PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARA A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES

Tese de Mestrado

NIRZI GONÇALVES DE ANDRADE

AGRADECIMENTOS

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas pela acolhida, pelos cursos oferecidos e pelo apoio financeiro.

Ao Conselho Nacional de Pesquisas pela ajuda financeira durante os cursos de pós-graduação.

À CAPES pelo auxílio financeiro durante a fase final de elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Luiz Adauto Medeiros pela sugestão deste trabalho e pela sua orientação segura e constnate.

Rio, outubro de 1973

Nirzi Gonçalves de Andrade

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes descrevem a evolução de um fluido, possuindo determinadas propriedades, denominado fluído de Stokes-Newton. Em situações simples, como movimentos unidimensionais, estas equações são resolvidas com facilidade.

Aqui estamos interessados na questão de existência e unicidade de soluções do problema de valor inicial, para o sistema de Navier-Stokes, no caso de um fluido viscoso incompressível. Tal problema foi estudado por S. Itô[1] que mostrou a existência e unicidade de soluções clássicas usando um método diferente do usado aqui. Kato e Fujita em [8] e [10] demonstram existência e unicidade do problema de Cauchy para o sistema de Navier-Stokes. O presente trabalho consiste de uma exposição autosuficiente dos resultados de Kato-Fujita.

No Capítulo I faz-se uma revisão rápida dos conceitos e resultados necessários para a dedução da equação:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho f + \operatorname{div} T$$

que descreve o movimento de um meio contínuo qualquer, onde ρ é a densidade, u é o campo de velocidades, f a força externa por unidade de massa e T o tensor de tensões. Ainda como revisão, encontram-se no Capítulo II as condições a serem impostas ao tensor de tensões T, a fim de que a equação descreva o movimento de

---

1 The existence and uniqueness of regular solution of non-stationary Navier-Stokes equation - J. Fac. Sc. Univ. Tokio - Sec I, 9 (103-140) (1961)

um fluido viscoso incompressível e chega-se ao sistema de equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \Delta u - \frac{1}{\rho} \nabla p + (u|\nabla)u + f$$

onde μ é um coeficiente de viscosidade.

No Capítulo III considera-se um fluido viscoso incompressível ocupando um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, limitado e conexo, e resolve-se no $L^2(\Omega)$ o sistema de Navier-Stokes, com condição homogênea na fronteira e valor inicial da velocidade conhecido, isto é, resolve-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nabla p - (u|\nabla)u + f && x \in \Omega \quad t > 0 \\
&\nabla \circ u = \operatorname{div} u = 0 && x \in \Omega \quad t > 0 \\
&u\big|_{\partial\Omega} = 0 && t > 0 \\
&u\big|_{t=0} = a(x) && x \in \Omega
\end{aligned}$$

Para isto constrói-se o espaço de Hilbert $H(\Omega)$ cujos elementos satisfazem a condição de fronteira do problema e possuem divergência nula. Isto pode ser feito devido ao fato de que dado um campo vetorial solenoidal $w(x)$ qualquer pode-se construir um outro campo solenoidal $u(x)$ tal que $u(x)$ assuma um valor dado na fronteira de Ω. Além disso, $L^2(\Omega)$ pode ser decomposto na soma direta de dois subespaços ortogonais $E(\Omega)$ e $G(\Omega)$ onde $E(\Omega)$ é o fecho, na norma do $L^2(\Omega)$, do conjunto das funções $u \in C_0^\infty(\Omega)$ com divergência nula e $G(\Omega)$ o fecho do conjunto das funções $v = \operatorname{grad} \varphi$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.

A construção de $H(\Omega)$ e a decomposição de $L^2(\Omega)$ estão no Apêndice 1. Existe uma projeção ortogonal P, definida em $L^2(\Omega)$, que projeta $L^2(\Omega)$ sobre $E(\Omega)$ paralelamente a $G(\Omega)$. Através da projeção P o sistema anterior se transforma em:

$$(*) \qquad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= P\Delta u - P(u|\nabla)u + Pf \\ u\big|_{t=0} &= a \end{aligned}$$

que é um problema de valor inicial, para uma equação diferencial em $L^2(\Omega)$.

A idéia básica para resolver este problema de valor inicial é transformá-lo numa equação integral abstrata e utilizar o método de aproximações sucessivas de Picard. Fazendo a extensão auto-adjunta a $E(\Omega)$ do operador $-P\Delta$ podemos escrever o problema de valor inicial anterior na forma:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -Au + Fu + Pf \\ u\big|_{t=0} &= a \end{aligned}$$

sendo A a extensão de Friedrichs de $-P\Delta$ e $Fu = -P(u|\nabla)u$. Como $-A$ gera um semigrupo contínua $S(t) = e^{-tA}$ transforma-se o problema de valor inicial (*) na equação integral abstrata seguinte:

$$(**) \quad u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t e^{-(t-s)A}\, Fu(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}\, Pf(s)ds$$

O problema reduz-se a mostrar que uma solução u da equação integral (**) é também solução do problema de valor inicial (*). Ainda no Capítulo III são apresentados, em forma de lemas, os resultados necessários para a construção da solução da equação integral, que faz-se no Capítulo IV, utilizando o método de aproximações sucessivas. Mostramos também a unicidade. Ainda no Capítulo IV deduzimos que a solução u da equação integral é diferenciável e é solução do problema de valor inicial.

Como conclusão, fazemos no Capítulo V uma breve consideração sobre a pressão p associada ao campo de velocidades u.

No Apêndice 1 está a decomposição de $L^2(\Omega)$ na soma direta de dois subespaços ortogonais $E(\Omega)$ e $G(\Omega)$ e no Apêndice 2 apresentamos a extensão auto-adjunta, a $E(\Omega)$, do operador $-P\Delta$.

No Apêndice 3 encontra-se um resumo da teoria dos semigrupos contínuos.

CAPÍTULO I

§1. Considerações Iniciais

O movimento de um fluido é representado matematicamente por uma função contínua do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^3$. No caso de uma única partícula, se fixado um sistema de eixos cartesianos, o seu movimento pode ser descrito dando suas coordenadas como funções do tempo:

$$x_1 = x_1(t) \qquad x_2 = x_2(t) \qquad x_3 = x_3(t) \tag{1,1}$$

Porém, se tivermos uma porção de fluido em movimento (gás, líquido ou sólido elástico) devemos ter um conjunto destas equações para cada partícula do meio. No entanto, cada partícula pode ser caracterizada por suas coordenadas em qualquer instante t dado, por exemplo, $t = t_o$. Assim, as equações das trajetórias das partículas podem ser englobadas num conjunto de três equações dependendo cada uma delas de três constantes:

$$x_1 = x_1(x_{01},x_{02},x_{03},t), \quad x_2 = x_2(x_{01},x_{02},x_{03},t)$$
$$x_3 = x_3(x_{01},x_{02},x_{03},t) \tag{1,2}$$

sendo $x_{0i} = x_i(t_o) \quad i = 1,2,3.$

Estas equações nos dão, no instante t, a posição da partícula que no instante $t = t_o$ estava no ponto x_o de coordenadas x_{01},x_{02},x_{03}.

Supõe-se que as funções que ocorrem nestas equações satisfazem certas condições de continuidade, podem ser resolvidas em relação a x_{0i}, $i = 1,2,3$ e x_i se reduz a x_{0i} quando $t = t_o$, isto é,

$$x_{0i} = x_i(x_{01},x_{02},x_{03},t_o) \quad i = 1,2,3 \tag{1,3}$$

As velocidades das partículas são vetores cujas componentes são as derivadas das coordenadas em relação ao tempo:

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} = x_i'(x_{01},x_{02},x_{03},t) \quad i=1,2,3 \tag{1,4}$$

Estas equações dão a velocidade de uma partícula do fluido em qualquer instante t em termos de sua posição no instante $t = t_o$. Porém, muitas vezes, o que queremos saber é a velocidade com a qual o fluido passa por um ponto dado do espaço num instante qualquer t. Para isto, teríamos de saber a localização, no instante $t = t_o$, da partícula que no instante t passa pelo ponto de coordenadas x_1, x_2, x_3. Basta então resolver as equações (1,2) em relação a x_{01}, x_{02}, x_{03} e substituí-las em (1,4) para obtermos:

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} = \phi_i(x_1, x_2, x_3, t) \qquad i=1,2,3. \tag{1,5}$$

§2. Definições e Notações

Suponhamos um fluido ocupando uma parte aberta Q do R^3, Ω um aberto limitado e conexo contido em Q e $\partial\Omega$, a fronteira de Ω, uma variedade de dimensão 2 e classe C^3. Um ponto x de Q será indicado por suas coordenadas $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Indicaremos por Q_T o conjunto $Q \times [0,T)$, $0 < T < \infty$, e um ponto genérico de Q_T será escrito (x,t). Deste modo, as expressões (2), (3), (4) e (5) do parágrafo anterior se escrevem respectivamente:

$$x_i = x_i(x_o, t) \tag{2)'$$

$$x_{oi} = x_i(x_o, t_o) \tag{3)'$$

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} = x_i'(x_o, t) \qquad i=1,2,3 \tag{4)'$$

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} = \phi_i(x, t) \tag{5)'$$

Consideremos a aplicação (2)', isto é,

$$\begin{aligned} x_i : Q_T = Q \times [0,T) &\to \mathbb{R} \\ (x_o, t) &\to x_i(x,t) \end{aligned} \tag{6)'$$

Vamos supor que x_i é de classe C^3 em Q_T e se $(x_o,t) \in Q_T$ o jacobiano da transformação (6)', $J\, x_i(x_o,t) \neq 0$ para todo $(x_o,t) \in Q_T$. Então, dado qualquer ponto $(x_o,t) \in Q_T$ existe uma vizinhança $B((x_o,t))$ de (x_o,t) (Q_T é aberto) tal que $B((x_o,t)) \subset Q_T$. Nestas condições, a restrição de x_i a $B((x_o,t))$ é biunívoca, existe a inversa de x_i em $B((x_o,t))$, sendo uma aplicação de classe C^3 definida na imagem de $B((x_o,t))$ por x_i; [5]

Sempre que empregarmos a palavra <u>volume</u> queremos significar a medida de Lebesgue de um aberto $\Omega \subset Q_T$. Pelo que foi dito antes fica entendido que o interior de Ω está inteiramente ocupado pelo fluido em estudo.

Vamos definir agora uma aplicação φ_t, biunívoca e sobre, tal que:

$$\varphi_t : t \to \Omega(t) \tag{2.1}$$

isto é, a aplicação φ_t associa a cada $t \in [0,T)$, $0 < T < \infty$, um aberto conexo limitado do $\mathbb{R}^3$, por exemplo, o interior de uma esfera de raio $r = r(t)$.

Em geral, quando t varia em $[0,T)$, o volume de $\Omega(t)$ $(\mu(\Omega(t)))$, não permanece constante. Vamos supor que no instante $t = 0$ o volume de $\Omega(0)$ seja $\mu(\Omega(0))$ e num instante t qualquer, $t > 0$, seja $\mu(\Omega(t))$.

Sabemos do Cálculo que vale a relação, $\mu(\Omega(t)) = |J|\mu(\Omega(0))$ sendo $J = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{ok}}\right)$ o jacobiano da transformação (6)' $(i,k = 1,2,3)$.

Nestas condições $J = J(t)$ é bem definida. Vamos calcular $\mathring{J} = \frac{dJ}{dt}$.[4]

Seja então $w(t)$ a matriz $(\frac{\partial x_i}{\partial x_{ok}})$ e w_{ik} um seu elemento. Teremos então $\frac{\partial w_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial x_i}{\partial x_{ok}}) = \frac{\partial}{\partial x_{ok}}(\frac{\partial x_i}{\partial t}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_{ok}}$, e

$$\frac{\partial w_{ik}}{\partial t} = \mathring{w}_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{ok}} \tag{2.2}$$

A expressão anterior pode ser escrita como:

$$\frac{\partial w_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{ok}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_{ok}} \qquad j=1,2,3 \tag{2.3}$$

Assim,

$$\frac{dw(t)}{dt} = (\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_{ok}}) \tag{2.4}$$

Chamando $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = a_{ij}$ e $w_{jk} = \frac{\partial x_j}{\partial x_{ok}}$ vemos que (2.4) pode ser escrita como produto das matrizes $a(t) = (a_{ij})$ e $w(t) = (w_{jk})$ e

$$\frac{dw(t)}{dt} = a(t)w(t) \tag{2.5}$$

com

$$(\frac{dw(t)}{dt})_{ik} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}w_{jk} \tag{2.6}$$

Teremos então de $J = \det(\frac{\partial x_i}{\partial x_{ok}})$ que $J = \det w(t)$ e $\mathring{J} = \frac{d}{dt}(\det w(t))$.

Mas,

$$\mathring{J} = \begin{vmatrix} \mathring{w}_{11} & \mathring{w}_{12} & \mathring{w}_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{vmatrix} + \mathring{w}_{2\alpha} + \mathring{w}_{3\alpha} \tag{2.7}$$

onde estamos indicando por $\mathring{w}_{i\alpha}$ um determinante semelhante ao primeiro em que a i-gésima linha foi derivada em relação ao tempo. Considerando a relação (2.6) e usando propriedades elementares da teoria dos determinantes, o primeiro determinante de (2.7) pode ser escrito na forma a_{11} det w. Procedendo do mesmo modo com os outros dois determinantes obteremos:

$$\frac{dJ}{dt} = a_{11}\ \det w + a_{22}\ \det w + a_{33}\ \det w = \det w \sum_{i=1}^{3} a_{ii}$$

Lembrando que $a_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ e que $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\, u$, vem finalmente que:

$$\frac{dJ}{dt} = \det w \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = J\ \mathrm{div}\ u \qquad (2.8)$$

Considerando as expressões (3') e (6') concluimos facilmente que $J(t_o) = 1$ (vide observação).

Assim, se o fluido se move sem que haja variação de volume conclui-se que $\mathrm{div}\ u = 0$ e neste caso o flúido é dito incompressível. É claro que o fato de $\frac{dJ}{dt}$ ser nulo não implica que uma seção transversal de $\Omega(t)$ seja constante quando t varia. De fato, $\partial\Omega(t)$, a fronteira de $\Omega(t)$ pode pulsar desde que sujeita à restrição de que o volume de $\Omega(t)$ seja constante.

<u>Observação</u>: De $\frac{dJ}{dt} = J\ \mathrm{div}\ u$ obtemos, fazendo $\mathrm{div}\ u = \alpha(t)$ que:

$$\frac{dJ}{dt} = \alpha(t) J$$

e daí que:

$$J(t) = J(t_o)\ e^{\int_{t_o}^{t} \alpha(s) ds} \qquad 0 \le t_o < t < T$$

Como

$$J(t_o) = \frac{\partial(x_{o1},x_{o2},x_{o3})}{\partial(x_{o1},x_{o2},x_{o3})} = 1 \quad \text{por} \quad (3')$$

vem

$$J(t) = e^{\int_{t_o}^{t} \alpha(s)ds}$$

ou seja

$$0 < J(t) < \infty, \quad t \in [0,T] \quad 0 < T < \infty \qquad (2.10)'$$

Consideremos no $\mathbb{R}^3$ uma base ortonormal de vetores $\{e_1,e_2,e_3\}$ e um produto escalar $(\cdot|\cdot)$ definido por $(u|v) = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$ se $u,v \in \mathbb{R}^3$. Seja o operador diferencial ∇ definido em $B = \{f;\ f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f \in C^2(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^3\}$ e com valores no R^3 dado por $\nabla \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} e_i$.

Seja $F \in C^3(Q_T)$, uma função real (ou vetorial) definida em Q_T que descreve uma propriedade qualquer do fluido. Então, F como função de t está bem definida e podemos estudar o comportamento da propriedade representada por F quando t varia. Vamos supor inicialmente que F é uma aplicação numérica.

Neste caso teremos:

$$\begin{aligned} F:\ Q \times [0,T] &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\to F(x,t) \end{aligned} \qquad (2.11)$$

A variação da F com relação a t é dada por:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (2.12)'$$

ou

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial t} = (u|\nabla F) + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (2.12)$$

onde ∇ e $(\cdot|\cdot)$ são os definidos anteriormente. Se F for uma função vetorial em (2.12) escreveremos:

$$\frac{dF}{dt} = (u|\nabla)F + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{2.13}$$

Se o fluido em questão for não homogêneo e não estacionário, isto é, se suas propriedades variam ponto a ponto no R^3 e com o tempo e se em (2.13) F representar, por exemplo, o campo velocidades, então:

$$a = \frac{du}{dt} = (u|\nabla)u + \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.14}$$

e esta expressão nos diz que a aceleração do fluido é a soma de duas contribuições: uma é conseqüência do caráter não estacionário do movimento e é dada por $\frac{\partial u}{\partial t}$ e a outra dada por $(u|\nabla)u$ é decorrente do fato de o fluido não ser homogêneo e a velocidade variar ponto a ponto no mesmo instante t.

§3. Um Teorema de Transporte

Seja $\Omega(t)$ um aberto conexo limitado que se move com o fluido e vamos supor que $\Omega(t)$ é, em qualquer instante t ($t \in [0,T)$), sempre constituido das mesmas partículas. No que segue, para facilidade de notação, vamos indicar o volume de $\Omega(t)$, $\mu(\Omega(t))$, por $V(t)$ ou V e a área da superfície de $\partial\Omega(t)$ por $S(t)$ ou S, lembrando sempre que $\Omega(t)$ está nas condições de (2.1).

Nestas condições a integral $\int_\Omega F\,dV$, F de acordo com

(2.11), é uma função bem definida do tempo, e podemos então calcular $\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} F dV$. Vamos mostrar inicialmente que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} F dV = \int_{\Omega(t)} (\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} u) dV.$$

Lembrando as condições da definição de (2.1) e usando (2.8), (2.12) podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} F(x,t) dV = \frac{d}{dt}\int_{\Omega(0)} F(x_o,t)\; J(t) dV =$$

$$= \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt}(F(x_o,t)J(t)) dV = \int_{\Omega(0)} [J(t)\; \frac{dF}{dt} + F\; \frac{dJ(t)}{dt}] dV =$$

$$= \int_{\Omega(0)} [J(t)\; \frac{dF}{dt} + F\; J(t) \operatorname{div} u] dV = \int_{\Omega(0)} [\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} u] J(t) dV =$$

$$= \int_{\Omega(t)} (\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} u) dV(t)$$

e obtemos:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} F(x,t)\; dV(t) = \int_{\Omega(t)} [\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} u] dV(t) \qquad (3.1)$$

Usando agora a relação:

$$\operatorname{div}(Fu) = F \operatorname{div} u + (u|\nabla F) \qquad (3.2)$$

(F função numérica) o integrando do segundo membro de (3.1) pode ser modificado da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} F(x,t) dV(t) = \int_{\Omega(t)} [\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} u] dV(t) =$$

$$= \int_{\Omega(t)} \operatorname{div}\,(Fu)\; dV(t) + \int_{\Omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t}\; dV(t),$$

onde usamos a relação $\frac{dF}{dt} = (u|\nabla F) + \frac{\partial F}{\partial t}$.

Empregando o teorema de Gauss podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} F(x,t)\; dV(t) = \int_{\partial\Omega(t)} F(u|\nu)dS(t) + \int_{\Omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t}\, dV(t) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega(t)} F\; dV(t) + \int_{\partial\Omega(t)} F(u|\nu)dS(t)$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} F(x,t)dV(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega(t)} F(x,t)dV(t) + \int_{\partial\Omega(t)} F(u|\nu)dS(t) \qquad (3.3)$$

sendo a derivação, no primeiro termo do segundo membro, realizada num instante t fixo, e ν um unitário normal externo à $\partial\Omega(t)$. A relação obtida em (3.3) nos diz que a taxa de variação temporal de F em $\Omega(t)$ é igual à taxa de variação, no tempo, de F em um Ω fixo, coincidindo instantaneamente com $\Omega(t)$, t fixo, mais o fluxo de F através da fronteira $\partial\Omega(t)$ que limita $\Omega(t)$.

§4. A Equação da Continuidade

Ao estudarmos o movimento de fluidos, uma lei de conservação importante, entre outras, é a da conservação da massa. Vamos supor como na seção anterior que $\Omega(t)$ seja sempre constituído das mesmas partículas e se move com o fluido. Seja ρ uma função numérica definida em Q_T, $\rho \in C^1(Q_T)$, com as dimensões físicas de massa por unidade de volume. Assim, a massa de fluido contido num $\Omega(t)$ é dada por $M(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(x,t)dV$ sendo uma função bem definida do tempo. A afirmação de que a massa de fluido contida em $\Omega(t)$ é constante equivale matematicamente à expressão $\frac{dM(t)}{dt} = 0$. Teremos então:

$$0 = \frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho(x,t)dV.$$

Mas:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho(x,t)dV = \frac{d}{dt}\int_{\Omega(0)} \rho(x_o,t)\ J(t)dV =$$

$$= \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt}(\rho(x_o,t)J(t))dV = \int_{\Omega(0)} (\frac{d\rho}{dt}\ J + \rho\ J\ \mathrm{div}u)dV =$$

$$= \int_{\Omega(0)} (\frac{d\rho}{dt} + \rho\ \mathrm{div}u)J(t)\ dV = \int_{\Omega(t)} (\frac{d\rho}{dt} + \rho\ \mathrm{div}u)dV.$$

Logo:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_{\Omega(t)} (\frac{d\rho}{dt} + \rho\ \mathrm{div}u)dV = 0 \qquad (4.1)$$

Como o integrando em (4.1) é contínuo e portanto limitado no fecho de $\Omega(t)$ e $t \in [0,T)$ é qualquer podemos concluir que a relação (4.1) implica que:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\ \mathrm{div}u = 0 \qquad (4.2)$$

que é a equação de continuidade para um fluido de densidade ρ e é uma condição necessária e suficiente para que a massa, contida em um $\Omega(t)$ que se move com o fluido, permaneça constante durante o movimento.

