectures on General Relativity. Brandeis Summer Institute, 1964; Prentice-Hall, N.Jersey 1965. Para uma revisão unificada de spinores a quatro e duas componentes do espaço de representação do Grupo de Lorentz Homogêneo, ver P.P. Srivastava, Notas de Física, XIX, 267, 1973.
20. W.L. Bade & H. Jehle, Rev.Mod.Phys. 25, 714 (1953) e referências (3) e (80).
21. S. Gasiorowicz - Elementary Particle Physics. John Wiley & Sons, Inc., New York 1966.
22. V. Fock & D. Ivanenko, Comp.Rend. 188, 1470 (1929).
23. J.L. Anderson - Principles of Relativity Physics. Academic Press, New York 1967.



24. M. Novello, Phys.Rev. D8, 2398 (1973).
25. D.G. Boulware, Phys.Rev. D12, 350 (1975).
26. E. Cartan - Sur les equations de la gravitation d'Einstein. Oeuvres Complètes, vol. III, Paris 1952.
27. C.W. Misner & J.A. Wheeler, Ann.Phys. 2, 525 (1957).  
C.W. Misner, J.Math.Phys. 4, 924 (1963).  
I.Damião Soares, J.Phys. A9, 555 (1976).
28. M. Novello - Tópicos de Cosmologia Relativista. Monografias XXXIV CBPF, Rio de Janeiro, 1974.
29. S. Weinberg - Gravitation and Cosmology, Cap. 15. John Wiley & Sons, Inc., New York 1972.
30. B. Kuchowicz - The cosmic v. Nuclear Energy Information Center, Warsaw 1972.
31. A.H. Taub, Ann.Math. 53, 472 (1951).
32. M. Novello & I. Damião Soares, Phys.Lett. 56A, 431 (1976).
33. R. Gilmore - Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications. John Wiley & Sons, New York 1974.
34. L.P. Eisenhart - Riemannian Geometry. Princeton University Press, Princeton 1950.
35. C.G. Behr, J.Math.Phys. 9, 497 (1968).  
M.A.H. MacCallum, em Cargèse Lectures in Physics, vol. 6, ed. E. Schatzman, Gordon and Breach, New York 1973.  
G.F.R. Ellis and M.A.H. MacCallum, Commun. Math.Phys. 12, 108 (1969).

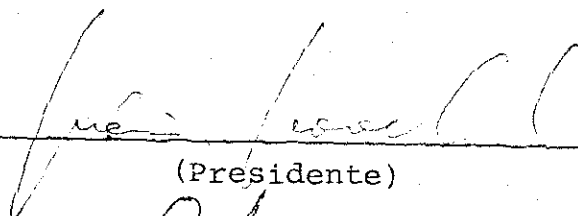
36. G.F.R. Ellis - Relativistic Cosmology. Em General Relativity and Cosmology, ed.R.K. Sachs, Rendiconti SIF, XLVIII Corso, Academic Press, New York 1971.
37. E.L. Schücking, Lectures Notes, New York 1970.
38. E.L. Schücking - Cosmology. Em Relativity Theory and Astrophysics; I. Relativity and Cosmology, ed.J. Ehlers, American Mathematical Society, Rhode Island 1967.
39. N.E. Kochin, I.A. Kibel, N.V. Roze - Theoretical Hydromechanics. John Wiley & Sons, Inc., New York 1964.
40. T.M. Davis & J.R. Ray, Phys. Rev. D9, 331 (1974).
41. I.Damião Soares & M. Novello - Relatório do Grupo de Cosmologia Relativista, CBPF 1975.
42. M. Novello, a ser publicado em Phys.Lett.
43. J. Ehlers & W. Kundt - Exact Solutions of the Gravitational Field Equations. Em Gravitation: an introduction to current research, ed. Witten Wiley, New York 1962.
44. C.W. Reisner, Phys.Rev. 137, 1360 (1965).
45. K.P. Singh & M.C. Srivastava, Proc.Nat.Inst.Sci.Ind. A35, 619 (1969).
46. P.C. Vaidya, Phys.Rev. 83, 10 (1951).
47. V.V. Narlikar & P.C. Vaidya, Nature 159, 642 (1947).
48. J. Plebanski & J. Stachel, J.Math.Phys. 9, 269 (1968).
49. P.C. Vaidya, Nature 171, 260 (1953).