Usando (2.12), (3.2) a equação de continuidade pode ser escrita do seguinte modo:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\ \mathrm{div}u = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (u|\nabla\rho) + \rho\ \mathrm{div}u =$$

$$= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u)$$

e

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\ \mathrm{div}u = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0 \qquad (4.3)$$

<u>Observação</u>: Vamos obter agora, visando aplicações posteriores, uma relação importante válida para uma função $F \in C^1(Q_T)$ numérica ou vetorial. Se F satisfaz estas condições e ρ é a função densidade definida anteriormente consideremos a função ψ dada por:

$$\psi(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(x,t)\; F(x,t)dV \tag{4.4}$$

Podemos então calcular a derivada da $\psi(t)$ em relação ao tempo. Teremos:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho\; F\; dV = \frac{d}{dt}\int_{\Omega(0)} \rho\; F\; J\; dV = \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt}\;(\rho\; F\; J)dV =$$

$$= \int_{\Omega(0)} (\frac{d}{dt}\;(\rho F)J + \rho F J\; \mathrm{divu})dV = \int_{\Omega(0)} (\frac{d}{dt}\;(\rho F) + \rho F\; \mathrm{divu})JdV =$$

$$= \int_{\Omega(t)} (\frac{d}{dt}(\rho F) + \rho F\; \mathrm{divu})dV.$$

O integrando do último termo escreve-se:

$$\frac{d}{dt}(\rho F) + \rho F\; \mathrm{divu} = \frac{d\rho}{dt}\; F + \rho\; \frac{dF}{dt} + \rho F\; \mathrm{divu} =$$

$$= \rho\; \frac{dF}{dt} + F(\frac{d\rho}{dt} + \rho\; \mathrm{divu}) = \rho\; \frac{dF}{dt}$$

em virtude de (4.2). Obtemos finalmente:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho\; F\; dV = \int_{\Omega(t)} \rho\; \frac{dF}{dt}\; dV \tag{4.5}$$

§5. Considerações Dinâmicas

Até agora obtivemos relações entre funções que representam propriedades cinemáticas do fluido em movimento. A seguir consideraremos a dinâmica do fluido que se move, isto é, vamos encontrar relações que governam a ação de forças, externas e internas, sobre o fluido. Seja então um fluido, em movimento descrito por um campo de velocidades $u = u(x,t)$, $\Omega(t)$ um aberto nas condições de (2.1) que se move com o fluido, $\Omega(t)$ e $\partial\Omega(t)$ sempre constituidos das mesmas partículas.

Nestas condições $\Omega(t)$ está sujeito à ação de forças externas e internas que modificam seu movimento. Aqui, por forças externas queremos significar aquelas que dependem da quantidade de massa ou do volume vezes a densidade do fluido. São forças que agem em todo elemento de massa do fluido e são transmitidas sem necessidade de contato físico entre o meio em consideração e o que causa a presença da força. São geralmente chamadas de "body forces". São forças deste tipo, por exemplo, as gravitacionais e magnéticas. Também $\Omega(t)$ está sob a ação de forças que agem na superfície que limita $\Omega(t)$ e dependem de contato físico entre o meio que causa a força e o meio onde ela é transmitida. A estas chamaremos forças internas.

Vamos representar por $f = f(x,t)$, definida em Q_T, a força externa por unidade de massa e por $\sigma = \sigma(x,t,\nu)$ a distribuição de tensões (força por unidade de área) em $\partial\Omega(t)$ exercida pelo fluido exterior a $\Omega(t)$. $\sigma = \sigma(x,t,\nu)$ depende em cada instante t, da normal externa a $\partial\Omega(t)$, $\nu = \nu(x,t)$. Vamos supor ainda que tanto $f = f(x,t)$ como $\sigma = \sigma(x,t,\nu)$ são contínuas e integráveis, no sentido de Lebesgue, em $\Omega(t)$ e $\partial\Omega(t)$. Assim, podemos escrever que a força total que age em $\Omega(t)$ é dada por:

$$\int_{\Omega(t)} \rho f \; dV + \int_{\partial\Omega(t)} \sigma dS \tag{5.1}$$

A quantidade de movimento linear total do fluido contido em $\Omega(t)$ é dada por:

$$\int_{\Omega(t)} \rho u \; dV \tag{5.2}$$

e pela segunda lei de Newton podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho u \; dV = \int_{\Omega(t)} \rho f \; dV + \int_{\partial\Omega} \sigma dS \tag{5.3}$$

A relação (5.3) nos diz que a variação, no tempo, da quantidade de movimento do fluido contido em $\Omega(t)$ é igual à força resultante que age em $\Omega(t)$.

Usando a (4.5) podemos escrever a (5.3) na forma:

$$\int_{\Omega(t)} \rho \frac{du}{dt} \; dV = \int_{\Omega(t)} \rho f \; dV + \int_{\partial\Omega(t)} \sigma dS \tag{5.4}$$

Suponhamos que o volume de $\Omega(t)$, num instante t, fixo, seja equivalente ao volume de um cubo de lado ℓ, isto é, $\mu(\Omega(t)) = \ell^3$.

Dividindo ambos os membros de (5.4) por ℓ^2 obtemos:

$$\frac{1}{\ell^2}\int_{\Omega(t)} \rho \frac{du}{dt} \; dV - \frac{1}{\ell^2}\int_{\Omega(t)} \rho f \; dV = \frac{1}{\ell^2}\int_{\partial\Omega(t)} \sigma(x,t,\nu) dS \tag{5.5}$$

Vamos tomar o limite de (5.5) quando $\mu(\Omega(t)) \to 0$ lembrando que os integrandos são funções limitadas em $\overline{\Omega(t)}$ e que as integrais em (5.5) existem.

Teremos: [15]

$$\lim_{\mu(\Omega(t))\to 0} \frac{1}{\ell^2} \int_{\Omega(t)} \sigma \, dS =$$

$$\lim_{\mu(\Omega(t))\to 0} \frac{1}{\ell^2} \int_{\Omega(t)} \rho \frac{du}{dt} \, dV - \lim_{\mu(\Omega(t))} \frac{1}{\ell^2} \int_{\Omega(t)} \rho f \, dV.$$

Porém,

$$\lim_{\mu(\Omega(t))\to 0} \left| \frac{1}{\ell^2} \int_{\partial\Omega(t)} \sigma dS \right| \leq \lim_{\mu(\Omega(t))\to 0} \left| \frac{1}{\ell^2} \int_{\Omega(t)} \rho \frac{du}{dt} \, dV \right| +$$

$$+ \lim_{\mu(\Omega(t))\to 0} \left| \frac{1}{\ell^2} \int_{\Omega(t)} \rho f \, dV \right| \leq \lim_{\mu(\Omega(t))\to 0} \frac{1}{\ell^2} \int_{\Omega(t)} \left| \rho \frac{du}{dt} \right| dV +$$

$$+ \lim_{\mu(\Omega(t))\to 0} \frac{1}{\ell^2} \int_{\Omega(t)} |\rho f| \, dV \leq \lim_{\mu(\Omega(t))\to 0} \frac{M}{\ell^2} \int_{\Omega(t)} dV +$$

$$+ \lim_{\mu(\Omega(t))\to 0} \frac{N}{\ell^2} \int_{\Omega} dV$$

onde

$$M = \sup_{(x,t)\in\bar{\Omega}(t)} \left| \rho \frac{du}{dt} \right| \quad \text{e} \quad N = \sup_{(x,t)\in\bar{\Omega}(t)} |\rho f|.$$

Mas, $\int_{\Omega(t)} dV = \mu(\Omega(t)) = \ell^3$ por hipótese.

Logo:

$$\lim_{\mu(\Omega(t))\to 0} \left| \frac{1}{\ell^2} \int_{\partial\Omega(t)} \sigma dS \right| \leq \lim_{\ell\to 0} M\ell + \lim_{\ell\to 0} N\ell = 0$$

ou seja:

$$\lim_{\mu(\Omega(t))\to 0} \left| \frac{1}{\ell^2} \int_{\partial\Omega(t)} \sigma dS \right| = 0$$

o que implica em:

$$\lim_{\mu(\Omega(t))\to 0} \frac{1}{\ell^2} \int_{\partial\Omega(t)} \sigma dS = 0 \tag{5.6}$$

Consideremos agora em $Q_T = Q \times [0,T)$, $0 < T < \infty$, um tetraedro regular com vértice num ponto arbitrário $x \in Q$ e com três de suas faces perpendiculares aos eixos coordenados como mostra a figura.

Sejam ν_j e S_j a normal unitária externa e a área da face perpendicular ao eixo x_j.

Seja ainda S a área da face inclinada e n sua normal unitária externa. Teremos, então, de acordo com estas convenções que a normal ν_j à face cuja área é S_j é dada por $\nu_j = -e_j$ sendo e_j um elemento de uma base ortonormal do R^3 e ainda que

$$S_j = n_j S \quad \text{onde} \quad n = \sum_{i=1}^{3} n_i e_i.$$

Vamos aplicar a equação (5.6) ao tetraedro considerado, lembrando que $\sigma = \sigma(x,t,\nu)$ é uma função vetorial contínua que depende do ponto (x,t) e da normal ν à uma superfície que passa por $x \in Q$.

Teremos, então, indicando a superfície que limita o tetraedro, por S_T e as superfícies de suas faces pelas mesmas letras que usamos para indicar suas áreas, que:

$$\int_{S_T} \sigma(x,t,\nu)dS_T = \int_{S_1} \sigma(\xi_1,t,-e_1)dS_1 + \int_{S_2} \sigma(\xi_2,t,-e_2)dS_2 + \\ + \int_{S_3} \sigma(\xi_3,t,-e_3)dS_3 + \int_{S} \sigma(\xi,t,n)dS$$

onde ξ_i e ξ são pontos em S_i e S respectivamente. $(i=1,2,3)$.

As integrais do segundo membro existem e seus integrandos são funções contínuas e limitadas. Usando o teorema do valor médio podemos escrever a expressão anterior como:

$$\int_{S_T} \sigma(x,t,\nu)dS_T = \sum_{j=1}^{3} \sigma(\bar{\xi}_j,t,-e_j)S_j + \sigma(\bar{\xi},t,n)S \qquad (5.7)$$

sendo $\bar{\xi}_j$, $\bar{\xi}$ pontos de S_j e S respectivamente. Como foi visto antes $S_j = n_j S$ e a (5.7) fica:

$$\int_{S_T} \sigma(x,t,\nu)dS_T = \\ = S[\sigma(\bar{\xi}_1,t,-e_1)n_1 + \sigma(\bar{\xi}_2,t,-e_2)n_2 + \sigma(\bar{\xi}_3,t,-e_3)n_3 + \sigma(\bar{\xi},t,n)].$$

Podemos supor que o volume do tetraedro seja igual ao volume de um cubo de lado igual a ℓ. Assim, a área S da face inclinada do tetraedro pode se tornar igual à área de uma das faces do cubo, isto é, $S = \ell^2$. Esta relação ocorre quando h_T, a altura do tetraedro, é igual a 3ℓ.

Supondo que $S = \ell^2$, a expressão anterior fica:

$$\frac{1}{\ell^2}\int_{S_T} \sigma(x,t,\nu)dS_T = \\ = [\sigma(\bar{\xi}^1,t,-e_1) + \sigma(\bar{\xi}^2,t,-e_2) + \sigma(\bar{\xi}^3,t,-e_3) + \sigma(\bar{\xi},t,n)] \qquad (5.8)$$

Mantendo fixo o vértice do tetraedro no ponto x e tomando em (5.8) o limite quando o volume tende a zero e observando que os pontos $\bar{\xi}_j$, $\bar{\xi}$, $j=1,2,3$, tendem para o ponto x obteremos, usando o resultado (5.6), o seguinte:

$$0 = \lim_{V_T \to 0} \frac{1}{\ell^2} \int_{S_T} \sigma(x,t,\nu)\, dS_T = \sum_{j=1}^{3} \sigma(x,t,-e_j) n_j + \sigma(x,t,n) \tag{5.9}$$

ou seja:

$$\sigma(x,t,n) = -n^1\, \sigma(x,t,-e_1) - n^2\, \sigma(x,t,-e_2) - n^3\, \sigma(x,t,-e_3) \tag{5.10}$$

Se $n = e_i$ $i=1,2,3$ obtemos que:

$$\sigma(x,t,e_i) = -\sigma(x,t,-e_i) \quad i=1,2,3 \tag{5.11}$$

Aplicando o argumento do tetraedro aos outros octantes e usando (5.11) a (5.10) fica:

$$\sigma(x,t,n) = n^1\, \sigma(x,t,e_1) + n^2\, \sigma(x,t,e_2) + n^3\, \sigma(x,t,e_3) \tag{5.12}$$

$\sigma(x,t,n)$ é, portanto, expresso como função linear das componentes de n, isto é:

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{3} n^j T_{ji}, \qquad T_{ji} = T_{ji}(x,t) \tag{5.13}$$

A matriz dos coeficientes T_{ji} $(i,j = 1,2,3)$ representa um tensor de segunda ordem chamado tensor de tensões que será indicado por T, sendo $\sigma = n \circ T$ ou seja, o vetor σ é igual ao produto escalar de n por T.

Cada componente T_{ij} é a j-ésima componente da força que age num elemento de superfície com normal externa na direção de e_i, $i=1,2,3$. Substituindo $\sigma = n \circ T$ na relação (5.4) temos:

$$\int_{\Omega(t)} \rho \frac{du}{dt}\, dV = \int_{\Omega(t)} \rho f\, dV + \int_{\partial\Omega(t)} (n \circ T) dS \tag{5.14}$$

Aplicando o teorema de Gauss ao último termo da (5.14) vem:

$$\int_{\Omega(t)} (\rho \frac{du}{dt} - \rho f - \text{div } T) dV = 0 \tag{5.15}$$

Sendo o integrando uma função contínua e logo limitada em $\overline{\Omega(t)}$ e $t \in [0,T)$ qualquer podemos concluir de (5.15) que:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho f + \text{div } T \tag{5,16}$$

onde ρ é a densidade do fluido, u é o campo de velocidades, f é a força externa por unidade de massa do fluido e T o tensor de tensões.

A equação (5.16) é a equação de movimento de um fluido qualquer, e na verdade, a equação de movimento de qualquer meio contínuo.

A seguir vamos ver as condições sobre T a fim de que (5.16) represente a equação de movimento de um fluido viscoso incompressível.

CAPÍTULO II

§6. Fluido de Stokes

Vimos que a equação que governa o movimento de um fluido qualquer depende do tensor de tensões T. É o tensor T que caracteriza o tipo de fluido caracterizando a resposta do fluido sob ação de forças externas e internas.

Como nosso objetivo é chegar às equações de Navier-Stokes, estudaremos a seguir as propriedades dos fluidos aos quais estas equações se aplicam.

Inicialmente, vamos supor que o tensor T seja simétrico, isto é, $T_{ij} = T_{ji}$. Isto equivale a dizer que o fluido em consideração é não polar [16] [1] e que o momento angular se conserva, pois, se o fluido é não polar pode se fazer a hipótese de que há conservação do momento angular e mostra-se que isto acontecendo, então T é simétrico. [1] [16].

Vamos supor também que o fluido não é perfeito, ou seja, possui viscosidade.

O fenômeno da viscosidade num fluido decorre do fato de haver fricções internas, isto é, diferentes partes do fluido se movem com velocidades distintas. Se há um movimento relativo entre as partículas, um aberto Ω, que se move com o fluido e sempre constituido das mesmas partículas, se deforma continuamente durante o movimento. Esta deformação é descrita por um tensor simétrico, de segunda ordem, definido por:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad i,j = 1,2,3 \tag{6.0}$$

Geometricamente, as componentes D_{ii} representam dilatações ou contrações na direção do eixo x_i de um sistema de coordenadas ortogonais $[x_1,x_2,x_3]$ e D_{ij}, $i \neq j$, é igual a $-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\theta_{ij}(t)$ onde $\theta_{ij}(t)$ é um ângulo tal que, no instante $t = 0$, $\theta_{ij}(0)$ é o ângulo formado por segmentos paralelos aos eixos x_i e x_j. [1]

Diremos que um fluido é um "Fluido de Stokes" se satisfizer as seguintes propriedades: [16]

a) O tensor T é uma função contínua do tensor deformação D (e do estado termodinâmico local), mas é independente das outras variáveis cinemáticas.

b) O fluido é homogêneo, isto é, T_{ij} não dependem explicitamente da variável espacial x.

c) O fluido é isotrópico, isto é, não existe direção privilegiada no fluido.

d) Quando não existir deformação, $D_{ij} = 0$, então a tensão T_{ij} é hidrostática, ou seja, $T_{ij} = -p\,\delta_{ij}$.

As condições a) e b) nos dizem que T_{ij} é da forma $T_{ij} = f_{ij}(D_{pq})$. Se efetuarmos uma rotação no sistema de coordenadas passando de $[x_1,x_2,x_3]$ a $[\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3]$ então a condição c) implica que se $T_{ij} = f_{ij}(D_{pq})$ em $[x_1,x_2,x_3]$ então $\bar{T}_{ij} = f_{ij}(\bar{D}_{pq})$ em $[\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3]$.

O tensor de tensões T de um fluido viscoso pode ser escrito como:

$$T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + P_{ij} \tag{6.1}$$

onde P_{ij} é a parte de T_{ij} que decorre do fato do fluido possuir viscosidade. A quarta condição diz, então, que $P_{ij} = T_{ij} + p\,\delta_{ij}$ são identicamente nulas quando não houver movimento relativo entre diferentes partes do fluido.

Seja agora uma rotação do sistema de coordenadas de um ângulo θ qualquer, $0 < \theta \leq 2\pi$.

As componentes dos tensores T e D se transformam como:

$$\bar{T}_{ij} = a_{mi}\, a_{nj}\, T_{mn} \quad \text{e} \quad \bar{D}_{pq} = a_{rp}\, a_{sq}\, D_{rs} \tag{6.2)'}$$

Como a condição c) implica que $\bar{T}_{ij} = f_{ij}(\bar{D}_{pq})$ teremos:

$$a_{mi}\, a_{nj}\, f_{mn}\,(D_{pq}) = f_{ij}(a_{rp}\, a_{sq}\, D_{rs}) \tag{6.2}$$

Se um tensor A, de segunda ordem, é simétrico então sabemos que existe um sistema de coordenadas no qual A é representado por uma matriz diagonal. Os elementos da diagonal são chamados valores próprios ou valores principais de A enquanto que os eixos coordenados do sistema, onde A é diagonal, são denominados eixos próprios ou eixos principais. Vamos supor então que depois de efetuada a rotação, acima mencionada, o sistema de coordenadas coincida com os eixos principais de D_{ij}. Podemos tomar então $D_{ii} = d_i$, $i=1,2,3$ e $D_{ij} = 0$ $i \neq j$. Assim, f_{mn} em (6.2) é uma função de d_1, d_2, d_3, os valores próprios de D. Suponhamos agora que a rotação seja representada pela matriz $L = (a_{ij})$ onde

$a_{22} = a_{33} = -1$ $a_{11} = 1$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Observamos que neste caso ocorre que:

$$\bar{D}_{ii} = D_{ii} = di \quad \text{onde} \quad \bar{D} = L^t DL \quad (L^t = L)$$

Porém, em (6.2), $f_{13} = a_{m1}\, a_{n3} = -f_{13}$ o que implica $f_{13} = 0$. Do mesmo modo, $f_{12} = f_{21} = f_{31} = 0$.

Supondo outra rotação $L' = (a'_{ij})$ com $a'_{11} = a'_{22} = -1$, $a_{33} = 1$ e $a'_{ij} = 0$ $i \neq j$ obtemos que $f_{23} = f_{32} = 0$.

Assim, no sistema de eixos principais do tensor deformação D o tensor de tensões T também é representado na forma diagonal e portanto possui os mesmos eixos principais. Logo, podemos escrever:

$$D_{ij} = p_j\, \delta_{ji} \quad \text{e} \quad p_i = f_i(d_1,d_2,d_3) \qquad (6.3)$$

sendo que pela condição c) p_i deve ser nulo quando d_i o for. Resta agora saber qual a forma mais geral da expressão $p_i = f_i(d_1,d_2,d_3)$. Uma vez que uma permutação de d_1,d_2,d_3 em D_{ii} pode ser efetuada por uma transformação ortogonal, esta permutação, quando efetuada, deve permutar da mesma maneira as funções f_i em (6.3). Por exemplo: o tensor deformação diagonalizado (d_1,d_2,d_3) é transformado em (d_3,d_1,d_2) por meio da transformação $L = (a_{ij})$ com $a_{12} = a_{23} = a_{31} = 1$ e demais elementos nulos. Admitindo-se que os d_i são todos distintos então existem α, β, γ tais que:

$$p_i = \alpha + \beta\, d_i + \gamma\, d_i^2, \quad i=1,2,3 \qquad (6.4)$$

onde α, β, γ podem ser funções de I_1,I_2,I_3, os invariantes de D, uma vez que I_1,I_2,I_3 não são afetados por permutações. Qualquer d_i^n, $n > 2$, pode ser escrito como combinação linear de d_i e d_i^2 sendo os coeficientes, destas combinações, funções dos invariantes de D [16]. Com a hipótese já feita anteriormente de que $d_1 \neq d_2 \neq d_3$, podemos determinar α, β, γ em (6.4). Se dois dos d_i forem iguais então $p_i = \alpha + \beta\, d_i$. Finalmente, se tivermos $d_1 = d_2 = d_3$ então $p_i = \alpha$ onde como foi dito acima, $\alpha = \alpha(I_1, I_2, I_3)$.

Concluimos então que quaisquer que sejam os d_i, distintos, dois iguais ou todos iguais, p_i é expresso por (6.4). Passando agora para um outro sistema de eixos cartesianos ortogonais qualquer e lembrando que, devido à condição c) os α, β, γ devem permanecer os mesmos, teremos:

$$P_{ij} = \alpha\, \delta_{ij} + \beta\, D_{ij} + \gamma\, D_{ik}\, D_{kj} \qquad (6.5)$$

ou, como $P_{ij} = T_{ij} + p\, \delta_{ij}$:

$$T_{ij} = (-p+\alpha)\delta_{ij} + \beta\, D_{ij} + \gamma\, D_{ik}\, D_{kj} \qquad (6.6)$$

§7. Fluidos Newtonianos

Diz-se que um fluido é Newtoniano se é um fluido de Stokes e se as componentes do tensor de tensões dependem linearmente das componentes do tensor deformação, isto é,

$$T_{ij} = -p\, \delta_{ij} + \beta\, D_{ij}.$$

Lembrando que $P_{ij} = T_{ij} + p\, \delta_{ij}$ deve ser nulo quando $D_{ij} = 0$ pela condição d), teremos no sistema de eixos principais de D que:

$$P_{ii} = p_i = a_{ij}\ d_j \tag{7.1}$$

Porém, a hipótese de isotropia implica que qualquer permutação nos d_i acarreta a mesma permutação nos p_i. Escrevendo o sistema (7.1) por extenso, temos:

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11}\ d_1 + a_{12}\ d_2 + a_{13}\ d_3 \\ p_2 &= a_{21}\ d_1 + a_{22}\ d_2 + a_{23}\ d_3 \\ p_3 &= a_{31}\ d_1 + a_{32}\ d_2 + a_{33}\ d_3 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Efetuando em (7.2) a permutação $(d_1,d_2,d_3) \to (d_3,d_1,d_2)$ e depois $(d_3,d_1,d_2) \to (d_2,d_3,d_1)$ e comparando os resultados obtidos, com (7.2) concluimos que:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}$$
$$a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{31} = a_{13}$$

Fazendo $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda$ e $a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{31} = a_{13} = \lambda + 2\mu$ onde λ e μ são números reais, podemos escrever:

$$P_{ii} = p_i = \lambda(d_1 + d_2 + d_3) + 2\mu\ d_i$$

ou

$$P_{ii} = p_i = \lambda\theta + 2\mu\ d_i \tag{7.3}$$

Passando para um outro sistema de coordenadas cartesianas ortogonais qualquer, obtemos:

$$P_{ij} = \lambda\theta\ \delta_{ij} + 2\mu\ D_{ij}$$

ou

$$T_{ij} = (-p + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu\ D_{ij} \tag{7.4}$$

sendo que λ e μ serão posteriormente interpretados como coeficientes de viscosidade do fluido e onde θ = traço de $D = \sum_{i}^{3} D_{ii}$.

§8. Equações de Navier-Stokes para Fluidos Incompressíveis

Se estamos estudando um fluido que é um "Fluido Newtoniano" então o tensor de tensões T para este fluido é dado por (7.4) ou seja:

$$T_{ij} = (-p + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu\, D_{ij}$$

Substituindo esta expressão para T_{ij} na equação de movimento (5.16) que é $\rho \frac{du}{dt} = \rho f + \operatorname{div} T$ temos:

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \tag{8.1}$$

Porém, de (7.4) obtemos:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j}\delta_{ij} + 2\mu \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} \tag{8.2}$$

e usando (6.1) vem:

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_j}\right) \tag{8.3}$$

Substituindo (8.3) em (8.2) e depois (8.2) em (8.1) tem-se:

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j}\delta_{ij} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) \tag{8.4}$$

ou

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)$$

ou ainda:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho f - \nabla p + (\lambda + \mu)\nabla \circ u + \mu \Delta u \tag{8.5}$$

As equações (8.5) são as Equações de Navier-Stokes para um fluido viscoso, de Stokes-Newton.

Se, além disto, o fluido for incompressível, isto é, se $\nabla \circ u = \text{div } u = 0$ então a (8.5) fica:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho f - \nabla p + \mu \Delta u \tag{8.6}$$

Lembrando que $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u|\nabla)u$ a (8.6) se transforma em:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \Delta u - \frac{1}{\rho} \nabla p - (u|\nabla)u + f \tag{8.7}$$

que é a equação procurada.

CAPÍTULO III

§9. Problema do Valor Inicial para as equações de Navier-Stokes

Vamos agora estudar a questão de existência e unicidade de soluções para as equações de Navier-Stokes dadas por (8.7). Podemos fazer, sem perda de generalidade, $\rho = 1$ e $\mu = 1$. Seja então o seguinte sistema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nabla p - (u|\nabla)u + f \qquad x \in \Omega, \quad t > 0 \tag{9.1}$$

$$\nabla \circ u = \operatorname{div} u = 0 \qquad x \in \Omega, \quad t > 0 \tag{9.2}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad t > 0 \tag{9.3}$$

$$u\Big|_{t=0} = a(x) \qquad x \in \Omega \tag{9.4}$$

Para recordar a notação, estamos indicando por $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^3, $u\colon \Omega \times [0,T] = Q_T \to (L^2(Q_T))^3$ é o campo de velocidades, $p\colon Q_T \to \mathbb{R}$ é a pressão, $a(x)$, a velocidade inicial e $f\colon Q_T \to \mathbb{R}^3$ a força externa por unidade de massa.

São conhecidos a força f e a velocidade inicial $a = a(x)$ sendo u e p as incógnitas.

Nosso objetivo inicial é transformar o problema (9.1)-(9.4) em um problema de valor inicial para uma equação diferencial em um espaço de Hilbert.

Precisamos, então, construir um espaço de Hilbert H tal que se $v \in H$ então v satisfaz (9.2) e (9.3).

Conseguimos isto construindo inicialmente em Ω um campo vetorial solenoidal (divergência nula), que assume um valor dado na fronteira de Ω, mostrando depois que $L^2(\Omega) = H$, o espaço das funções g tais que $|g|^2$ é integrável em Ω, se decompõe em uma soma direta de dois subespaços ortogonais, que vamos indicar por $E(\Omega)$ e $G(\Omega)$. $E(\Omega)$ é o fecho, na norma do $L^2(\Omega)$, do conjunto das funções $u \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\operatorname{div} u = 0$ e $G(\Omega)$ o fecho, também segundo a norma do $L^2(\Omega)$, das funções h tais que $h = \operatorname{grad} \varphi$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.

A construção do campo vetorial solenoidal, bem como a decomposição do $L^2(\Omega)$ estão feitos no Apêndice 1 (A-1).

Supondo feita a decomposição de $L^2(\Omega) = H$, como explicado acima, temos:

$$H(\Omega) = L^2(\Omega) = E(\Omega) + G(\Omega)$$

Definimos, agora, em $H(\Omega)$ uma projeção ortogonal P com valores em $E(\Omega)$, isto é, P é um operador, linear, contínuo, auto-adjunto satisfazendo $P^2 = P$ e que para cada elemento $u \in H(\Omega)$ tem-se $Pu \in E(\Omega)$. Dizemos que P projeta $H(\Omega)$ sobre $E(\Omega)$ paralelamente a $G(\Omega)$.

Nestas condições, aplicando P à equação (9.1) e levando em conta as propriedades das funções de $E(\Omega)$ obtemos:

$$\frac{du}{dt} = -\tilde{A}u + Fu + Pf(t) \qquad t > 0 \tag{9.5}$$

$$u(0^+) = a \tag{9.6}$$

onde u e f são consideradas agora como funções definidas em $\mathbb{R}^+$ e com valores em $E(\Omega)$ e $H(\Omega)$ respectivamente, isto é, $t \to u(\cdot,t)$ e $t \to f(\cdot,t)$. $\frac{du}{dt}$ é a derivada de u na topologia da norma de $E(\Omega)$, $Fu = -P(u|\nabla)u$ e $-\tilde{A}$ é a extensão de Friedrichs do operador $A = -P\Delta$ a $E(\Omega)$. Esta extensão está feita no Apêndice 2 (A-2) e lá mostramos que o domínio do operador $\tilde{A}$ é o conjunto das funções $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo $\operatorname{div} u = 0$ e que coincide com o domínio da raiz quadrada positiva do operador A [14], ou seja, $D(\tilde{A}) = D(A^{1/2})$.

Assim, transformamos o problema de um sistema de equações à derivadas parciais com condições de contorno e valor inicial num problema de valor inicial.

Para facilidade de notação vamos indicar o problema definido pelas relações (9.1), (9.2), (9.3)-(9.4) e (9.5), (9.6) por P(1) e P(2), respectivamente, e escrever A em lugar de $\tilde{A}$.

Daremos agora a seguinte:

DEFINIÇÃO (9.1): Uma função $u = u(t)$ diz-se uma solução de (9.5) num intervalo <u>aberto</u> $I \subset \mathbb{R}^+$ se $\frac{du}{dt}$ e Au existirem e forem contínuos em I e se a (9.5) for satisfeita neste intervalo. Se u for uma solução de (9.5) em $I=(0,T)$, $T > 0$ e também satisfizer (9.6) então $u = u(t)$ é uma solução do problema do valor inicial P(2) em $[0,T)$.

DEFINIÇÃO (9.2): Seja I um intervalo fechado $[t_1,t_2]$ ou um intervalo semifechado $[t_1,t_2)$. Chamaremos de $S(I)$ ao conjunto de todas as $u = u(t)$ com

$$u: I \to E(\Omega)$$

u contínua em I, $A^{1/2}u$ contínua em $I - \{t_1\}$ e $\|A^{1/2}u(t+t_1)\| = O(t^{-1/4})$, $t \to 0^+$.

Em $S(I)$ as soluções de P(2), se existirem, são únicas e podemos enunciar os seguintes teoremas:

TEOREMA (9.1): Se $a = u(0^+) \in E(\Omega)$ e $\|Pf\|$ for integrável em $[0,T]$ então a solução de P(2) é única em $S[0,T]$.

TEOREMA (9.2): Em P(2) se supusermos que:

1) $a = u(0^+) \in D(A^{1/4})$

2) Pf é contínua no sentido de Hölder para $t > 0$

e $\|Pf(t)\| = O(t^{-3/4})$ $t \to 0^+$, então existe uma solução $u \in S[0,T]$ de $P(2)$ onde T é um número real positivo que depende de $a = u(0^+)$ e de Pf.

TEOREMA (9.3): Se além das hipóteses do Teorema (9.2) supusermos que:

$$\|A^{1/4}a\| + B\,M_\infty < \frac{1}{4C_1 B} \tag{9.7}$$

onde $M_\infty = \sup\limits_{0<t<\infty} t^{3/4}\|Pf(t)\|$, $B = B(1/4,\ 1/2)$ é a função beta e C_1 é uma constante a ser introduzida posteriormente, então existe uma solução $u = u(t)$, $u \in S[0,\infty)$ de $P(2)$.

TEOREMA (9.4): Sejam α_0, μ_0 números positivos quaisquer tais que:

$$0 < \alpha_0 < \frac{1}{6C_1 B} \qquad 0 < 108\, C'^3 \mu_0 \le \alpha_0 \tag{9.8}$$

onde C_1 e B são os do teorema anterior e $C' = \|A^{-1/4}\|$.
Se $a = u(0^+)$ e Pf satisfizerem as condições:

$$\|A^{1/4}a\| \le \alpha_0 \qquad \|Pf(t)\| \le \mu_0 \qquad t \in (0,\infty) \tag{9.9}$$

então existe uma solução $u \in S[0,\infty)$ de $P(2)$.

As demonstrações destes teoremas serão dadas na parte final do trabalho, e antes daremos alguns lemas e resultados que servirão de auxílio nestas demonstrações.

A existência de soluções será mostrada construindo-se uma solução. Para isto vamos transformar o problema $P(2)$ na equação integral abstrata seguinte:

$$u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t e^{-(t-s)A}\, Fu(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}\, Pf(s)ds \qquad (9.9)$$

e indicá-la por $P(3)$.

A redução de $P(2)$ a $P(3)$ é possível uma vez que sendo A a extensão de Friedrichs (A-2) a $E(\Omega)$ de $-P\Delta$ temos que:

1) A é fechado e $D(A)$ é denso em $E(\Omega)$.

2) A é positivo definido no seu domínio, com $(Au,u) \geq k\|u\|^2$.

3) O espectro de $-A$ é um subconjunto dos reais negativos, $(\lambda I+A)^{-1}$ existe e $\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{k-\lambda}$ (Lema 9.7 (9.27)).

De acordo com o teorema de Hille-Yosida (Apêndice 3) (A-3), $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_o ((A-3) $\{S(t),\ t \geq 0\}$ fortemente contínuo com $S(t) = e^{-tA}$.

A expressão $Fu = -P(u|\nabla)u$ não faz sentido para $u \in S(I)$. Portanto, para estudarmos soluções $u \in S(I)$ vamos reescrever a equação integral anterior, $P(3)$ como:

$$u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t A^{1/4}\, e^{-(t-s)A}\, Hu(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}\, Pf(s)ds \quad (9.7) \qquad (9.10)$$

onde

$$Hu = -A^{-1/4}\, P(u|\nabla)u \qquad (9.11)$$

Hu está bem definida sempre que $u \in D(A^{1/2})$ em virtude dos lemas (9.1) e (9.4) a seguir:

LEMA 9.1: Existe uma constante positiva C tal que a desigualdade

$$\|A^{-1/4}\ P(u|\nabla)v\| \leq C\|A^{1/2}\ u\|\|A^{1/2}\ v\| \tag{9.12}$$

é válida para quaisquer $u,v \in C_o^1(\Omega)$ $\operatorname{div} u = 0$ $\operatorname{div} v = 0$.

Para facilitar a demonstração deste lema daremos inicialmente três resultados, um teorema do qual não daremos a demonstração e dois lemas que serão demonstrados.

TEOREMA (9.5). (Desigualdade de Heinz generalizada)[9]:

Sejam A e B operadores fechados, definidos em espaços de Hilbert H e H' respectivamente, com $\operatorname{Re}(Au|u) \geq 0$, $\operatorname{Re}(Bv|v) \geq 0$ $\forall u \in D(A)$, $\forall v \in D(B)$. Seja ainda J um operador limitado de H em H'.

Se

$$J\ D(A) \subset D(B)$$

e

$$\|BJu\| \leq M\|Au\| \qquad u \in D(A)$$

sendo M uma constante, então temos:

$$JD(A^{\alpha}) \subset D(B^{\alpha})$$

e

$$\|B^{\alpha}Ju\| \leq e^{ch(1-\alpha)}\ M^{\alpha}\|J\|^{1-\alpha}\ \|A^{\alpha}u\| \qquad u \in D(A^{\alpha}) \tag{9.13}$$

com $0 \leq \alpha \leq 1$, C uma constante. Se A e B são anto-adjuntos e não negativos, podemos tomar $C = 0$ e teremos

$$\|B^{\alpha}Ju\| \leq M^{\alpha}\|J\|^{1-\alpha}\|A^{\alpha}u\| \qquad u \in D(A^{\alpha}) \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

LEMA 9-2 [7]: Seja Ω um domínio, não necessariamente limitado, e u qualquer função em $H_o^1(\Omega)$. ($H_o^1(\Omega)$ é o espaço ve-

torial obtido completando $C_o^1(\Omega)$ com a norma $\|u\| = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$).
Se $\bar{u}(y)$ é definida por $\bar{u}(y) = \dfrac{u(x)}{|y-x|}$ com y arbitrário $(y\neq x)$ porém fixo, então:

$$\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

ou seja

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|x-y|^2}\,dx \leq 4\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Demonstração: Tomemos u em $C_o^1(\Omega)$. Podemos estender u a todo o $\mathbb{R}^3$ definindo $u(x) = 0$ se $x \notin \Omega$. Indicaremos por $B_r(y)$ uma bola aberta com centro em y e raio igual a r. $\overline{B_r(y)}$ é a bola fechada. Consideremos o domínio Ω' definido por

$$\Omega' = B_{r_2}(y) - \overline{B_{r_1}(y)} \qquad r_2 > r_1$$

e a identidade:

$$-\int_{\Omega'} g\Delta f\,dx + \int_{\partial\Omega'} \frac{\partial f}{\partial\nu}\,g\,dS = \int_{\Omega'} (\nabla f|\nabla g)\,dx$$

Fazendo

$$f(x) = \log|x-y|$$
$$g(x) = u^2(x)$$

teremos que:

$$\Delta f = \frac{1}{|x-y|^2} \qquad \nabla f = \frac{(x-y)}{|x-y|^2} \qquad \nabla g = 2u\nabla u$$

Substituindo estes resultados na identidade acima obtemos

$$-\int_{\Omega'} \frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\,dx + \int_{\partial\Omega'} u^2(x)\,\frac{(x-y)}{|x-y|^2}\,dS = \int_{\Omega'} \frac{(x-y)}{|x-y|^2}\,2u\nabla u\,dx$$

ou

$$\int_{\Omega'} \frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\, dx = 2\int_{\Omega'} \frac{u(x)}{|x-y|}\, \nabla u\, \frac{(x-y)}{|x-y|}\, dx + \int_{\partial\Omega'} u^2(x)\, \frac{(x-y)}{|x-y|^2}\, dS \qquad (9.15)$$

Calculando a última integral do 2º membro temos:

$$\int_{\partial\Omega'} u^2(x)\, \frac{(x-y)}{|x-y|^2}\, dS = \int_{|x-y|=r_2} u^2(x)\, \frac{(x-y)}{|x-y|^2}\, dS - \int_{|x-y|=r_1} u^2(x)\, \frac{(x-y)}{|x-y|^2}\, dS =$$

$$= I_2 - I_1$$

$$|I_2| \leq \int_{|x-y|=r_2} |u^2(x)|\, \frac{dS}{|x-y|} = \frac{1}{r_2} \int_{|x-y|=r_2} u^2(x)\, dS.$$

Logo, $\lim\limits_{r_2\to\infty} |I_2| = 0$ pois $u \in C_o^1(\Omega)$ e $u(x) = 0$ se $x \notin \Omega$.

Também, $\lim\limits_{r_1\to 0^+} |I_1| = 0$ porque

$$|I_1| \leq \frac{1}{r_1} \int_{|x-y|=r_1} u^2(x) dS \leq \max_{x\in \overline{B_{r_1}(y)}} |u^2(x)| \left(\frac{1}{r_1} \int_{|x-y|=r_1} dS\right) =$$

$$= \max_{x\in \overline{B_{r_1}(y)}} u^2(x)\, \frac{1}{r_1}\, 4\pi\, r_1^2 = \max_{x\in \overline{B_{r_1}(y)}} u^2(x)\, 4\pi\, r_1$$

Tomando limites em (9.15) fazendo $r_2 \to \infty$ e $r_1 \to 0^+$ obtemos:

$$\int_{\Omega} \frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\, dx = 2\int_{\Omega} \frac{u(x)}{|x-y|}\, \nabla u\, \frac{(x-y)}{|x-y|}\, dx$$

Usando a desigualdade de Schwartz vem:

$$\int_{\Omega} \frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\, dx \leq 2\int_{\Omega} \left|\frac{u(x)}{|x-y|}\, \nabla u\, \frac{(x-y)}{|x-y|}\right| dx \leq$$

$$\leq 2\left(\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{|x-y|^2}\, dx\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2\left(\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|x-y|^2}\,dx\right)^{1/2} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Assim:

$$\left(\int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\,dx\right)^2 \leq 4\left(\int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\,dx\right) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

ou seja

$$\int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x-y|^2}\,dx \leq 4\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

sendo

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|^2\right)dx.$$

LEMA 9-3: Se B é a extensão de Friedrichs (A-2) a $H(\Omega) = L^2(\Omega)$ do operador $-\Delta$ então $B^{-\alpha}$ com $0 < \alpha < 1$ é um operador integral com núcleo $N_\alpha(x,y)$ satisfazendo

$$|N\alpha(x,y)| \leq C_\alpha |x-y|^{2\alpha-3}$$

onde C_α é uma constante que só depende de α.

<u>Demonstração</u>: Consideremos, inicialmente, a equação de Helmholtz $-\Delta u + \lambda u = 0$ com condição de contorno $u(x) = 0$ se $x \in \partial\Omega$.

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{9.17}$$

É fácil mostrar que os autovalores λ de (9.17) são números reais negativos. Logo, se $\lambda \geq 0$ o operador $(-\Delta+\lambda) = B+\lambda$ é sempre inversível.

A função de Green para o problema (9.17) é:

$$G_\lambda(x,y) = E(x,y) + v(x,y)$$

onde $E(x,y)$ é a solução fundamental.

Como $\lambda \geq 0$ podemos substituir λ por k^2 e teremos:

$$\begin{cases} (-\Delta u + k^2)u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

cuja solução fundamental $E(x,y)$ é dada [18] por:

$$E(x,y) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

A função de Green é então:

$$G_\lambda(x,y) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{4\pi|x-y|} + v(x,y)$$

Mas $G_\lambda(x,y)$ deve também satisfazer a condição de contorno, isto é, devemos ter $G_\lambda(x,y) = 0$ se $x \in \partial\Omega$. Logo, se $x \in \partial\Omega$ teremos que $E(x,y) + v(x,y) = 0$ e

$$v(x,y) = -E(x,y) = -\frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{4\pi|x-y|} \qquad x \in \partial\Omega.$$

Pelo princípio do máximo, segue-se que $v(x,y)$ é estritamente negativa em Ω.