50. J. Synge - Relativity. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1956.
51. J. Andretsch, Lett.N.Cim. 4, 339 (1972).
52. J.B. Griffiths, Gen.Rel.Grav. 4, 361 (1973).
53. D. Trim & J. Wainwright, J. Math.Phys. 12, 2494 (1971).
54. J.B. Griffiths & R.A. Newing, J. Phys. A3, 136 (1970).
55. E. Segrè, Ann.Rev.Nucl.Sc. 1958, pag. 141.
56. R. Sachs, Phys.Rev. 128, 2851 (1962).
57. C.W. Misner, Phys.Rev. 137, 1364 (1965).
58. L. Landau & E. Lifschitz - The Classical Theory of Fields. Pergamon Press, London 1962.
59. R. Sachs - Gravitational Radiation. Em: Relativity, Groups and Topology. ed. De Witt, Gordon and Breach, New York 1964.  
I. Robinson & A. Schild, J.Math.Phys. 4, 484 (1963).
60. A.Z. Petrov, Sci.Nat.Kazan State University, 114, 55 (1954).
61. E.T. Newman & T.W.J. Unti, J.Math.Phys. 3, 891 (1962).
62. B.K. Harrison, K. Thorne, M. Wakano, J.A. Wheeler - Gravitation Theory and Gravitational Collapse. The University of Chicago Press, 1965.
63. M. Kruskal, Phys.Rev. 119, 1743 (1960).
64. R.K. Sachs, Proc.Roy.Soc. (London) A270, 103 (1962).

65. W. Pauli - Theory of Relativity. Pergamon Press, London 1958.
66. S. Chandrasckhar - An introduction to the study of stellar structure. The University of Chicago Press, Chicago 1939.
67. A. Lichnerowicz - Théories relativistes de la gravitation e de l'électromagnétisme. Masson et Cie., Paris 1955.
68. W. Israel, Proc.Roy.Soc. (London) A248, 404 (1958).
69. S. O'Brien & J.L. Synge, Commun. Dublin Inst. Adv. Stud. A, n° 9.
70. Ya. B. Zeldovich & I.D. Novikov - Relativistic Astrophysics, vol. 1, The University of Chicago Press. Chicago 1971.
71. C.W. Misner, K.S. Thorne & J.A. Wheeler - Gravitation. Freeman and Co., San Francisco 1973.
72. S.W. Hawking, Comm. Math.Phys. 43, 199 (1975).
73. B.S. De Witt, Phys.Rep. 19, 295-357 (1975).
74. L.E. Parker, Phys.Rev.Lett. 21, 562 (1968); 28, 705 (1972); Phys.Rev. 183, 1057 (1969); Phys.Rev. D3, 346 (1971).
75. Ya. B. Zeldovich, JETP Lett. 12, 307 (1970).
76. Ya. B. Zeldovich & A.A. Starobinskii, JETP 34, 1159 (1972).
77. G.W. Gibbons, Comm.Math.Phys. 44, 245 (1975).
78. W.G. Unruh, Phys.Rev. D10, 3194 (1974).
79. D.G. Boulware, Phys.Rev. D11, 1404 (1975).

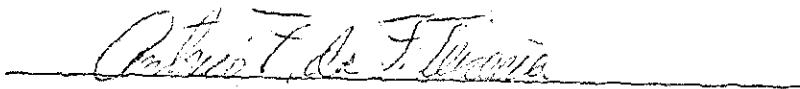
80. P.G. Bergmann, Phys.Rev. 107, 624, 1957.
81. R. Penrose, Ann.Phys. 10, 171 (1960).
82. J.B. Griffiths & R.A. Newing, J,Phys. A4, 208 (1971).
83. J.B. Griffiths & R.A. Newing, J.Phys. A4, 306 (1971).
84. J. Wainwright, J.Math. Phys. 12, 828 (1971).
85. C.G. Oliveira - Notas de Física, suplemento ao Volume XI, CBPF. Rio de Janeiro, 1965.
86. J.N. Goldberg & R.K. Sachs, Acta Physica Polonica 22, 13 (1962).
87. E. Newman, L. Tamburino, T. Unti, J.Math.Phys. 4, 915 (1963).  
C.J. Talbot, Comm. Math. Phys. 13, 45 (1969).

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

  
\_\_\_\_\_  
(Presidente)

  
\_\_\_\_\_

Carlos Maria do Amaral  
\_\_\_\_\_

  
\_\_\_\_\_

Roberto J. Moreira  
\_\_\_\_\_