Em vista destes fatos teremos que:

$$0 \leq G_\lambda(x,y) = E(x,y) + v(x,y) \leq E(x,y) \qquad \text{ou}$$

$$0 \leq G_\lambda(x,y) \leq \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{4\pi|x-y|} \quad \lambda \geq 0 \tag{9.18}$$

Sendo $(B+\lambda)$ inversível podemos escrever que:

$$(B+\lambda)^{-1} v(x) = \int_\Omega G_\lambda(x,y)v(y)dy$$

Levando em conta que: [11]

$$B^{-\alpha} v(x) = \frac{\text{sen } \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(B+\lambda)^{-1} v(x)d\lambda \qquad 0 < \alpha < 1$$

vem:

$$B^{-\alpha}\ v(x) = \frac{\text{sen}\ \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}\left(\int_\Omega G_\lambda(x,y)v(y)dy\right)d\lambda =$$

$$= \frac{\text{sen}\ \alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty\int_\Omega \lambda^{-\alpha}\ G_\lambda(x,y)v(y)dyd\lambda =$$

$$= \int_\Omega\left(\int_0^\infty \frac{\text{sen}\ \alpha\pi}{\pi}\lambda^{-\alpha}\ G_\lambda(x,y)d\lambda\right)v(y)dy =$$

$$= \int_\Omega N(x,y)v(y)dy$$

onde $N(x,y)$ é o núcleo de $B^{-\alpha}$ e está definido por:

$$N(x,y) = \frac{\text{sen}\ \alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}\ G_\lambda(x,y)d\lambda \qquad \lambda \geq 0$$

Temos então:

$$|N(x,y)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |\lambda^{-\alpha}|\,|G_\lambda(x,y)|d\lambda \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2|x-y|}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}\ e^{-\sqrt{\lambda}\,|x-y|}\ d\lambda = \frac{1}{4\pi^2 k}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}\ e^{-k\sqrt{\lambda}}\ d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 k}\ I(\alpha) \quad \text{com} \quad k = |x-y| \quad \text{e} \quad I(\alpha) = \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}\ e^{-k\sqrt{\lambda}}\ d\lambda.$$

Calculando $I(\alpha)$ teremos:

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}\ e^{-k\sqrt{\lambda}}\ d\lambda = \int_0^\infty t^{-\alpha}\ e^{-k\sqrt{t}}\ dt$$

Façamos $z = k\sqrt{t}$. Assim:

$$I(\alpha) = \int_0^\infty t^{-\alpha}\ e^{-k\sqrt{t}}\ dt = \frac{2}{k^{2-2\alpha}}\int_0^\infty z^{1-2\alpha}\ e^{-z}\ dz = \frac{2}{k^{2-2\alpha}}\,\Gamma(2-2\alpha)$$

Portanto:

$$|N(x,y)| \leq \frac{1}{4\pi^2 k}\ I(\alpha) = \left(\frac{\Gamma(2-2\alpha)}{2\pi}\right)k^{2\alpha-3} = C_\alpha\,|x-y|^{2\alpha-3}$$

$$|N(x,y)| \leq C_\alpha\,|x-y|^{2\alpha-3}$$

com $C_\alpha = \dfrac{\Gamma(2-2\alpha)}{2\pi}$.

Estamos agora em condições de fazer a demonstração do Lema (9.1).

Demonstração: Seja J a injeção de $E(\Omega)$ em $H(\Omega)$ $(H(\Omega) = E(\Omega) \oplus \oplus G(\Omega))$ e A e B extensões de Friedrichs a $E(\Omega)$ e $H(\Omega)$ respectivamente. Vale então:

$$\|A^{1/2}u\| = \|B^{1/2}Ju\| = \|\nabla u\| \qquad u \in D(A^{1/2})$$

e $JD(A^{1/2}) \subset D(B^{1/2})$.

Usando a desigualdade de Heinz (Teorema 9.5 (9.14) obtemos:

$$\|B^{\alpha}Ju\| \leq \|A^{\alpha}u\| \qquad u \in D(A^{\alpha}) \qquad 0 \leq \alpha \leq 1/2.$$

Assim, $B^{\alpha}JA^{-\alpha}$ é um operador limitado de $E(\Omega)$ em $H(\Omega)$ com norma $\|B^{\alpha}JA^{-\alpha}\| \leq 1$ pois $\dfrac{\|B^{\alpha}JA^{-\alpha}u\|}{\|u\|} \leq \dfrac{\|A^{\alpha}A^{-\alpha}u\|}{\|u\|} = 1.$

Daí, $Q = A^{-\alpha}PB^{\alpha}$, como operador de $H(\Omega)$ em $E(\Omega)$, onde P é a projeção ortogonal de $H(\Omega)$ sobre $E(\Omega)$ definida anteriormente, admite uma extensão limitada $\bar{Q} = \overline{A^{-\alpha}PB^{\alpha}}$ com $\|\bar{Q}\| = \|\overline{A^{-\alpha}PB^{\alpha}}\| \leq 1$ [2].

Mostraremos agora que:

$$\|B^{-1/4}w\| \leq C_1\|\nabla u\|\,\|\nabla v\|$$

onde $w = (u|\nabla)v \quad u,v \in C_o^1(\Omega)$.

Pelo Lema 9.3 $B^{-\alpha}$ é um operador integral com núcleo $N_{\alpha}(x,y)$ satisfazendo

$$|N_{\alpha}(x,y)| \leq C_{\alpha}|x-y|^{2\alpha-3} \qquad 0 < \alpha < 1$$

Logo $|N_{1/2}(x,y)| \leq C_{1/2}|x-y|^{-2}$ e temos então:

$$\|B^{-1/4}w\|^2 = (B^{-1/2}\,w|w) \leq C\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|w(x)|\,|w(y)|}{|x-y|^2}\,dxdy =$$

$$= C\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|w(x)|}{|x-y|^2}\;\frac{|w(y)|}{|x-y|}\,dxdy \leq$$

$$\leq C\left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|w(x)|^2}{|x-y|^2}\,dxdy\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|w(y)|^2}{|x-y|^2}\,dxdy\right)^{1/2}$$

Como $w = (u|\nabla)v$ podemos escrever que:

$$\|B^{-1/4}w\|^2 = (B^{-1/2}\, w|w) \leq$$

$$\leq C\left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)|^2|\nabla v(y)|^2}{|x-y|^2}\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(y)|^2|\nabla v(x)|^2}{|x-y|^2}\right)^{1/2}.$$

Porém:

$$\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)|^2|\nabla v(y)|^2}{|x-y|^2}\,dxdy = \int_\Omega |\nabla v(y)|^2\,dy \int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|x-y|^2}\,dx =$$

$$= \|\nabla v\|^2 \int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|x-y|^2}\,dx \leq 4\|\nabla v\|^2\,\|\nabla u\|^2$$

pelo Lema (9.2).

Do mesmo modo:

$$\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(y)|^2|\nabla v(x)|^2}{|x-y|^2}\,dxdy \leq 4\|\nabla u\|^2\,\|\nabla v\|^2$$

Assim:

$$\|B^{-1/4}w\|^2 = (B^{-1/2}\,w|w) \leq 4C\|\nabla u\|^2\|\nabla v\|^2$$

ou

$$\|B^{-1/4}w\|^2 = \|B^{-1/4}(u|\nabla)v\| \leq 2C\|\nabla u\|\,\|\nabla v\|, \quad u,v \in C_o^1(\Omega).$$

Se $Pw = P(u|\nabla)v \in E(\Omega)$ e A é a extensão de Friedrichs de $-\Delta$ a $E(\Omega)$ então:

$$\|A^{-1/4}\,P(u|\nabla)v\| \leq 2C\|\nabla u\|\,\|\nabla v\| = C\|A^{1/2}u\|\,\|A^{1/2}v\| \tag{9.19}$$

com $u,v \in C_o^1(\Omega)$ $\operatorname{div} u = 0$ $\operatorname{div} v = 0$.

LEMA 9-4: Se $u,v \in D(A^{1/2})$, isto é, se $u,v \in H_o^1(\Omega)$, $\operatorname{div} u = 0$, $\operatorname{div} v = 0$ então valem as desigualdades

$$\|Hu\| \leq C\|A^{1/2}u\|^2 \tag{9.20}$$

e

$$\|Hu-Hv\| \leq C\|A^{1/2}(u-v)\| (\|A^{1/2}u\|+\|A^{1/2}v\|) \tag{9.21}$$

sendo C a constante do Lema 9-1.

<u>Demonstração</u>: Pela Lema 9-1, (9.12), segue-se que se $u,v \in C_o^1(\Omega)$ div u = 0 e div v = 0 então:

$$\|A^{-1/4} P(u|\nabla)v\| \leq C\|A^{1/2}u\|\,\|A^{1/2}v\|.$$

Logo, a primeira desigualdade é obtida diretamente fazendo $v = u$, pois, neste caso $A^{-1/4} P(u|\nabla)u = Hu$ e

$$\|Hu\| \leq C\|A^{1/2}u\|^2.$$

Para obtermos a segunda desigualdade podemos escrever:

$$\begin{aligned} Hu-Hv &= A^{-1/4} P(v|\nabla)v - A^{-1/4} P(u|\nabla)v + A^{-1/4} P(v|\nabla)v - \\ &\quad - A^{-1/4} P(u|\nabla)v = \\ &= -(A^{-1/4} P(u|\nabla)(u-v)) - A^{-1/4} P((u-v)|\nabla)v \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|Hu-Hv\| &\leq \|A^{-1/4} P(u|\nabla)(u-v)\| + \|A^{-1/4} P(u-v|\nabla)v\| \leq \\ &\leq C\|A^{1/2}u\|\,\|A^{1/2}(u-v)\| + C\|A^{1/2}(u-v)\|\,\|A^{1/2}v\| = \\ &= C\|A^{1/2}(u-v)\| (\|A^{1/2}u\| + \|A^{1/2}v\|). \end{aligned}$$

Os lemas seguintes dizem respeito ao operador A extensão de Friedrichs a $\mathbb{E}(\Omega)$ do operador $-P\Delta$ (A-2).

A é um operador auto-adjunto, portanto, fechado.

LEMA 9-5: A é um operador estritamente positivo, isto é, existe um número positivo k tal que

$$(Au|u) \geq k\|u\|^2 \qquad u \in D(A) \tag{9.22}$$

<u>Demonstração</u>: $(Au|u) = (A^{1/2}u|A^{1/2}u) = \|A^{1/2}u\|^2 = \|\nabla u\|^2$.

Usando a desigualdade de Friedrichs [15] temos

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \alpha^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \alpha^2 \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Logo:

$$(Au|u) = \|\nabla u\|^2 \geq \frac{1}{\alpha^2} \|u\|^2 = k\|u\|^2.$$

Este resultado implica a existência de um inverso A^{-1} de A.

De fato, se $Au = 0$ então $\|u\|^2 \leq 0$ ou seja $u = 0$, logo, existe o inverso A^{-1}.

Seja $Au = v$. Então $u = A^{-1}v$ e de $(Au|u) \geq k\|u\|^2$ segue-se que:

$$k\|A^{-1}v\|^2 \leq (v|A^{-1}v) \leq \|v\|\|A^{-1}v\| \qquad \text{donde}$$

$$\|A^{-1}v\| \leq \frac{1}{k}\|v\| \tag{9.23}$$

que nos diz ser A^{-1} um operador limitado.

Os Lemas 9-6 e 9-7 a seguir são conseqüências do lema anterior sendo que o 9-7 nos diz existir o operador resolvente de A.

LEMA 9-6: $A^{-\alpha}$ é limitado para todo $\alpha \geq 0$.

<u>Demonstração</u>: A sendo auto-adjunto existe uma família espectral $\{E_\lambda\}$ tal que $A^{-\alpha}$ se escreve:

$$A^{-\alpha}u = \int_{0^+}^{\infty} \lambda^{-\alpha} \, d\, E_\lambda u$$

Mas, como pelo lema anterior (9.22)

$$(Au|u) \geq k\|u\|^2$$

vem que $\lambda \geq k$. Logo, $\lambda \geq k \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{k}$ e $\lambda^{-\alpha} \leq k^{-\alpha}$.

Assim,

$$\|A^{-\alpha}u\| \leq \int_{0^+}^{\infty} |\lambda^{-\alpha}| \; d\|E_\lambda u\| = \int_{0^+}^{\infty} \lambda^{-\alpha} \; d\|E_\lambda u\| \leq$$

$$\leq k^{-\alpha} \int_{0^+}^{\infty} d\|E_\lambda u\| = k^{-\alpha}\|u\|$$

$$\|A^{-\alpha}u\| \leq k^{-\alpha}\|u\| \quad e \quad \|A^{-\alpha}\| \leq k^{-\alpha} \tag{9.25}$$

LEMA 9.7: Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ então

$$\|(\lambda I+A)^{-1}\| \leq (\lambda+k)^{-1} \tag{9.26}$$

<u>Demonstração</u>: Do Lema 9-5, (9.22) temos que:

$$(Au|u) \geq k\|u\|^2$$

Então,

$$((\lambda I+A)u|u) = (\lambda Iu + Au|u) =$$

$$= \lambda(u|u) + (Au|u) \geq \lambda(u|u) + k(u|u) = (\lambda+k)(u|u)$$

Pela desigualdade de Schwartz obtemos:

$$((\lambda I+A)u|u) \leq \|(\lambda I+A)u\|\|u\|$$

Assim:

$$(\lambda+k)(u|u) \leq ((\lambda I+A)u|u) \leq \|(\lambda I+A)u\|\|u\|$$

Do fato de que $((\lambda I+A)u|u) \geq (\lambda+k)\|u\|^2$ concluimos que se $(\lambda I+A)u = 0$ então $u = 0$, donde existe o inverso $(\lambda I+A)^{-1}$.

Seja $(\lambda I+A)u = v$.

Temos: $u = (\lambda I+A)^{-1}v$ e de $\|(\lambda I+A)u\| \geq (\lambda+k)\|u\|$ vem:

$$\|v\| \geq (\lambda+k)\|(\lambda I+A)^{-1}v\|$$

$$\|(\lambda I+A)^{-1}v\| \leq (\lambda+k)^{-1}\|v\|$$

$$\|(\lambda I+A)^{-1}\| \leq (\lambda+k)^{-1} = \frac{1}{\lambda+k} .$$

Além disso, como $\lambda \geq k$ segue-se que $\lambda+k > \lambda-k$ ou seja $\frac{1}{\lambda+k} < \frac{1}{\lambda-k}$. Portanto,

$$\|(\lambda I+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda+k} \leq \frac{1}{\lambda-k} .$$

A seguir faremos algumas considerações sobre a notação que vamos usar.

Seja $I \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo fechado e E um espaço de Banach. Indicaremos por $C(I,E)$ o conjunto das funções contínuas definidas em I e com valores em E. Se $\theta \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < \theta < 1$ vamos indicar por $C^{\theta}(I,E)$ o conjunto de todas as funções definidas em I com valores em E forte e uniformemente contínuas, no sentido de Hölder, com expoente θ. Isto é, se $u(t) \in C^{\theta}(I,E)$ então existe $K > 0$ tal que $\|u(t_1)-u(t_2)\| \leq K|t_1-t_2|^{\theta}$. O conjunto de todas as funções $v = v(t)$ continuamente diferenciáveis até ordem n e com $\frac{d^m}{dt^m} v \in C^{\theta}(I,E)$ $0 < \theta < 1$, $m = 0,1,2,\ldots,n$ será indicado por $C^{n+\theta}(I,E)$.

Se I não for fechado, $v \in C^{n+\theta}(I,E)$ significa que $v \in C^{n+\theta}(I_1,E)$ onde I_1 é qualquer intervalo fechado contido em I. Quando não houver perigo de confusão escreveremos $C^{n+\theta}(I)$ em lugar de $C^{n+\theta}(I,E)$.

Alguns resultados sobre e^{-tA}

Seja A um operador estritamente positivo, auto-adjunto em $E(\Omega)$, tal que $(\lambda I-A)^{-1}$ existe e $\|(\lambda I-A)^{-1}\| \leq (\lambda-k)^{-1}$ $\lambda > k$ $k > 0$. De acordo com o teorema de Hille-Yosida (A-3) A é gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t),\ t \geq 0\}$, $S(t) = e^{-tA}$, que goza das seguintes propriedades:

1) $\|e^{-tA}\| \leq 1 \quad t \geq 0$

2) $e^{-tA}\, e^{-sA} = e^{-sA}\, e^{-tA} = e^{-(t+s)A} \qquad t,s \geq 0$

3) $\|(e^{-tA}-I)u\| \to 0 \quad t \to 0^+ \quad u \in E(\Omega)$

4) $u \in D(A)$ se e só se $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(e^{-hA}-I)u$ existir na norma de $E(\Omega)$ e $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(e^{-hA}-I)u = -Au$

5) Para um $u \in E(\Omega)$, fixo, e $t > 0$ tem-se:

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{-tA}u = (-A)^n e^{-tA}u \qquad n=0,1,2.... \text{ [19]} \tag{9.28}$$

6) Se $u \in D(A^\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq n$ podemos escrever ainda que:

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{-tA}u = (-1)^n A^{n-\alpha} e^{-tA} A^\alpha u$$

Com estes resultados podemos demonstrar agora os seguintes lemas:

LEMA 9-8: Seja α um número real $0 < \alpha < e = 2,718....$. Então:

$$\|A^\alpha e^{-tA}\| \leq t^{-\alpha} \qquad t > 0 \tag{9.29}$$

e

$$t^\alpha \|A^\alpha e^{-tA}u\| \to 0 \tag{9.30}$$

quando $t \to 0^+$ para todo $u \in E(\Omega)$.

Demonstração: Consideremos a função g definida por $g(\lambda) = \lambda^\alpha e^{-t\lambda} \quad \lambda \geq 0$,

Temos:

$$g'(\lambda^*) = 0 \Rightarrow \lambda^* = \frac{\alpha}{t}$$

e

$$g''\left(\frac{\alpha}{t}\right) < 0$$

Logo,

$$\max_{\lambda\geq 0} g(\lambda) = g(\lambda^*) = \left(\frac{\alpha}{t}\right)^\alpha e^{-t\frac{\alpha}{t}} =$$

$$= \alpha^{\alpha} \; t^{-\alpha} e^{-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} t^{-\alpha} \leq t^{-\alpha} \quad \text{porque} \quad \alpha < e.$$

Assim:

$$\max_{\lambda \geq 0} \; (\lambda^{\alpha} \; e^{-t\lambda}) \leq t^{-\alpha}$$

Por outro lado, sendo A auto-adjunto temos:

$$A^{\alpha} \; e^{-tA} u = \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha} \; e^{-t\lambda} \; dE_{\lambda} u$$

e

$$\| A^{\alpha} \; e^{-tA} u \| \leq \int_0^{\infty} | \lambda^{\alpha} \; e^{-t\lambda} | \, \| dE_{\lambda} u \|$$

donde

$$\| A^{\alpha} \; e^{-tA} \| = \sup_{\substack{\|u\| \neq 0 \\ u \in E(\Omega)}} \frac{\| A^{\alpha} e^{-tA} u \|}{\|u\|} \leq \sup_{\substack{\|u\| \neq 0 \\ u \in E(\Omega)}} \frac{1}{\|u\|} \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha} \; e^{-t\lambda} \; \| dE_{\lambda} u \| \leq$$

$$\leq \frac{t^{-\alpha} \|u\|}{\|u\|} = t^{-\alpha} \; .$$

Por outro lado, sendo $\epsilon \in (0,\alpha)$ e $v \in D(A^{\epsilon})$ temos:

$$t^{\alpha} \; A^{\alpha} \; e^{-tA} u = t^{\alpha} \; A^{\alpha} \; e^{-tA} u - t^{\alpha} \; A^{\alpha} \; e^{-tA} v + t^{\alpha} \; A^{\alpha - \epsilon} \; A^{\epsilon} \; e^{-tA} v$$

$$\| t^{\alpha} \; A^{\alpha} \; e^{-tA} u \| \leq t^{\alpha} \| A^{\alpha} \; e^{-tA} (u-v) \| + t^{\alpha} \| A^{\alpha - \epsilon} \; e^{-tA} \; A^{\epsilon} v \| \leq$$

$$\leq t^{\alpha} \| A^{\alpha} \; e^{-tA} \| \, \| u-v \| + t^{\alpha} \| A^{\alpha - \epsilon} \; e^{-tA} \| \, \| A^{\epsilon} v \| \leq$$

$$\leq t^{\alpha} \; t^{-\alpha} \| u-v \| + t^{\alpha} \; t^{\epsilon - \alpha} \| A^{\epsilon} v \| =$$

$$= \| u-v \| + t^{\epsilon} \| A^{\epsilon} v \|$$

onde usamos o resultado obtido na primeira parte do lema.

Vale então a desigualdade,

$$\| t^{\alpha} \; A^{\alpha} \; e^{-tA} u \| \leq \| u-v \| + t^{\epsilon} \| A^{\epsilon} v \| .$$

Mas como $D(A^{\epsilon})$ é denso em $E(\Omega)$ se $u \in E(\Omega)$ existe $v \in D(A^{\epsilon})$ tal que $\|u-v\| < \eta$, $0 < \eta < \epsilon t^{\epsilon}$. Então:

$$t^{\alpha} \| A^{\alpha} \; e^{-tA} u \| \leq \eta + t^{\epsilon} \| A^{\epsilon} v \| \leq \epsilon t^{\epsilon} + t^{\epsilon} \| A^{\epsilon} v \| =$$

$$= t^{\epsilon} (\epsilon + \| A^{\epsilon} v \|) \quad \epsilon \in (0,\alpha) \quad \epsilon \; \text{fixo}.$$

Daí,

$$\lim_{t\to 0+} t^{\alpha}\|A^{\alpha}\, e^{-tA}u\| \le \lim_{t\to 0+} t^{\varepsilon}(\varepsilon + \|A^{\varepsilon}v\|) = 0$$

para todo $u \in E(\Omega)$.

LEMA 9-9: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. Então a desigualdade

$$\|(e^{-hA}-I)u\| \le \frac{1}{\alpha}\, h^{\alpha}\|A^{\alpha}u\|, \quad h > 0 \tag{9.31}$$

vale para qualquer $u \in D(A^{\alpha})$.

Demonstração: Se $\{S(t),\ t \ge 0\}$ é um semigrupo, de classe C_o, então:

$$\frac{d}{dt}\, S(t)u = AS(t)u \quad [A-3]\,($$

Também,

$$\int_0^h \frac{dS(t)u}{dt}\, dt = (S(h)-I)u.$$

Seja $S(t) = e^{-tA}$.

$$(e^{-hA}-I)u = \int_0^h \frac{de^{-tA}u}{dt}\, dt = \int_0^h Ae^{-tA}u dt = \int_0^h A^{1-\alpha}e^{-tA}A^{\alpha}u dt.$$

Logo

$$\|(e^{-hA}-I)u\| = \left\|\int_0^h A^{1-\alpha}\, e^{-tA}\, A^{\alpha}u dt\right\| \le$$

$$\le \int_0^h \|A^{1-\alpha}\, e^{-tA}\|\|A^{\alpha}u\| dt = \|A^{\alpha}u\| \int_0^h \|A^{1-\alpha}\, e^{-tA}\| dt \le$$

$$\le \|A^{\alpha}u\| \int_0^h t^{\alpha-1}\, dt,$$ pois, $\|A^{1-\alpha}\, e^{-tA}\| \le t^{\alpha-1}$ por (9.29).

Como $\int_0^h t^{\alpha-1}dt = \frac{h^{\alpha}}{\alpha}$ obtemos:

$$\|(e^{-hA}-I)u\| \le \frac{1}{\alpha}\, h^{\alpha}\|A^{\alpha}u\|.$$

LEMA 9.10: Consideremos $u(t)$ dado por $u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds$, onde $f \in C((0,T]) = C((0,T],E(\Omega))$, satisfaz:

$$\sup_{0<s\le t} s^{\lambda}\|f(s)\| \le M(t) < +\infty \qquad 0 < t \le T$$

sendo $\lambda \in [0,1)$ e $M(t)$ uma função numérica.

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \alpha < 1$ então $A^{\alpha}u(t)$ existe para cada $t \in (0,T]$ e satisfaz a desigualdade:

$$\|A^{\alpha}u(t)\| \leq t^{1-\alpha-\lambda}\, M(t)\, B(1-\alpha,1-\lambda) \tag{9.32}$$

onde $B(\ ,\ )$ é a função beta. Além disso, $A^{\alpha}u \in C^{\theta}((0,T])$ para qualquer $\theta \in (0,1-\alpha)$ e

$$A^{\alpha}u \in C^{\theta}([0,T]) \tag{9.33}$$

Com $A^{\alpha}u(0) = 0$ se $0 < \theta \leq 1-\alpha-\lambda$.

<u>Demonstração</u>: O operador A^{α} é fechado. Vale então:

$$A^{\alpha}u(t) = A^{\alpha}\int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds = \int_0^t A^{\alpha}e^{-(t-s)A}f(s)ds$$

e $\|A^{\alpha}u(t)\| \leq \int_0^t \|A^{\alpha}e^{-(t-s)A}\|\,\|f(s)\|ds.$

Usando a hipótese sobre f e (9.29) vem:

$$\|A^{\alpha}u(t)\| \leq \int_0^t \|A^{\alpha}e^{-(t-s)A}\|\ (s^{\lambda}\|f(s)\|)s^{-\lambda}ds \leq \int_0^t (t-s)^{-\alpha}s^{-\lambda}M(t)ds =$$
$$= M(t)\int_0^t (t-s)^{-\alpha}s^{-\lambda}ds.$$

Por uma mudança de variáveis, fazendo $s = tx$ a última integral se escreve:

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha}s^{-\lambda}ds = t^{1-\alpha-\lambda}\int_0^1 x^{-\lambda}(1-x)^{-\alpha}dx.$$

Por definição, a função beta $B(\cdot,\cdot)$ é dada por:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}dx,\quad 0 < p < 1,\quad 0 < q < 1$$

Assim:

$$\|A^{\alpha}u(t)\| \leq t^{1-\alpha-\lambda}M(t)\int_0^1 x^{-\lambda}(1-x)^{-\alpha}dx = t^{1-\alpha-\lambda}M(t)B(1-\lambda,1-\alpha) \tag{9.32}$$

Este resultado nos mostra que a desigualdade do enunciado do lema é verdadeira e que $A^{\alpha}u(t)$ existe para cada $t \in (0,T]$ e $u(t) \in D(A^{\alpha})$, $0 \leq \alpha < 1$.

Mostremos, agora, que $A^{\alpha}u \in C^{\theta}(0,T]$, isto é, $A^{\alpha}u$ é contínua no sentido de Hölder, com expoente θ, $\theta \in (0,1-\alpha)$. Seja então:

$$\Delta h\; A^{\alpha}u(t) = A^{\alpha}u(t+h) - A^{\alpha}u(t), \quad 0 < t < t+h \leq T$$

e vamos supor $0 < h \leq 1$. Então temos:

$$\Delta h\; A^{\alpha}u(t) = A^{\alpha}\int_0^{t+h} e^{-(t+h-s)A}f(s)ds - A^{\alpha}\int_0^{t} e^{-(t-s)A}f(s)ds =$$

$$= A^{\alpha}\int_0^{t} e^{-(t+h-s)A}f(s)ds - A^{\alpha}\int_0^{t} e^{-(t-s)A}f(s)ds +$$

$$+ A^{\alpha}\int_t^{t+h} e^{-(t+h-s)A}f(s)ds \qquad \text{ou seja,}$$

$$\Delta h\; A^{\alpha}u(t) = A^{\alpha}\int_0^{t} (e^{-(t+h-s)A} - e^{-(t-s)A})f(s)ds +$$

$$+ A^{\alpha}\int_t^{t+h} e^{-(t+h-s)A}f(s)ds.$$

Façamos $w_1 = A^{\alpha}\int_0^{t} (e^{-(t+h-s)A} - e^{-(t-s)A})f(s)ds$

$$w_2 = A^{\alpha}\int_t^{t+h} e^{-(t+h-s)A}f(s)ds.$$

Observamos que na desigualdade (9.32) se fizermos a substituição $\alpha \to \alpha+\theta$ podemos mostrar que:

$$\|A^{\alpha+\theta}u(t)\| = \|A^{\theta}(A^{\alpha}u(t)\| \leq M(T)t^{1-\alpha-\lambda-\theta}B(1-\alpha-\theta,1-\lambda),$$

isto é, $A^{\alpha}u(t) \in D(A^{\theta})$ se $0 < \theta < 1-\alpha$.

Consideremos agora w_1:

$$w_1 = A^{\alpha}\int_0^{t} (e^{-(t+h-s)A} - e^{-(t-s)A})f(s)ds =$$

$$= A^{\alpha}\int_0^{t} (e^{-hA}-I)e^{-(t-s)A}f(s)ds = (e^{-hA}-I)A^{\alpha}\int_0^{t} e^{-(t-s)A}f(s)ds =$$

$$= (e^{-hA}-I)A^{\alpha}u(t).$$

Do Lema 9.9 obtivemos que:

$$\|(e^{-hA}-I)u\| \le \frac{1}{\alpha} h^{\alpha}\|A^{\alpha}u\| \quad \text{se} \quad u \in D(A^{\alpha}).$$

por uma observação anterior dissemos que $A^{\alpha}u \in D(A^{\theta})$ com $0 < \theta < 1-\alpha$. Assim:

$$w_1 = (e^{-hA}-I)A^{\alpha}u = (e^{-hA}-I)v, \quad v \in D(A^{\theta})$$

e

$$\|w_1\| = \|(e^{-hA}-I)v\| \le \frac{1}{\theta} h^{\theta}\|A^{\theta}v\| = \frac{1}{\theta} h^{\theta}\|A^{\theta}(A^{\alpha}u(t))\| =$$
$$= \frac{1}{\theta} h^{\theta}\|A^{\alpha+\theta}u(t)\| \le \frac{h^{\theta}}{\theta} t^{1-\alpha-\lambda-\theta} M(T)B(1-\alpha-\theta,1-\lambda).$$

Tomando w_2 e lembrando que A^{α} é fechado teremos:

$$\|w_2\| = \|A^{\alpha}\int_t^{t+h} e^{-(t+h-s)A} f(s)ds\| \le$$
$$\le \int_t^{t+h} \|A^{\alpha} e^{-(t+h-s)A}\| (s^{\lambda}\|f(s)\| s^{-\lambda} ds \le$$
$$\le M(T)\int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha} s^{-\lambda} ds.$$

Fazendo $(s-t) = y$ obtemos

$$\|w_2\| \le M(T)\int_0^{h} (h-s)^{-\alpha}(s+t)^{-\lambda} ds.$$

Usando, de novo, a definição da função beta vem:

$$\|w_2\| \le h^{1-\alpha-\lambda} M(T)B(1-\alpha,1-\lambda) \quad \text{se tomarmos} \quad (s+t)^{-\lambda} \le s^{-\lambda}$$
$$\|w_2\| \le \frac{h^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} t^{-\lambda} M(T) \quad \text{se tomarmos} \quad (s+t)^{-\lambda} \le t^{-\lambda}$$

Assim:

$$\|\Delta h\ A^{\alpha}u(t)\| \le \|w_1\| + \|w_2\| \le$$
$$\le \begin{cases} \frac{h^{\theta}}{\theta} t^{1-\alpha-\lambda-\theta} M(T)B(1-\alpha-\theta,1-\lambda) + h^{1-\alpha-\lambda} M(T)B(1-\alpha,1-\lambda) \\ \frac{h^{\theta}}{\theta} t^{1-\alpha-\lambda-\theta} M(T)B(1-\alpha-\theta,1-\lambda) + \frac{h^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} t^{-\lambda} M(T) \end{cases}$$

Supondo que $1-\alpha-\lambda \ge \theta$, os fatores $t^{1-\alpha-\lambda-\theta}$ e $h^{1-\alpha-\lambda}$

podem ser substituidos, respectivamente, por $T^{1-\alpha-\lambda-\theta}$ e h^{θ}. Portanto, $\|\Delta h\ A^{\alpha}u(t)\| \leq \frac{h^{\theta}}{\theta}\ T^{1-\alpha-\lambda-\theta}M(T)B(1-\alpha-\theta,1-\lambda)$ + $+\ h^{\theta}\ M(T)B(1-\alpha,1-\lambda) = (\frac{T^{1-\alpha-\lambda-\theta}}{\theta}B(1-\alpha-\theta,1-\lambda)+B(1-\alpha,1-\lambda))M(T)h^{\theta} =$ $= CM(T)h^{\theta}$ sendo evidentemente C uma constante que não depende de $t \in (0,T]$. Assim, mostramos que

$$\|A^{\alpha}u(t+h) - A^{\alpha}u(t)\| \leq CM(T)h^{\theta}$$

isto é,

$$A^{\alpha}u \in C^{\theta}((0,T]) \qquad 0 < \theta < 1-\alpha.$$

Para mostrarmos que $A^{\alpha}u \in C^{\theta}((0,T])$ para qualquer $0 < \theta \leq 1-\alpha$ vamos mostrar que $A^{\alpha}u \in C^{\theta}([\epsilon,T])$ sendo $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Se $t \in [\epsilon,T]$ o fator $t^{1-\alpha-\lambda-\theta}$ pode ser substituido por $T^{1-\alpha-\lambda-\theta}$ se $1-\alpha-\lambda-\theta \geq 0$ ou por $\epsilon^{1-\alpha-\lambda-0}$ se $1-\alpha-\lambda-\theta < 0$. Observamos também que $h^{1-\alpha} \leq h^{\theta}$. Então, considerando a segunda expressão para $\|\Delta h\ A^{\alpha}u(t)\|$ vem:

$$\begin{aligned}\|\Delta h\ A^{\alpha}u(t)\| &\leq \frac{h^{\theta}}{\theta}t^{1-\alpha-\lambda-\theta}\ M(T)B(1-\alpha-\theta,1-\lambda) + \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha}\ t^{-\lambda}\ M(T) \leq \\ &\leq \frac{h^{\theta}}{\theta}\epsilon^{1-\alpha-\lambda-\theta}\ M(T)B(1-\alpha-\theta,1-\lambda) + \frac{h^{\theta}}{\theta}\epsilon^{-\lambda}\ M(T) = \\ &= (\frac{\epsilon^{1-\alpha-\lambda-\theta}}{\theta}\ B(1-\alpha-\theta,1-\lambda) + \frac{\epsilon^{-\lambda}}{\theta})M(T)h^{\theta} = C_{\epsilon}\ M(T)h^{\theta}\end{aligned}$$

onde C_{ϵ} independe de $t \in [\epsilon T]$. Isto implica que $A^{\alpha}u \in C^{\theta}((0,T])$ $0 < \theta \leq 1-\alpha$ para qualquer $\epsilon > 0$, tão pequeno quanto se queira, ou seja, $A^{\alpha}u \in C^{\theta}([0,T])$.

Assim, de

$$A^{\alpha}u(t) = A^{\alpha}\int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds = \int_0^t A^{\alpha}\ e^{-(t-s)A}f(s)ds$$

podemos concluir que $A^{\alpha}u(0) = 0$.

CAPÍTULO IV

§10. Soluções em $S[0,T]$.

Consideremos o problema do valor inicial sob a forma indicada antes por $P(3)$ isto é, sob a forma da equação integral abstrata seguinte: (9.10)

$$u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}Hu(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds \qquad (9.10)$$

onde lembramos que $Hu = -A^{-1/4}\ P(u|\nabla)u$.

Hu está bem definido em vista dos Lemas 9-1 e 9-4 e $S[0,T]$, de acordo com definição já dada, é o conjunto de todas as funções $u: [T_1,T_2] \to E(\Omega)$, $T_1,T_2 \in \mathbb{R}^+$, tais que $u(t)$ é contínua em $[T_1,T_2] = I$, $A^{1/2}u$ é contínua em $I - \{T_1\}$ e

$$\|A^{1/2}u(t+T_1)\| = o(t^{-1/4}) \qquad t \to 0^+.$$

Antes de passarmos ao estudo dos teoremas de unicidade e existência, vamos fazer algumas considerações a respeito das integrais da equação integral (9.10)

a) Suponhamos que $u \in S[0,T]$, $T > 0$. Então, pela definição de S existe uma função contínua não negativa $K(t)$ com $K(0) = 0$ e tal que $\|A^{1/2}u(s)\| \le K(t)s^{-1/4}$, $0 < s \le t \le T$ sendo $K(t)$ dado por:

$$K(t) = \sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\|.$$

De fato, podemos dizer que:

$$A^{1/2}u(s) = s^{1/4}\ A^{1/2}\ u(s)\ s^{-1/4} \qquad s > 0$$

e

$$\|A^{1/2}u(s)\| = s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\|s^{-1/4} \leq \sup_{0<s\leq t} (s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\|)s^{-1/4}$$

Logo:

$$\|A^{1/2}u(s)\| \leq K(t)s^{-1/4} \tag{10.2}$$

De acordo com o Lema 9-4 (9.20) vimos que

$$\|Hu\| \leq C\|A^{1/2}u\|^2.$$

Segue-se então:

$$\|Hu(s)\| \leq C\|A^{1/2}u(s)\|^2 \leq C\ K^2(t)(s^{-1/4})^2 = C\ K^2(t)s^{-1/2} \tag{10.3}$$

Façamos agora: $\phi(t) = \phi(u,t) = \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}Hu(s)ds.$

Como conseqüência de (10.3) e de (9.29) segue-se ϕ existe e é contínua em $[0,T]$. De fato, temos:

$$\|\phi(t)\| \leq \int_0^t \|A^{1/4}e^{-(t-s)A}\|\,\|Hu(s)\|ds \leq \int_0^t (t-s)^{-1/4}CK^2(t)s^{-1/2}ds =$$
$$= C\ K^2(t)\int_0^t (t-s)^{-1/4}s^{-1/2}ds = C\ K^2(t)t^{1/4}B(1/2,3/4).$$

Isto implica em que ϕ existe e é contínua para cada $t \in [0,T]$ pois $K(t)$ é contínua.

Também, $A^{1/2}\phi$ existe e é contínua em $(0,T]$ com $\|A^{1/2}\phi(t)\| \leq C\ B(1/2,1/4)K^2(t)t^{-1/4}$, pois,

$$A^{1/2}\phi(t) = A^{1/2}\int_0^t A^{1/4}\ e^{-(t-s)A}Hu(s)ds = \int_0^t A^{3/4}\ e^{-(t-s)A}Hu(s)ds.$$

Daí:

$$\|A^{1/2}\phi(t)\| \leq \int_0^t \|A^{3/4}\ e^{-(t-s)A}\|\,\|Hu(s)\|ds \leq$$
$$\leq \int_0^t (t-s)^{-3/4}C\ K^2(t)s^{-1/2}ds = C\ K^2(t)t^{-1/4}\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-3/4}\ dx =$$
$$= C\ K^2(t)t^{-1/4}\ B(1/2,1/4) = C\ B(1/2,1/4)K^2(t)t^{-1/4}.$$

Podemos concluir então que $\phi(t) \in S[0,T]$ sempre que $u \in S[0,T]$.

b) Suponhamos agora que a desigualdade: $\|Pf(s)\| \leq M(t)s^{-3/4}$

$0 < s \leq t \leq T$ se verifique com uma função contínua M.

M poderá ser definida como:

$$M(t) = \sup_{0<s\leq t} s^{3/4}\|Pf(s)\|. \tag{10.4}$$

Seja $\psi(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds$ a outra integral de (10.1). Então $\psi(t)$ é contínua em $[0,T]$ e $A^{1/2}\psi$ é contínua em $(0,T]$ valendo a desigualdade:

$$\|A^{1/2}\psi(t)\| \leq B(1/2,1/4)M(t)t^{-1/4}.$$

Basta notar que $\psi(t)$ é a mesma integral considerada no Lema 9.10. Então, $\psi(t) \in D(A^{\alpha})$, $0 \leq \alpha < 1$, com $\|A^{\alpha}\psi(t)\| \leq$ $\leq B(1-\alpha,1-\lambda)M(t)t^{1-\alpha-\lambda}$ e se $\alpha = 1/2$, $\lambda = 3/4$ vem que:

$$\|A^{1/2}\psi(t)\| \leq B(1/2,1/4)M(t)t^{-1/4}.$$

c) Se $a = u(0^+) \in D(A^{1/4})$ então $v = e^{-tA}a \in S[0,T]$ pelo Lema 9.8. De fato, podemos escrever que:

$$\|A^{1/2}v(t)\| = \|A^{1/2}e^{-tA}a\| = \|A^{1/4}e^{-tA}A^{1/4}a\| \leq \|A^{1/4}e^{-tA}\|\|A^{1/4}a\| \leq$$
$$\leq \|A^{1/4}a\|t^{-1/4} \leq C\ t^{-1/4}$$

Portanto, $v(t) = e^{-tA}a \in S[0,T]$.

Em vista das considerações a), b) e c) vemos que $e^{-tA}a + \int_0^t e^{-(t-s)A}Hu(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds$ pertence a $S[0,T]$ sempre que $u \in S[0,T]$, $a \in D(A^{1/4})$ e $\|Pf(t)\| =$ $= 0(t^{-3/4})$ $t \to 0^+$.

Enunciaremos agora o seguinte:

TEOREMA 10.1: Se $a \in E(\Omega)$ e $\|Pf\|$ for integrável em $[0,T]$,

$0 < T < \infty$, então a solução de

$$u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}Hu(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds$$

é única em $S[0,T]$.

<u>Demonstração</u>: Sejam u e v soluções em $S[0,T]$ e $w = u-v$,

Então, $w(t) = \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}(Hu(s)-Hv(s))ds$.

Pelo Lema 9-4 (9.21) temos:

$$\|Hu(s)-Hv(s)\| \le C\|A^{1/2}w(s)\| (\|A^{1/2}u(s)+\|A^{1/2}v(s)\|)$$

e daí

$$\|Hu(s)-Hv(s)\| \le Cs^{-1/2}s^{1/2}\|A^{1/2}w(s)\| (\|A^{1/2}u(s)\|+\|A^{1/2}v(s)\|) =$$
$$= C\ s^{1/4}\|A^{1/2}w(s)\| (s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\| + s^{1/4}\|A^{1/2}v(s)\|)s^{-1/2}.$$

Logo,

$$\|Hu(s)-Hv(s)\| \le C \sup_{0<s\le t} (s^{1/4}\|A^{1/2}w(s)\|)\cdot$$
$$\cdot \sup_{0<s\le t} \{(s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\| + s^{1/4}\|A^{1/2}v(s)\|\}s^{-1/2} \le$$
$$\le C \sup_{0<s\le t} (s^{1/4}\|A^{1/2}w(s)\|)\{\sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\| + \sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}v(s)\|\}s^{-1/2}$$

Chamando $D(t) = \sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}w(s)\|$ e por

$$K(t) = \max\{\sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\|,\ \sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}v(s)\|\}$$

vem

$$\|Hu(s)-Hv(s)\| \le 2C\ K(t)\ D(t)\ s^{-1/2} \qquad 0 < s \le t \le T$$

Por definição, $K(t)$ e $D(t)$ são funções monótonas e crescentes. $D(t)$ satisfaz, portanto a relação:

$$D(t) = \sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}w(s)\| \le t^{1/4}\|A^{1/2}w(t)\| \tag{10.7}$$

Usando os Lemas 9-8, 9-10 e (10.6) obteremos:

$$A^{1/2}w(t) = A^{1/2}\int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}(Hu(s)-Hv(s))ds$$

e

$$\|A^{1/2}w(t)\| \leq \int_0^t \|A^{3/4}e^{-(t-s)A}\|\|Hu(s)-Hv(s)\|ds \leq$$

$$\leq \int_0^t (t-s)^{-3/4}\cdot 2C\ K(t)\ D(t)\ s^{-1/2}\ ds =$$

$$= 2C\ K(t)\ D(t)\ B(1/2,1/4)t^{-1/4}$$

donde $A^{1/2}w(t)$ existe e

$$t^{1/4}\|A^{1/2}w(t)\| \leq 2C\ K(t)\ D(t)\ B(1/2,1/4) \qquad (10.8)$$

Pelo (10.7) vem:

$$D(t) \leq t^{1/4}\|A^{1/2}w(t)\| \leq 2C\ K(t)\ B(1/2,1/4)D(t)$$

e

$$D(t) \leq 2C\ K(t)\ B(1/2,1/4)D(t). \qquad (10.9)$$

Da definição de $K(t)$ segue-se que $K(0) = 0$ e $K(t)$ é contínua. Logo, podemos escolher um t_1 real e positivo tal que:

$$2C\ B(1/2,1/4)\ K(t_1) = k(t_1) < 1 \qquad *$$

Assim: $D(t_1) \leq 2C\ K(t_1)\ B(1/2,1/4)D(t_1) = k(t_1)D(t_1)$

$$D(t_1) \leq k(t_1)D(t_1) \Rightarrow (1-k(t_1))D(t_1) \leq 0$$

Como $D(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e $(1-k(t_1)) > 0$ concluimos que $D(t_1) = 0$. Mas $D(t_1) = 0$ implica $w(t) = 0$, pois

$$D(t_1) = \sup_{0<t\leq t_1} t^{1/4}\|A^{1/2}w(t)\| = 0 \quad \text{donde} \quad \|A^{1/2}w(t)\| = 0$$

ou seja:

$$(A^{1/2}w(t)|A^{1/2}w(t)) = (Aw(t)|w(t)) = 0 \quad \text{e} \quad w(t) = 0.$$

Assim, se $0 \leq t \leq t_1$ temos $w(t) = 0$ portanto, $u(t) = v(t)$.

Consideremos, agora, apenas intervalos do tipo $t_1 \leq t \leq$ $\leq T$, $T > 0$. Seja $I_1 = [t_1, T]$.

Como $A^{1/2}u$ e $A^{1/2}v$ são contínuas em I_1 segue-se que existe uma constante positiva K_1 tal que:

$$\|A^{1/2}u(s)\| \leq K_1 \quad \text{e} \quad \|A^{1/2}v(s)\| \leq K_1 \quad \text{se} \quad s \in I_1$$

Pelo Lema (-4 (9.21)

$$\|Hu(s)-Hv(s)\| \leq C\|A^{1/2}w(s)\|(\|A^{1/2}u(s)\| + \|A^{1/2}v(s)\|) \leq$$
$$\leq C(\sup_{t_1 \leq s \leq t} \|A^{1/2}w(s)\|)(\|A^{1/2}u(s)\| + \|A^{1/2}v(s)\|)$$

e

$$\|Hu(s)-Hv(s)\| \leq 2C\, K_1\, D_1(t) \tag{10.10}$$

onde,

$$D_1(t) = \sup_{t_1 \leq s \leq t} \|A^{1/2}w(s)\| = \sup_{0 < s \leq t} \|A^{1/2}w(s)\|$$

O teorema estará provado se demonstrarmos que é verdadeira a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO: Seja $t' \in I_1$ e $\delta > 0$ dado por $\delta = \dfrac{1}{(16CK_1)^4}$. Se $w(t) = 0$ em $[0,t']$ então $w(t) = 0$ em $[0,t'+\delta] \cap I_1$.

Demonstração: Consideremos $t'+\delta \leq T$. De $w(t) =$ $= \int_{t'}^{t} A^{1/4} e^{-(t-s)A}(Hu(s)-Hv(s))ds$ $t \in [t',T]$ obteremos:

$$A^{1/2}w(t) = \int_{t'}^{t} A^{3/4} e^{-(t-s)A}(Hu(s)-Hv(s))ds$$

e

$$\|A^{1/2}w(t)\| \leq \int_{t'}^{t} \|A^{3/4}e^{-(t-s)A}\|\,\|Hu(s)-Hv(s)\|ds \leq$$
$$\leq 2C\, K_1\, D_1(t) \int_{t'}^{t} (t-s)^{-3/4} ds = 8C\, K_1\, D_1(t)(t-t')^{1/4}$$

usando (10.10) e (9.29). Assim:

$$\|A^{1/2}w(t)\| \le 8C\ K_1\ D_1(t)(t-t')^{1/4} \qquad t \in [t',T] \tag{10.11}$$

Em particular, se tivermos $t \in [t',t'+\delta]$ a relação anterior fica:

$$\|A^{1/2}w(t)\| \le 8C\ K_1\ D_1(t)(t-t')^{1/4} \le 8C\ K_1\ D_1(t'+\delta)\delta^{1/4} \le$$
$$\le 8C\ K_1\ D_1(t'+\delta)\frac{1}{16CK_1} = \frac{1}{2}\ D_1(t'+\delta)$$

Temos agora:

$$\|A^{1/2}w(t)\| \le \frac{1}{2}\ D_1(t'+\delta) \tag{10.12}$$

e

$$D_1(t'+\delta) = \sup_{t_1 \le t \le t'+\delta} \|A^{1/2}w(t)\| \le \frac{1}{2}\ D_1(t'+\delta)$$

Logo,

$$D_1(t'+\delta) - \frac{1}{2}\ D_1(t'+\delta) \le 0$$

ou

$$\frac{1}{2}\ D_1(t'+\delta) \le 0$$

implica $D_1(t'+\delta) = 0$ se $t \in [t_1,t'+\delta]$.

Por outro lado temos também que:

$$D_1(t'+\delta) = \sup_{t_1 \le t \le t'+\delta} \|A^{1/2}w(t)\| = \sup_{0<t \le t'+\delta} \|A^{1/2}w(t)\|$$

Se $w(t) = 0$ em $[0,t']$, isto é, se

$$D(t_1) = \sup_{0<t \le t_1} \|A^{1/2}w(t)\| = 0$$

então

$$D_1(t'+\delta) = \sup_{0<t \le t'+\delta} \|A^{1/2}w(t)\| = 0 \qquad t \in [0,t'+\delta]$$

logo $w(t) = 0$ se $t \in [0,T]$. Concluimos que $u(t) = v(t)$ para $t \in [0,T]$. Assim ficam demonstrados a proposição e o teorema.

Observações: a) O Teorema 10-1 permanece válido se substituirmos o momento inicial $t = 0$ por qualquer outro momento inicial $t = t_1$.

Neste caso as equações integrais (9.9) e (9.10) se escrevem:

$$u(t) = e^{-(t-t_1)A}u(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{-(t-s)A}Fu(s)ds + \int_{t_1}^{t} e^{-(t-s)A}Pf(s)ds \qquad t \geq t_1$$

$$u(t) = e^{-(t-t_1)A}u(t_1) + \int_{t_1}^{t} A^{1/4}e^{-(t-s)A}Hu(s)ds + \int_{t_1}^{t} e^{-(t-s)A}Pf(s)ds \qquad t \geq t_1$$

b) Pela definição de $S[0,T]$ o Teorema 10.1 também permanece válido se o intervalo $[0,T]$ for substituido por qualquer $[0,T_1)$ $0 < T_1 \leq +\infty$.

Existência de soluções em $S[0,T]$

Daremos o seguinte:

TEOREMA (10-2): Suponhamos que

$$a \in D(A^{1/4}) \qquad a = u(0^+)$$

e

$$\|Pf\| = o(t^{-\frac{3}{4}}) \qquad t \to 0^+.$$

Então existe uma solução $u \in S[0,T]$ para algum $T > 0$ que depende de a e de Pf.

Demonstração: Mostraremos que uma solução existe construindo uma solução. Usaremos o método das aproximações sucessivas pondo:

$$u_o(t) = e^{-tA}a + \psi(t) \tag{10.13}$$

$$u_{n+1}(t) = u_o(t) + \phi(u_n,t) \quad n=0,1,2... \tag{10.14}$$

onde, como antes:

$$\psi(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds \tag{10.15}$$

$$\phi(u,t) = \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}Hu(s)ds \tag{10.16}$$

Das observações anteriores vemos que o processo de iteração pode ser continuado indefinidamente em $S[0,\infty)$.

A seqüência $K_n(t) = \sup\limits_{0<s\leq t} s^{1/4}\|A^{1/2}u_n(s)\|$ é monótona crescente, $K_n(t)$ é contínua para cada $n \in \mathbb{N}$ e $K_n(0) = 0$. Além disso, $K_n(t)$ satisfaz à seguinte relação de recorrência:

$$K_{n+1}(t) \leq K_o(t) + C\,B(1/2,1/4)K_n^2(t) \qquad t > 0 \tag{10.17}$$

De fato, vimos que:

$$\|A^{1/2}\phi(u,t)\| \leq C\,B(1/2,1/4)K^2(t)t^{-1/4}$$

donde

$$s^{1/4}\|A^{1/2}\phi(u,s)\| \leq t^{1/4}\|A^{1/2}\phi(u,t)\| \leq C\,B(1/2,1/4)K^2(t) \qquad s < t$$

Assim:

$$\sup_{0<s\leq t} s^{1/4}\|A^{1/2}\phi(u_n,s)\| \leq C\,B(1/2,1/4)K_n^2(t) \qquad s < t$$

sendo $\phi(u_n,s) = u_{n+1}(s) - u_o(s)$ vem:

$$\sup_{0\leq s\leq t} s^{1/4}\|A^{1/2}u_{n+1}(s)\| - \sup_{0\leq s\leq t} s^{1/4}\|A^{1/2}u_o(s)\| \leq$$

$$\leq \sup_{0\leq s\leq t} s^{1/4}\{\,|\|A^{1/2}u_{n+1}(s)\| - \|A^{1/2}u_o(s)\|\,|\} \leq$$

$$\leq \sup_{0\leq s\leq t} s^{1/4}\|A^{1/2}(u_{n+1}(s) - u_o(s))\| =$$

$$= \sup_{0<s<t} s^{1/4}\|A^{1/2}\phi(u_n, s)\| \leq C\ B(1/2,1/4)K_n^2(t)$$

Daí,

$$K_{n+1}(t) - K_o(t) \leq C_1\ B(1/2,1/4)K_n^2(t)$$

e

$$K_{n+1}(t) \leq K_o(t) + C_1\ B(1/2,1/4)K_n^2(t)$$

Devido ao fato de ser $K_n(t)$ contínua para todo $n \in \mathbb{N}$ e $K_o(0) = 0$, podemos sempre encontrar um T tal que $4C\ B(1/2,1/4)K_o(T) < 1 \quad T > 0.$

Mostra-se que $K_n(t)$ é limitada e que vale a desigualdade:

$$\frac{1+\sqrt{1-4C_1 B(1/2,1/4)K_o(T)}}{2C\ B(1/2,1/4)} \leq K_n(t) \leq \frac{1-\sqrt{1-4C\ B(1/2,1/4)K(T)}}{2C\ B(1/2,1/4)}$$

sendo $4C\ B(1/2,1/4)K_o(T) < 1.$

Fazendo: $Q(t) = \dfrac{1-\sqrt{1-4C\ B(1/2,1/4)K_o(t)}}{2C\ B(1/2,1/4)}$ vem que

$$K_n(t) \leq Q(t) \quad t \in (0,T] \quad e \quad Q(t) \leq 2\ K_o(t) \qquad (10.18)$$

Consideremos agora a igualdade:

$$w_n(t) = \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}\{Hu_{n+1}(s)-Hu_n(s)\}ds$$

sendo $w_n = u_{n+1} - u_n \quad n = 0,1,2.... \quad t \in (0,T].$

Fazendo $D_n(t) = \sup_{0<s\leq t} s^{1/4}\|A^{1/2}w_n(s)\|$ e usando o mesmo procedimento de antes obtemos a desigualdade

$$D_{n+1}(T) \leq 2C\ B(1/2,1/4)Q(T)D_n(T) \leq 4C\ B(1/2,1/4)K_o(T)D_n(T) \quad (10.19)$$

onde usamos o fato de que $Q(t) \leq 2\ K_o(t)$.

Assim, $D_{n+1}(T) \leq 4C\ B(1/2,1/4)K_o(T)D_n(T)$, $D_n(T) \geq 0$ implica em $\frac{D_{n+1}(T)}{D_n(T)} \leq 4C\ B(1/2,1/4)K_o(T) < 1$ que por sua vez implica a convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} D_n(T)$.

Como $D_n(T) = \sup_{0<s\leq T} s^{1/4}\|A^{1/2}w_n(s)\|$ temos:

$$\sup_{0<s\leq T} \sum_{n=0}^{\infty} s^{1/4}\|A^{1/2}w_n(s)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0<s\leq T} s^{1/4}\|A^{1/2}w_n(s)\| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} D_n(T) \quad s > 0$$

logo, $\sum_{n=0}^{\infty} t^{1/4}\|A^{1/2}w_n(t)\|$ converge forte e uniformemente em $(0,T]$. Então a seqüência $t^{1/4}A^{1/2}u_n(t)$ também converge uniformemente em $(0,T]$.

Sendo $A^{-1/2}$ limitado, pelo Lema 9-6, e $A^{1/2}$ fechado segue-se que $u_n(t)$ converge para um limite $u(t) \in D(A^{1/2})$ e $t^{1/4}\ A^{1/2}u_n(t)$ converge uniformemente para $t^{1/4}\ A^{1/2}u(t)$ em $(0,T]$.

De fato, seja $\lim A^{1/2}\ u_n(t) = v$.

Temos: $v_n = A^{1/2}u_n(t) \to v, t \in (0,T]$, $A^{1/2}$ fechado.

Sendo $A^{-1/2}$ contínuo vem:

$$\lim A^{-1/2}v_n = A^{-1/2} \lim v_n = A^{-1/2}v$$

Porém: $\lim A^{-1/2}v_n = \lim A^{-1/2}A^{1/2}u_n(t) = \lim u_n(t)$.

Como o limite é único, concluimos:

$$\lim u_n(t) = A^{-1/2}v.$$

Então, de

$$\begin{cases} u_n(t) \to A^{-1/2}v = u(t) \\ A^{1/2}u_n(t) \to v \end{cases} \qquad A^{1/2} \text{ fechado}$$

obtemos:
$$u(t) = A^{-1/2}v \in D(A^{1/2})$$

e
$$v(t) = A^{1/2}u(t)$$

De
$$K_n(t) = \sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}u_n(s)\|$$

vem

$$\lim K_n(t) = \lim\{\sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}u_n(s)\|\} =$$
$$= \sup_{0<s\le t} \lim\{s^{1/4}\|A^{1/2}u_n(s)\|\} = \sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\| = K(t)$$

e de $K_n(t) \le Q(t)$ temos $K(t) \le Q(t) \le 2\, K_o(t)$ com $t \in (0,T]$.

Façamos agora, $\alpha_n = \sup_{0<s\le T} s^{1/2}\|Hu_n(s)-Hu(s)\|$ e por (9.21) podemos escrever:

$$\alpha_n = \underset{0<s\le T}{} s^{1/2}\|Hu_n(s)-Hu(s)\| \le$$
$$\le C \sup_{0<s\le T} s^{1/2}\|A^{1/2}(u_n-u)\|\,(\|A^{1/2}u_n(s)\| + \|A^{1/2}u(s)\|) =$$
$$= C \sup_{0<s\le T} s^{1/4}\|A^{1/2}(u_n-u)\|\,(s^{1/4}\|A^{1/2}u_n(s)\| + s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\|) \le$$
$$\le C \sup_{0<s\le T} s^{1/4}\|A^{1/2}(u_n-u)\|\,(K_n(t) + K(t))$$

Daí segue-se que $\lim \alpha_n = 0$ pois:

$$K_n(T) \to K(T) \le 2\, K_o(T)$$

e

$$\lim t^{1/4}\|A^{1/2}(u_n-u)\| = \lim\|t^{1/4}A^{1/2}u_n - t^{1/4}A^{1/2}u\| = 0$$

porque

$$t^{1/4}A^{1/2}u_n \to t^{1/4}A^{1/2}u.$$

Podemos afirmar então que:

$$\phi(u_n,t) \to \phi(u,t)$$

De fato:

$$\phi(u_n,t) = \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}Hu_n(s)ds,$$

$$\phi(u_n,t)-\phi(u,t) = \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}\{Hu_n(s)-Hu(s)\|ds$$

e

$$\|\phi(u_n,t)-\phi(u,t)\| \leq \int_0^t \|A^{1/4}e^{-(t-s)A}\| \|Hu_n(s)-Hu(s)\|ds \leq$$

$$\leq \int_0^t s^{-1/2}\|A^{1/4}e^{-(t-s)A}\| \sup_{0<s\leq T} s^{1/2}\|Hu_n(s)-Hu(s)\|ds \leq$$

$$\leq \int_0^t (t-s)^{-1/4}\, \alpha_n\, s^{-1/2}ds = \alpha_n \int_0^t (t-s)^{-1/4}\, s^{-1/2}ds.$$

Assim $\lim\|\phi(u_n,t)-\phi(u,t) \leq \left(\int_0^t (t-s)^{-1/4} s^{-1/2}ds\right)\lim \alpha_n = 0$

e $\lim \phi(u_n,t) = \phi(u,t)$.

Como $u_{n+1}(t) = u_o(t) + \phi(u_n,t)$ $n=0,1,2...$ obtemos: $u(t) = u_o(t) + \phi(u,t)$ ou seja:

$$u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}Hu(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds$$

se fizermos $u_o(0) = a$ então $u(t)$ é contínua em $[0,T]$. $A^{1/2}u$ é contínua porque a convergência $t^{1/4}A^{1/2}u_n(t) \to$ $\to t^{1/4}A^{1/2}u(t)$ é uniforme.

Sendo $K(t) = \sup_{0<s\leq t} s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\|$, $K(t) \leq 2\, K_o(t)$ então $s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\| \leq 2\, K_o(t)t^{-1/4}$, isto é, $u(t) \in S[0,T]$.

Assim, $u(t)$ satisfaz a equação integral em $[0,T]$ e $u(t) \in S[0,T]$.

§11. Soluções em $S[0,\infty)$

Na demonstração da existência de soluções mostramos que existem funções $u(t)$ definidas em $[0,T]$ $T > 0$ que satisfazem a equação integral (9.10).

Mostraremos, agora, que com algumas modificações as soluções $u(t)$ podem ser estendidas a $[0,\infty)$. Para isto, daremos inicialmente o seguinte teorema:

TEOREMA 11-1: Sejam $a \in D(A^{1/4})$, $a = u(0^+)$, $\|Pf(t)\| = O(t^{-3/4})$ $t \to 0^+$ e $\|A^{1/4}a\| + B_1 M < \frac{1}{4CB_1}$ $B_1 = B(1/2,1/4)$ onde C é a constante do Lema (9.1) e $M = \sup\limits_{0<s<\infty} s^{3/4}\|Pf(s)\|$. Então existe uma solução $u \in S[0,\infty)$.

<u>Demonstração</u>: Usando o Lema 9-8 podemos escrever que:

$$t^{1/4}\|A^{1/2}e^{-tA}a\| = t^{1/4}\|A^{1/4}e^{-tA}A^{1/4}a\| \leq t^{1/4}t^{-1/4}\|A^{1/4}a\| =$$
$$= \|A^{1/4}a\|$$

isto é,

$$t^{1/4}\|A^{1/2}e^{-tA}a\| \leq \|A^{1/4}a\| \tag{11.1}$$

e

$$t^{1/4}\|A^{1/2}\psi(t)\| \leq B_1 M \tag{11.2}$$

pois,

$$\|A^{1/2}\psi(t)\| \leq B_1\, M(t)t^{-1/4} \leq B_1 M t^{-1/4} \quad \text{por } (10.5).$$

Da demonstração do teorema anterior havíamos obtido a relação:

$$K_n(t) = \sup_{0<s\leq t} s^{1/4}\|A^{1/2}u_n(s)\|$$

o que implica em:

$$K_o(t) = \sup_{0<s\leq t} s^{1/4}\|A^{1/2}u_o(s)\| = \sup_{0<s\leq t} s^{1/4}\|A^{1/2}e^{-tA}a+A^{1/2}\psi(s)\|$$

Assim

$$K_o(T) = \sup_{0<s\leq T} s^{1/4}\|A^{1/2}e^{-tA}a+A^{1/2}\psi(s)\| \leq \sup_{0<s\leq T} s^{1/4}\|A^{1/2}e^{-tA}a\| +$$
$$+ \sup_{0<s\leq T} s^{1/4}\|A^{1/2}\psi(s)\| \leq \sup_{0<s\leq T} \|A^{1/4}a\| + \sup_{0<s\leq T} B_1 M = \|A^{1/4}a\| + B_1 M.$$

Este resultado mais a hipótese de que $\|A^{1/2}a\| + B_1M \leq \frac{1}{4CB_1}$ nos conduz a

$$K_o(T) \leq \|A^{1/4}a\| + B_1M < \frac{1}{4CB_1} \tag{11.3}$$

Logo $4C\ B_1\ K_o(T) < 1$ qualquer que seja $T > 0$. Este resultado é suficiente para garantir a existência de uma solução em $S[0,T]$ o que se pode ver pelo seguinte teorema:

TEOREMA 11-2: No Teorema 11-1 substituamos a hipótese de que $\|A^{1/4}a\| + B_1M < \frac{1}{4C_1B_1}$ por $\|A^{1/4}a\| \leq \alpha_o$ e $\|Pf(t)\| \leq \mu_o$ $0 < t < \infty$ onde α_o e μ_o são reais positivos tais que:

$$0 < 6C_1B_1\alpha_o < 1 \quad e \quad 0 < 108C'^3\mu_o < \alpha_o \tag{11.4}$$

sendo $C' = \|A^{-1/4}\|$ e C_1, B_1 como antes. Então existe uma solução $u(t)$ em $S[0,\infty)$.

<u>Demonstração</u>: Vamos mostrar inicialmente que a solução do Teorema 10-2 existe no intervalo $[0,t']$ e satisfaz

$$\|A^{1/4}u(t')\| \leq \alpha_o \tag{11.5}$$

sendo

$$t' = \left(\frac{1}{4}\frac{\alpha_o}{\mu_o}\right)^{4/3} \tag{11.6}$$

Seja $\psi(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds$ como anteriormente.
Então

$$A^{1/2}\psi(t) = \int_0^t A^{1/2}e^{-(t-s)A}Pf(s)ds$$

e

$$\|A^{1/2}\psi(t)\| \leq \int_0^t \|A^{1/2}e^{-(t-s)A}\|\ \mu_o ds \leq 2\,\mu_o\ t^{1/2}$$

Logo

$$t^{1/4}\|A^{1/2}\psi(t)\| \leq 2\,\mu_o\ t^{3/4} \leq 2\,\mu_o\ t'^{3/4} \quad t \in (0,t'] \tag{11.7}$$

Também temos:

$$t^{1/4}\|A^{1/2}e^{-tA}a\| \le \|A^{1/4}a\| \le \alpha_o \qquad (11.8)$$

usando (11.1) e a hipótese de que $\|A^{1/4}a\| \le \alpha_o$.

Em vista destes dois últimos resultados e lembrando que:

$$K_n(t) = \sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}u_n(s)\|$$

obtemos:

$$K_o(t) = \sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}u_o(s)\| \le \sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}e^{-tA}a\| + \\ + \sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}\psi(s)\|$$

e daí

$$K_o(t') \le \alpha_o + 2\mu_o\, t'^{3/4}$$

$$K_o(t') \le \alpha_o + 2\mu_o t'^{3/4} \le \alpha_o + 2\mu_o |(\tfrac{1}{4}\tfrac{\alpha_o}{\mu_o})^{4/3}|^{3/4} = \\ = \alpha_o + 2\mu_o \frac{1}{4}\frac{\alpha_o}{\mu_o} = \alpha_o + \frac{\alpha_o}{2} = \frac{3}{2}\alpha_o.$$

Como, por hipótese, $0 < 6C_1B_1\alpha_o < 1$, ou seja, $0 < \alpha_o < \frac{1}{6C_1B_1}$, donde $0 < \frac{3}{2}\alpha_o < \frac{1}{4C_1B_1}$ vem que:

$$K_o(t') \le \frac{3}{2}\alpha_o < \frac{1}{4C_1B_1} \qquad (11.9)$$

Logo $4C_1B_1K_o(t') < 1$.

Este resultado é suficiente para que exista uma solução $u(t)$ em $[0,t']$, pelo Teorema 10.2. Também, a relação: $K(t) \le Q(t) \le 2\,K_o(t)$ é verdadeira para todo $t \in (0,t']$.

Da definição de $K(t)$ e usando (11.9) obtemos

$$t'^{1/4}\|A^{1/2}u(t')\| \le 3\alpha_o \qquad (11.10)$$

De fato, temos:

$$K(t) = \sup_{0<s\le t} s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\|$$

donde

$s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\| \le K(t)$ para todo $t \in (0,t']$.

Também $K(t') = \sup\limits_{0<s\le t'} s^{1/4}\|A^{1/2}u(s)\|$ e daí

$$t'^{1/4}\|A^{1/2}u(t')\| \le K(t') \le 2\, K_o(t') \le 2\cdot\frac{3}{2}\,\alpha_o = 3\alpha_o.$$

Logo

$$\|A^{1/2}u(t')\| \le 3\alpha_o\, t'^{-1/4} = 3\alpha_o\left[\left(\frac{1}{4}\frac{\alpha_o}{\mu_o}\right)^{4/3}\right]^{-1/4} =$$

$$= 3\alpha_o\left(\frac{4\mu_o}{\alpha_o}\right)^{+1/3}.$$

Por hipótese, $0 < 108C'^3\mu_o \le \alpha_o$ donde $0 < \dfrac{4\,\mu_o}{\alpha_o} \le \dfrac{1}{27C'^3}$.

Assim:

$$\|A^{1/2}u(t')\| \le 3\alpha_o\left(\frac{4\,\mu_o}{\alpha_o}\right)^{1/3} \le 3\alpha_o\left(\frac{1}{27C'^3}\right)^{1/3} = \frac{\alpha_o}{C'}.$$

Observando que podemos escrever $A^{1/4}u(t') =$ $= A^{-1/4}\,A^{1/2}u(t')$ obteremos daí $\|A^{1/4}u(t')\| = \|A^{-1/4}A^{1/2}u(t')\| \le$ $\le \|A^{-1/4}\|\,\|A^{1/2}u(t')\| \le C'\,\dfrac{\alpha_o}{C'} = \alpha_o$ onde, por hipótese, $C' = \|A^{-1/4}\|$.

Existe, então, uma solução $u(t)$ no intervalo $(0,t']$ satisfazendo as condições do teorema. Em vista das considerações a) e b) feitas no início do §10 podemos construir uma solução v com instante inicial coincidindo com t' e $v(t') = u(t')$, v está definida em $[t',2t']$ e $v \in S[t',2t']$.

A desigualdade $\|A^{1/4}v(2t')\| \le \alpha_o$ é satisfeita.

A função w definida por

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & 0 \le t \le t' \\ v(t) & t' \le t \le 2t' \end{cases}$$

é uma solução da equação integral em $[0,2t']$

$$u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}Hu(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds,$$

$$t \in [0,2t']$$

Seja $u \in S[0,t']$ e $v \in S[t',2t']$. Vimos que $K_o(t)$ é uma função contínua e que $4C_1 B_1 K_o(t') < 1$. Podemos encontrar, então, um número t_1' tal que $4C_1 B_1 K_o(t_1') < 1$ para $t' < t_1' < 2t'$. Pelo Teorema 10-2 existe uma solução única $u_1 \in S[0,t_1']$. Pelo Teorema 10-1 esta solução coincide com u em $[0,t_1']$. Também, temos que u_1 coincide com v em $[t',t_1']$. Portanto w e u_1 coincidem em $[0,t_1']$ e daí segue-se que a continuidade de $A^{1/2}w$ em $t = t'$. Assim, a solução u pode ser estendida de $[0,t']$ a $[0,2t']$ com a desigualdade: $\|A^{1/4}u(2t')\| \leq \alpha_o$ satisfeita.

A solução $u \in S[0,2t']$ pode ser estendida de $[0,2t']$ a $[0,3t']$ e este processo pode ser continuado indefinidamente sendo u estendida a $[0,nt']$. Assim, está provado o teorema.

§12. Soluções em $\bar{S}[0,\infty)$

Mostrada a existência de soluções da equação integral (9.10):

$$u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}Hu(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)}Pf(s)ds \qquad (9.10)$$

com $Hu = -A^{-1/4}P(u|\nabla)u$ precisamos agora verificar se $u = u(t)$ é diferenciável e se a solução u encontrada satisfaz o problema abstrato de valor inicial, P(2):

$$\frac{du}{dt} = -Au + Fu + Pf \qquad t > 0$$

$$u(0^+) = a$$

Para isto, vamos considerar a equação integral (9.9)

$$u(t) = e^{-tA}a + \int_0^t e^{-(t-s)A}Fu(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds \qquad (9.9)$$

e construir uma outra classe de soluções de modo que $Fu(s) = -P(u|\nabla)u$ tenha sentido. Daremos, inicialmente, a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 12-1: Sejam β e γ números reais tais que $\frac{1}{4} < \beta < \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} < \gamma < 1$ e $I = [T_1, T_2] \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo.

Indicaremos por $\bar{\bar{S}}(I)$ o conjunto das funções $u: I \to E(\Omega)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

a) u é contínua em I

b) $A^{\gamma}u$ e $A^{1/2}u$ são contínuas em $I-\{T_1\}$

c) $(t-T_1)^{\gamma-\beta}\|A^{\gamma}u(t)\|$ e $(t-T_1)^{1/2-\beta}\|A^{1/2}u(t)\|$ são limitadas quando $t \to 0^+$.

Pelas definições de $S(I)$ e $\bar{\bar{S}}(I)$ observamos que $\bar{\bar{S}}(I) \subset S(I)$ e também que se $u \in \bar{\bar{S}}(I)$ então Fu está bem definida de acordo com o seguinte lema:

LEMA 12-1: Seja $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 3/4$. Então para todo $u,v \in D(A^{\gamma})$ existe uma constante C_2 que depende de γ e Ω tal que as seguintes desigualdades valem

$$\|Fu\| \le C_2\|A^{1/2}u\|\,\|A^{\gamma}u\| \qquad (12.1)$$

$$\|Fu-Fv\| \le C_2(\|A^{\gamma}u\| \cdot \|A^{1/2}(u-v)\| + \|A^{1/2}v\|\,\|A^{\gamma}(u-v)\|) \qquad (12.2)$$

A demonstração (veja [10]) deste lema envolve teoremas sobre interpolação de espaços e por isto não será dada aqui.

Faremos agora algumas considerações sobre os termos que aparecem na equação integral (9.9). Seja então:

$$Z(t) = e^{-tA}a$$
$$V(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds$$
$$U(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}Fu(s)ds$$

Vamos supor que $u \in \bar{S}[0,T]$ $T > 0$. Então a função $K(t)$ definida por:

$$K(t) = N(w,t,\beta,\gamma) = \sup_{0<s\leq t} s^{\alpha-\beta}\|A^{\alpha}w(s)\|$$

é contínua, limitada em $(0,T]$ e monótona crescente em t. Usando a desigualdade (12.1) podemos mostrar que:

$$\|Fu(s)\| \leq C_2\ K^2(t)\ s^{2\beta-\gamma-1/2} \qquad 0 < s \leq t \leq T \qquad (12.3)$$

De fato, temos:

$$\|Fu(s)\| \leq C^2\|A^{1/2}u(s)\|\,\|A^{\gamma}u(s)\|$$

donde

$$\|Fu(s)\| \leq C^2(s^{1/2-\beta}\|A^{1/2}u(s)\|)s^{\beta-1/2}(s^{\gamma-\beta}\|A^{\gamma}u(s)\|)s^{\beta-\gamma} \leq$$
$$\leq C^2\ K^2(t)\ s^{2\beta-\gamma-1/2}.$$

A continuidade de Fu em $(0,T]$ segue de (12.2).

$A^{\alpha}U$ é contínua em $(0,T]$ para qualquer $\alpha \in [0,1)$, pois, temos:

$$A^{\alpha}U(t) = \int_0^t A^{\alpha}e^{-(t-s)A}Fu(s)ds$$

e

$$\|A^{\alpha}U(t)\| \leq \int_0^t \|A^{\alpha}e^{-(t-s)A}\|\,\|Fu(s)\|\,ds \leq$$
$$\leq C_2\ K^2(t)\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\ s^{2\beta-\gamma-1/2}ds =$$
$$= C_2\ K^2(t)\ B(2\beta-\gamma+1/2,1-\alpha)t^{2\beta-\gamma-\alpha+1/2}$$

por (12.3) e (9.29).

Então:

$$\|A^{\alpha}U(t)\| \leq C_2\ K^2(T)B(2\beta-\gamma+1/2,1-\alpha)t^{2\beta-\gamma-\alpha+1/2} \quad t\in(0,T] \qquad (12.4)$$

sendo $K(t) \leq K(T)$.

Pondo $U(0) = 0$ podemos verificar que $U(t)$ é também contínua em $[0,T]$.

Se fizermos $\mu = \beta-\gamma+1/2$ $(0 \leq \mu < 1/4)$ e $B_2 = B(2\beta-\gamma+1/2,1-\alpha)$ obtemos de (12.4) que

$$t^{\alpha-\beta}\|A^{\alpha}U(t)\| \leq C_2\ B_2\ K^2(t)t^{\beta-\gamma+1/2} =$$
$$= C_2\ B_2\ K^2(t)t^{\mu} \leq C_2\ B_2\ K^2(T)T^{\mu} \quad t \in (0,T]$$

e

$$t^{\alpha-\beta}\|A^{\alpha}U(t)\| \leq C_2\ B_2\ K^2(T)T^{\mu}, \qquad (12.5)$$

nos diz que $U \in \bar{S}[0,T]$.

Vamos tomar agora a função $V(t)$ e supor que

$$\sup_{0<s\leq t} s^{1-\beta}\|Pf(s)\| \leq M \quad t \in (0,T],\ M \text{ constante} \qquad (12.6)$$

Então, com procedimento semelhante acima, mostramos que $A^{\alpha}V(t)$ é contínua em $[0,T]$ e satisfaz a desigualdade

$$t^{\alpha-\beta}\|A^{\alpha}V(t) \leq MB(\beta,1-\alpha) \qquad (12.7)$$

Temos

$$A^{\alpha}V(t) = \int_0^t A^{\alpha}e^{-(t-s)A}Pf(s)ds$$

e

$$\|A^{\alpha}V(t)\| \leq \int_0^t \|A^{\alpha}e^{-(t-s)A}\|\|Pf(s)\|ds =$$
$$= \int_0^t \|A^{\alpha}e^{-(t-s)A}\|(s^{1-\beta}\|Pf(s)\|s^{\beta-1} \leq \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\ Ms^{\beta-1}\ ds =$$
$$= MB(1-\alpha,\beta)t^{\beta-\alpha}.$$

Assim, $t^{\alpha-\beta}\|A^{\alpha}V(t)\| \leq MB(1-\alpha,\beta)$ $t \in (0,T]$ para qualquer $0 \leq \alpha < 1$. Se $V(0) = 0$ então $V(t)$ é contínua em $[0,T]$.

Logo $V \in \bar{S}[0,T]$.

Seja, agora, $Z(t) = e^{-tA}a$, $a \in D(A^{\beta})$.

Podemos escrever:

$$A^{\alpha}Z(t) = A^{\alpha}e^{-tA}a = A^{\alpha}A^{-\beta}e^{-tA}A^{\beta}a \quad \text{e}$$

$$\|A^{\alpha}Z(t)\| \leq \|A^{\alpha-\beta}e^{-tA}\|\|A^{\beta}a\| \leq t^{\beta-\alpha}\|A^{\beta}a\| \quad \text{donde}$$

$$t^{\alpha-\beta}\|A^{\alpha}Z(t)\| \leq t^{\alpha-\beta}t^{\beta-\alpha}\|A^{\beta}a\| = \|A^{\beta}a\| \tag{12.7}$$

para $0 < \beta \leq \alpha < 1$ $t > 0$ e este resultado implica em que $Z \in \bar{S}[0,\infty)$.

Concluimos, portanto, que sob as condições:

$$\mu = \beta - \gamma + 1/2 \geq 0 \tag{12.8}$$

$$\sup_{0<s\leq t} s^{1-\beta}\|Pf(s)\| \leq M \tag{12.9}$$

$$a \in D(A^{\beta}) \quad 0 < \beta \leq \alpha < 1 \tag{12.10}$$

todos os termos de (9.9) pertencem a $\bar{S}[0,T]$ sempre que $u \in \bar{S}[0,T]$. Quanto à unicidade de soluções, se existirem, da equação (9.9) temos o seguinte teorema:

TEOREMA 12-1: Se $a \in E(\Omega)$ e $\|Pf\|$ é integrável em $[0,T]$, então a solução de (9.9) é única em $\bar{S}(0,T]$.

<u>Demonstração</u>: Observamos que $\bar{S}[0,T] \subset S[0,T]$. Mas, em $S[0,T]$ as soluções são únicas, quando existem, pelo Teorema 10.1. Logo, são únicas em $\bar{S}[0,T]$.

TEOREMA 12-2: Vamos supor que $a \in D(A^{\beta})$ e $\|Pf(t)\| = O(t^{-1+\beta})$, $t \to 0^{+}$ onde $\beta \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{4} < \beta < \frac{1}{2}$. Então existe em $\bar{S}[0,T]$ uma solução u de (9.9) para todo γ tal que $\frac{3}{4} < \gamma < \beta + \frac{1}{2}$ sendo que T depende de β, γ e $\|A^{\beta}a\|$.

Demonstração: A demonstração é inteiramente análoga à do Teorema 10.2. Constroi-se uma solução por aproximações sucessivas e mostra-se que u_n converge. Mostramos que u_n convergia em $S[0,T]$ usando o fato de que sendo $K_n(t)$ contínua, para todo $n \in N$ e $t \in [0,\infty)$, podíamos encontrar um T tal que $4C_1 B_1 K_o(T) < 1$ $T > 0$.

Seja, então, $\mu = \beta - \gamma + 1/2 \geq 0$ e

$$K_n(t) = N(u_n,t,\beta,\gamma) = \sup_{\substack{0<s\leq t\\ \alpha=1/2}} s^{\alpha-\beta}\|A^\alpha u_n(s)\|$$

Logo,

$$K_{n+1}(t) = \sup_{0<s\leq t} s^{\alpha-\beta}\|A^\alpha u_o(s)+A^\alpha U(s)\| \leq$$

$$\leq \sup_{0<s\leq t} s^{\alpha-\beta}\|A^\alpha u_o(s)\| + \sup_{0<s\leq t} s^{\alpha-\beta}\|A^\alpha U(u_n,s)\|$$

e $K_{n+1}(t) \leq K_o(t) + C_2 B_2 t^\mu K_n^2(t)$ por (12.5).

Por (10.13) $u_o(s) = e^{-sA}a + V(s)$ e pondo $M(t) = \sup_{0<s\leq t} s^{1-\beta}\|Pf(s)\|$ $t > 0$ obtemos:

$$K_o(t) = \sup_{0<s\leq t} s^{\alpha-\beta}\|A^\alpha e^{-sA}a+A^\alpha V(s)\| \leq$$

$$\leq \sup_{0<s\leq t} s^{\alpha-\beta}\|A^\alpha e^{-sA}a\| + \sup_{0<s\leq t} s^{\alpha-\beta}\|A^\alpha V(s)\|.$$

Assim

$$K_o(t) \leq \|A^\beta a\| + M(t)\ B(\beta,1-\gamma) \quad \text{por (12.6) e (12.7).} \qquad (12.11)$$

De $K_o(t) = \sup_{0<s\leq t} s^{\alpha-\beta}\|A^\alpha u_o(s)\|$ observamos que $K(0) = 0$ e como $K_o(t)$ é contínua e $M(t)$ limitada em $[0,T_1]$ $T_1>0$ podemos encontrar T tal que:

$$(\|A^\beta a\| + M(T)\ B(\beta,1-\gamma))T^\mu < \frac{1}{4C_2B_2} .$$

Então

$$\frac{1}{4C_2B_2} > (\|A^\beta a\| + M(T)\ B(\beta,1-\gamma))T^\mu \geq K_o(T)T^\mu$$

donde

$$4C_2\ B_2\ K_o(T)T^{\mu} < 1 \tag{12.12}$$

Com este resultado e procedendo-se do mesmo modo que no Teorema 10.2 mostra-se que $u_{n+1} \in \bar{S}[0,T]$ converge para $u \in \bar{S}[0,T]$ e que estas soluções podem ser estendidas a $\bar{S}(0,\infty)$.

Passaremos agora à diferenciabilidade das soluções em $\bar{S}(0,T]$ e $S(0,T]$. Como preparação daremos alguns resultados em forma de lemas:

LEMA 12-2: Seja $a \in E(\Omega)$ e $\|Pf(t)\| = O(t^{-1+\varepsilon})$ para algum $\varepsilon > 0$ quanto $t \to 0^+$ e $u \in \bar{S}[0,T]$ uma solução de (9.9). Então $A^{\alpha}u \in C^{\theta}(0,T]$ para todo α e θ tais que $0 \le \alpha < 1$ e $0 < \theta \le 1-\alpha$.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos u uma solução de (9.9) em $\bar{S}[0,T]$.

Temos de mostrar que $A^{\alpha}Z,\ A^{\alpha}V,\ A^{\alpha}U \in C^{\theta}(0,T]$ onde, como já foi definido:

$$Z(t) = e^{-tA}a$$
$$V(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}Pf(s)ds$$
$$U(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}Fu(s)ds$$

a) $A^{\alpha}Z \in C^{\theta}(0,T]$.

Seja $t \in [\varepsilon,T]$, $\varepsilon > 0$ qualquer, e $0 < \theta < 1-\alpha$. Podemos escrever que

$$\Delta_{\delta}A^{\alpha}Z = A^{\alpha}Z(t+\delta) - A^{\alpha}Z(t) = A^{\alpha}e^{-(t+\delta)A}a - A^{\alpha}e^{-tA}a =$$
$$= A^{\alpha}e^{-tA}e^{-\delta A}a - A^{\alpha}e^{-tA}a =$$
$$= (A^{-\theta}e^{-\delta A})(A^{\alpha+\theta-\beta}e^{-tA})(A^{\beta}a) - (A^{-\theta}e^{-\delta A})(A^{\alpha+\theta-\beta}e^{-(t-\delta)A})(A^{\beta}a)$$

e

$$\|\Delta_\delta A^\alpha Z\| = \|A^{-\theta}e^{-\delta A}\|\|A^{\alpha+\theta-\beta}e^{-tA}\|\|A^\beta a\| +$$

$$+ \|A^{-\theta}e^{-\delta A}\|\|A^{\alpha+\theta-\beta}e^{-(t-\delta)A}\|\|A^\beta a\| \leq \delta^\theta\|A^\beta a\|t^{-\alpha-\theta+\beta} +$$

$$+ \delta^\theta\|A^\beta a\|(t-\delta)^{-\alpha-\theta+\beta} \leq 2k\|A^\beta a\|\delta^\theta = k'\delta^\theta,$$ k' independente de t

onde $k = \max\{\epsilon^\lambda,\ T^\lambda,\ (\epsilon-\delta)^\lambda\ (T-\delta)^\lambda\}$ $\lambda = -\alpha-\theta+\beta$.

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário temos

$$A^\alpha Z \in C^\theta(0,T] \qquad 0 < \theta < 1-\alpha.$$

b) $A^\alpha V \in C^\theta(0,T]$.

$$\Delta_\delta A^\alpha V = A^\alpha V(t+\delta) - A^\alpha V(t) = A^\alpha \int_0^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A}Pf(s)ds -$$

$$- A^\alpha \int_0^t e^{-(t-s)A}\,Pf(s)ds =$$

$$= (e^{-\delta A}-I)A^{-\theta}\int_0^t A^{\alpha+\theta}e^{-(t-s)A}Pf(s)ds + \int_t^{t+\delta} A^\alpha e^{-(t+\delta-s)A}Pf(s)ds.$$

Logo

$$\|\Delta_\delta A^\alpha V\| \leq \|(e^{-\delta A}-I)A^{-\theta}\| \int_0^t \|A^{\alpha+\theta}e^{-(t-s)A}\|\|Pf(s)\|ds +$$

$$+ \int_t^{t+\delta} \|A^\alpha e^{-(t+\delta-s)A}\|\|Pf(s)\|ds.$$

Podemos fazer uma estimativa de $\|(e^{-\delta A}-I)A^{-\theta}\|$ da seguinte maneira; seja $v \in D(A^{-\theta})$. Então $x = A^{-\theta}v$, $v = A^\theta x$ e $x \in D(A^\theta)$. Pelo Lema 9.9 (9.31) temos:

$$\|(e^{-\delta A}-I)A^{-\theta}v\| = \|(e^{-\delta A}-I)x\| \leq \frac{1}{\theta}\delta^\theta\|A^\theta x\| = \frac{1}{\theta}\delta^\theta\|A^\theta A^{-\theta}v\| =$$

$$= \frac{1}{\theta}\delta^\theta\|v\|.$$

Daí:

$$\|(e^{-\delta A}-I)A^{-\theta}\| \leq \frac{\delta^\theta}{\theta} \tag{12.14}$$

Assim

$$\|\Delta_\delta A^\alpha V\| \leq \frac{\delta^\theta}{\theta}\int_0^t \|A^{\alpha+\theta}e^{-(t-s)A}\|\|Pf(s)\|ds +$$

$$+ \int_t^{t+\delta}\|A^\alpha e^{-(t+\delta-s)A}\|\|Pf(s)\|ds \leq \frac{\delta^\theta}{\theta}\int_0^t (t-s)^{-\alpha-\theta}M(t)s^{\epsilon-1}ds +$$

$$+ M(t)\int_0^{t+\delta}(t+\delta-s)^{-\alpha}\, s^{\epsilon-1}ds = \frac{\delta^{\theta}}{\theta}M(t)I_1 + M(t)I_2.$$

$$I_1 = \int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\theta)}s^{\epsilon-1}ds = t^{-\alpha-\theta+\epsilon}\int_0^1 x^{\epsilon-1}(1-x)^{-\alpha-\theta}dx =$$
$$= t^{-\alpha-\theta+\epsilon}\, B(\epsilon,1-\alpha-\theta)$$

$$I_2 = \int_t^{t+\delta}(t+\delta-s)^{-\alpha}\, s^{\epsilon-1}ds = \int_0^{\delta}(\delta-x)^{-\alpha}(t+x)^{\epsilon-1}dx \le$$
$$\le \int_0^{\delta}(\delta-x)^{-\alpha}\, t^{\epsilon-1}dx = \frac{t^{\epsilon-1}}{1-\alpha}\,\delta^{1-\alpha}$$

Substituindo I_1 e I_2 vem:

$$\|\Delta_{\delta}A^{\alpha}V\| \le \left(\epsilon^{-\alpha-\theta+\epsilon}\, B(\epsilon,1-\alpha-\theta) + \frac{\epsilon^{\epsilon-1}}{1-\alpha}\right)M(T)\delta^{\theta}$$

pois, se $\epsilon < 1$ $-\alpha-\theta+\epsilon<0$ e $\epsilon-1<0$, $M(t) < M(T)$ e $\delta^{1-\alpha} < \delta^{\theta}$ se $\theta < 1-\alpha$.

Deste modo, $\|A^{\alpha}V(t+\delta) - A^{\alpha}V(t)\| \le K(\epsilon,\theta,T)\delta^{\theta}$

K independente de $t \in [\epsilon,T]$ e

$$A^{\alpha}V \in C^{\theta}(0,T] \qquad 0 < \theta < 1-\alpha \tag{12.15}$$

c) $A^{\alpha}U \in C^{\theta}(0,T]$.

$$\Delta_{\delta}A^{\alpha}U = A^{\alpha}U(t+\delta) - A^{\alpha}U(t).$$
$$\Delta_{\delta}A^{\alpha}U = (e^{-\delta A}-I)A^{-\theta}\int_0^t A^{\alpha+\theta}e^{-(t-s)A}Fu(s)ds +$$
$$+\int_t^{t+\delta}A^{\alpha}e^{-(t+\delta-s)A}Fu(s)ds$$

$$\|\Delta_{\delta}A^{\alpha}U\| \le \|(e^{-\delta A}-I)A^{-\theta}\|\int_0^t \|A^{\alpha+\theta}e^{-(t-s)A}\|\,\|Fu(s)\|ds +$$
$$+\int_t^{t+\delta}\|A^{\alpha}e^{-(t+\delta-s)A}\|\,\|Fu(s)\|ds.$$

$$\|\Delta_{\delta}A^{\alpha}U\| \le \frac{\delta^{\theta}}{\theta}C_2K^2(t)\int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\theta)}s^{2\beta-\gamma-1/2}ds +$$
$$+ C_2\, K^2(t)\int_t^{t+\delta}(t-s+\delta)^{-\alpha}\, s^{2\beta-\gamma-1/2}ds =$$
$$= \frac{\delta^{\theta}}{\theta}C_2\, K^2(t)I_1 + C_2\, K^2(t)I_2$$

por (12.14), (12.3) e (9.29).

$$I_1 = \int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\theta)} s^{2\beta-\gamma-1/2} ds =$$

$$= \int_0^1 t^{-(\alpha+\theta)} (1-x)^{-(\alpha+\theta)} t^{2\beta-\gamma-1/2} x^{2\beta-\gamma-1/2} ds =$$

$$= t^{2\beta-\alpha-\theta-\gamma-1/2} \; B(2\beta-\gamma+1/2, 1-\alpha-\theta)$$

$$I_2 = \int_t^{t+\delta} (t+\delta-s)^{-\alpha} \; s^{2\beta-\gamma-1/2} ds = \int_0^\delta (\delta-x)^{-\alpha} (t+x)^{2\beta-\gamma-1/2} dx =$$

$$= \int_0^\delta (\delta-x)^{-\alpha} t^{2\beta-\gamma-1/2} dx = t^{2\beta-\gamma-1/2} \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Substituindo:

$$\|\Delta_\delta A^\alpha U\| \le C_2 \; K^2(t) \frac{\delta^\theta}{\theta} t^{2\beta-\alpha-\theta-1/2} \; B(2\beta-\gamma+1/2, 1-\alpha-\theta) +$$

$$+ C_2 \; K^2(t) \; t^{2\beta-\alpha-\theta-1/2} \; \delta^{1-\alpha} \le$$

$$\le C_2 \; K^2(T) \epsilon^{2\beta-\alpha-\theta-1/2} \left(\frac{B(2\beta-\gamma+1/2, 1-\alpha-\theta}{\theta} + \frac{1}{1-\alpha}\right)\delta^\theta =$$

$= C'(\epsilon,\alpha,\beta,T)\delta^\theta$ com C' independente de $t \in [\epsilon,T]$, $\theta < 1-\alpha$.

Assim, para todo $t \in [\epsilon,T]$ $\epsilon > 0$ $\theta < 1-\alpha$ $A^\alpha U \in C^\theta[\epsilon,T]$ e como ϵ é arbitrário temos

$$A^\alpha U \in C^\theta (0,T] \tag{12.16}$$

O Lema 12.2 implica que se $\frac{3}{4} < \lambda < 1-\theta$ então $Fu \in C^\theta (0,T]$ para qualquer $0 < \theta < \frac{1}{4}$.

De fato, o lema nos diz que $A^{1/2}u$ e $A^\lambda u \in C^\theta (0,T]$ para $\frac{3}{4} < \lambda < 1-\theta$ e por (12.2) temos

$$\|Fu(t+\delta)-Fu(t)\| \le C_2(\|A^\lambda u(t+\delta)\| \cdot \|A^{1/2}u(t+\delta)-A^{1/2}u(t)\| +$$

$$+ \|A^{1/2}u(t)\| \cdot \|A^\lambda u(t+\delta)-A^\lambda u(t)\|) \le c_2(\|A^\lambda u(t+\delta) k_1\delta^\theta + \|A^{1/2}u(t)\| k_2\delta^\theta) =$$

$$= [C_2(k_1\|A^\lambda u(t+\delta)\| + k_2\|A^{1/2}u(t)\|\delta^\theta$$

o que nos diz ser

$$Fu \in C^{\theta}(0,T] \tag{12.17}$$

LEMA 12-3: Sejam α, θ e μ números reais tais que $0 \leq \alpha < 1$

$0 < \mu \;\; \theta - \alpha$ e

$$v(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}\{f(s)-f(t)\}\,ds \quad t \in [0,T] \quad T > 0 \tag{12.18}$$

onde $f \in C^{\theta}[0,T]$. Então $A^{1+\alpha}v(t)$ existe para cada $t \in [0,T]$ e pode ser escrito como

$$A^{1+\alpha}v(t) = \int_0^t A^{1+\alpha}e^{-(t-s)A}\{f(s)-f(t)\}\,ds. \tag{12.19}$$

Além disso:

$$A^{1+\alpha}v \in C^{\mu}[0,T]. \tag{12.20}$$

<u>Demonstração</u>: Se $f \in C^{\theta}[0,T]$ então existe $K > 0$ tal que

$$\|f(t)-f(s)\| \leq K|t-s|^{\theta} \quad t,s \in [0,T]. \quad \text{Logo:}$$

$$A^{1+\alpha}v(t) = \int_0^t A^{1+\alpha}e^{-(t-s)A}\{f(s)-f(t)\}\,ds \quad \text{e}$$

$$\|A^{1+\alpha}v(t) \leq \int_0^t \|A^{1+\alpha}e^{-(t-s)A}\|\,\|f(s)-f(t)\|\,ds \leq$$

$$= K\int_0^t (t-s)^{-1-\alpha+\theta}\,ds \quad \text{por (9.29) e}$$

$$\|A^{1+\alpha}v(t)\| \leq \frac{K}{\theta-\alpha}\,t^{\theta-\alpha} \qquad t \in [0,T].$$

Logo, (12.19) é válida, $v \in D(A^{1+\alpha})$ e

$$\|A^{1+\alpha}v(t)\| \leq \frac{KT^{\theta-\alpha}}{\theta-\alpha}$$

Do mesmo modo podemos mostrar que

$$\|A^{1+\alpha+\mu}v(t)\| \leq \frac{KT^{\theta-\alpha-\mu}}{\theta-\alpha-\mu}$$

donde $v \in D(A^{1+\alpha+\mu})$. Vamos mostrar agora que $A^{1+\alpha}v \in C^{\mu}[0,T]$.

Seja $\Delta_{\delta}A^{1+\alpha}v(t) = A^{1+\alpha}v(t+\delta) - A^{1+\alpha}v(t) \quad 0<t<t+\delta\leq T.$

Então

$$\Delta_\delta A^{1+\alpha} v(t) = A^{1+\alpha}\int_0^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t+\delta)\}ds -$$

$$- A^{1+\alpha}\int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds =$$

$$= A^{1+\alpha}\int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t+\delta)\}ds +$$

$$+ A^{1+\alpha}\int_0^{t} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t+\delta)\}ds - A^{1+\alpha}\int_0^{t} e^{-(t-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds$$

$$= A^{1+\alpha}\int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t+\delta)\}ds +$$

$$+ A^{1+\alpha}\int_0^{t} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds - A^{1+\alpha}\int_0^{t} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds +$$

$$+ A^{1+\alpha}\int_0^{t} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds - A^{1+\alpha}\int_0^{t} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds$$

onde somamos e subtraimos o último termo.

Podemos escrever $\Delta_\delta A^{1+\alpha} v(t)$ ainda na seguinte forma:

$$\Delta_\delta A^{1+\alpha} v(t) = A^{1+\alpha}\int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t+\delta)\}ds +$$

$$+ A^{1+\alpha}\int_0^{t} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t+\delta)\}ds +$$

$$+ A^{1+\alpha}\int_0^{t} (e^{-\delta A}-I)e^{-(t-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds$$

Chamemos:

$$w_1 = A^{1+\alpha}\int_0^{t} (e^{-\delta A}-I)e^{-(t-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds$$

$$w_2 = A^{1+\alpha}\int_0^{t} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(t)-f(t+\delta)\}ds$$

$$w_3 = A^{1+\alpha}\int_0^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t+\delta)\}ds$$

$$w_1 = A^{1+\alpha}(e^{-\delta A}-I)\int_0^{t} e^{-(t-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds = (e^{-\delta A}-I)A^{1+\alpha}\ v(t).$$

Por (12.22) vimos que $\|A^{\mu}(A^{1+\alpha}v(t))\| \le C$ isto é, $A^{1+\alpha}v \in D(A^{\mu})$. Seja então $A^{1+\alpha}v = Z$ e $A^{1+\alpha}v(t) = Z(t)$. $w_1 = (e^{-\delta A}-I)Z$. Por (9.31) obtemos:

$$\|w_1\| = \|(e^{-\delta A}-I)Z\| \le \frac{\delta^\mu}{\mu}\|A^\mu Z\| = \frac{\delta^\mu}{\mu}\|A^\mu A^{1+\alpha}v(t)\| =$$
$$= \frac{\delta^\mu}{\mu}\|A^{1+\alpha+\mu}v(t)\| \le \frac{\delta^\mu}{\mu}\ \frac{KT^{\theta-\alpha-\mu}}{\theta-\alpha-\mu} = C\ \delta^\mu$$

sendo C uma constante independente de t.

Assim:

$$\|w_1\| \le C\delta^\mu \tag{12,23}$$

$$w_2 = A^{1+\alpha}\int_0^t e^{-(t+\delta-s)A}\{f(t)-f(t+\delta)\}ds =$$
$$= A^{\theta-\mu}e^{-\delta A}\int_0^t A^{1+\alpha+\mu-\theta}\ e^{-(t-s)A}\{f(t)-f(t+\delta)\}ds.$$
$$\|w_2\| \le \|A^{\theta-\mu}e^{-\delta A}\|\int_0^t\|A^{1+\alpha+\mu-\theta}e^{-(t-s)A}\|\|f(t)-f(t+\delta)\|ds \le$$
$$\le \frac{KT^{\theta-\alpha-\mu}}{\theta-\alpha-\mu}\ \delta^\mu = C'\delta^\mu$$

$$\|w_2\| \le C'\delta^\mu \tag{12.24}$$

com C' constante independente de t.

$$w_3 = A^{1+\alpha}\int_0^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t+\delta)\}ds =$$
$$= \int_t^{t+\delta} A^{1+\alpha}\ e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t+\delta)\}ds$$
$$\|w_3\| \le \int_t^{t+\delta}\|A^{1+\alpha}\ e^{-(t+\delta-s)A}\|\|f(s)-f(t+\delta)\|ds \le$$
$$\le K\int_t^{t+\delta}(t+\delta-s)^{\theta-1-\alpha}ds = \frac{K}{\theta-\alpha}\delta^{\theta-\alpha} \le \frac{K}{\theta-\alpha}\delta^\mu.$$

Assim:

$$\|w_3\| \le C''\delta^\mu \tag{12.25}$$

C'' independente de t.

Finalmente:

$$\|A^{1+\alpha}v(t+\delta)-A^{1+\alpha}v(t)\| \le \|w_1\| + \|w_2\| + \|w_3\| \le C\ \delta^\mu$$

isto é,

$$A^{1+\alpha}v \in C^\mu[0,T].$$

LEMA 12-4: Seja u definida por

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds \quad t \in [0,T] \quad T > 0 \tag{12.26}$$

sendo $f \in C^\theta[0,T]$, $\theta \in (0,1)$. Então $u \in C^{1+\nu}(0,T]$ e $Au \in C^\nu(0,T]$ com $0 < \nu < \theta$.

Além disso, $u' = \frac{du}{dt}$ pode ser expresso como

$$u' = \frac{du}{dt} = -Au + f \tag{12.27}$$

ou

$$u' = e^{-tA}f(t) - \int_0^t Ae^{-(t-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds. \tag{12.28}$$

<u>Demonstração</u>: De (12.18) $v(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds =$

$$= \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds - \int_0^t e^{-(t-s)A}f(t)ds.$$

Então,

$$v(t) = u(t) - \int_0^t e^{-(t-s)A}f(t)ds \tag{12.29}$$

Se $S(t)$ é um semigrupo contínuo ((A-3)) mostra-se que:

$$u - S(t)u = -A\int_0^t S(s)uds \tag{12.30}$$

ou seja

$$\int_0^t S(s)uds = +A^{-1}(S(t)u-u) \tag{12.31}$$

Então

$$\int_0^t e^{-(t-s)A}f(t)ds = -A^{-1}(e^{-tA}f(t)-f(t)) \quad \text{e}$$

$$u(t) = v(t) + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(t)ds =$$

$$= v(t) - A^{-1}e^{-tA}f(t) + A^{-1}f(t)$$

$$u(t) = A^{-1}f(t) - A^{-1}e^{-tA}f(t) + v(t) \quad \text{donde}$$

$$Au(t) = f(t) - e^{-tA}f(t) + Av(t) \quad u \in D(A) \tag{12.32}$$

De (12.20) $A^{1+\alpha}v \in C^\mu(0,T]$ com $0 \le \alpha < 1$ e $0 < \mu < \theta-\alpha$.

Se $\alpha = 0$ então $Av \in C^{\mu}(0,T]$ com $0 < \mu < \theta$, isto é, $Av \in C^{\nu}(0,T]$, $0 < \nu < \theta$. Usando o Lema 2-13 mostra-se que $Au \in C^{\nu}(0,T]$.

Seja agora

$$\Delta_\delta u = u(t+\delta) - u(t) \quad 0 < t < t+\delta \le T \quad T > 0$$

$$\begin{aligned}\Delta_\delta u &= \int_0^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A} f(s)ds - \int_0^{t} e^{-(t-s)A} f(s)ds = \\ &= \int_0^{t} e^{-(t+\delta-s)A} f(s)ds + \int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A} f(s)ds - \\ &- \int_0^{t} e^{-(t-s)A} f(s)ds + \int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A} f(t)ds - \\ &- \int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A} f(t)ds = \int_0^{t} e^{-(t-s)A} f(s)(e^{-\delta A}-I)ds + \\ &+ \int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A} f(t)ds + \int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds.\end{aligned}$$

Façamos:

$$y_1 = \int_0^{t} (e^{-\delta A}-I)e^{-(t-s)A} f(s)ds$$

$$y_2 = \int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds$$

$$y_3 = \int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A} f(t)ds$$

$$y_1 = (e^{-\delta A} - I)\int_0^{t} e^{-(t-s)A} f(s)ds = (e^{-\delta A} - I)u$$

Se $u \in D(A)$ então $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta}(e^{-\delta A}-I)u = -Au.$

Logo

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{y_1}{\delta} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta}(e^{-\delta A}-I)u = -Au \tag{12.33}$$

$$y_3 = \int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A} f(t)ds \qquad x = s-t$$

$$y_3 = \int_0^{\delta} e^{-(\delta-x)A} f(t)dx = e^{-\delta A}\int_0^{\delta} e^{xA} f(t)dx.$$

De (12.31) temos: $\int_0^t S(s)u\,ds = A^{-1}(S(t)u-u)$. Logo

$$y_3 = e^{-\delta A}\int_0^\delta e^{xA}f(t)dx = +e^{-\delta A}\ A^{-1}(e^{\delta A}f(t)-f(t)) =$$

$$= + e^{-\delta A}\ e^{\delta A}\ A^{-1}f(t) - e^{-\delta A}\ A^{-1}f(t) =$$

$$= + A^{-1}f(t) - e^{-\delta A}\ A^{-1}f(t) = -(e^{-\delta A}-I)A^{-1}f(t)$$

Daí:

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{y_3}{\delta} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta}\ (e^{-\delta A}-I)A^{-1}f(t) = + AA^{-1}f(t) \tag{12.34}$$

$$y_2 = \int_t^{t+\delta} e^{-(t+\delta-s)A}\{f(s)-f(t)\}ds \qquad t \le s \le t+\delta$$

$$\|y_2\| \le \int_t^{t+\delta} \|e^{-(t+\delta-s)A}\|\|f(s)-f(t)\|ds \qquad t \le s \le t+\delta$$

$$\le \int_t^{t+\delta} K|s-t|^\theta ds = \int_t^{t+\delta} K(s-t)^\theta ds =$$

$$= K\,\frac{\delta^{1+\theta}}{1+\theta}\ .$$

$$\frac{\|y_2\|}{\delta} \le K\,\frac{\delta^\theta}{1+\theta} \to 0 \quad \text{quando} \quad \delta\to 0^+ \tag{12.35}$$

Como,

$$\Delta_\delta u = u(t+\delta) - u(t) = w_1 + w_2 + w_3, \quad \text{temos}$$

$$\lim_{\delta\ 0+} \frac{1}{\delta}\ (u(t+\delta) - u(t)) = \lim_{\delta\to 0^+} (w_1 + w_2 + w_3)$$

e por (12.33), (12,34) e (12.35) temos

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta}\ (u(t+\delta) - u(t)) = -Au + f \tag{12.36}$$

Sendo $Au \in C^\nu[0,T]$ e $f \in C^\theta[0,T]$ logo $f \in C^\nu[0,T]$ $0 < \nu < \theta$ concluimos que $\frac{du}{dt}$ existe e é igual à uma função contínua sendo $\frac{du}{dt} \in C^\nu(0,T]$.

Tínhamos obtido anteriormente que

$$Au(t) = f(t) - e^{-tA}f(t) + Av(t)$$

Logo:

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = -Au(t) + f(t) = -e^{-tA}f(t) + Av(t) =$$

$$= -e^{-tA}f(t) + \int_0^t Ae^{-(t-s)A}\{f(s)-f(t)\}\,ds.$$

Obtivemos então:

$$\frac{du}{dt} = -Au + f \qquad (12.36)$$

$$\frac{du}{dt} = -e^{-tA}f(t) + \int_0^t Ae^{-(t-s)A}\{f(s)-f(t)\}\,ds \qquad (12.37)$$

Com os resultados que acabamos de obter podemos mostrar que as soluções $u = u(t)$ de (9.10) são diferenciáveis.

TEOREMA 12-5: Suponhamos $u = u(t)$ uma solução de (9.9), $u \in \bar{S}[0,T]$, $T > 0$, $\|Pf(t)\| = 0(t^{\epsilon-1})$ para algum $\epsilon > 0$, quando $t \to 0^+$ e $Pf \in C^{\theta}(0,T]$ $0 < \theta < 1$. Então $u \in C^{1+\nu}(0,T]$, $Au \in C^{\nu}(0,T]$ para todo ν tal que $0 < \nu < \frac{1}{4}$ e $0 < \nu < \theta$ e u é solução de (9.5), (9.6) (P(2)) em (0,T].

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. Então para qualquer $t \in [\epsilon,T]$ u satisfaz a relação:

$$u(t) = Z_{\epsilon}(t) + V_{\epsilon}(t) + U_{\epsilon}(t) \qquad (12.38)$$

onde

$$Z_{\epsilon}(t) = e^{-(t-\epsilon)A}u(\epsilon)$$

$$V_{\epsilon}(t) = \int_{\epsilon}^t e^{-(t-s)A}Pf(s)\,ds$$

$$U_{\epsilon}(t) = \int_{\epsilon}^t e^{-(t-s)A}Fu(s)\,ds$$

É evidente que $Z_{\epsilon} \in C^{\infty}(\epsilon,T]$, $AZ_{\epsilon} \in C^{\theta}(\epsilon,T]$ e $\frac{dZ_{\epsilon}}{dt} = -AZ_{\epsilon}$ em $(\epsilon,T]$.

Da hipótese de que $Pf \in C^{\theta}[\epsilon,T]$ e do Lema 12-4 e 12-2 segue-se que $V_\epsilon \in C^{1+\nu}[\epsilon,T]$, $AV_\epsilon \in C^{\nu}(\epsilon,T]$ e $\frac{dV_\epsilon}{dt} = -AV_\epsilon + Pf$.

Se escolhermos $\nu < \lambda < \frac{1}{4}$ temos que $Fu \in C^{\lambda}(0,T]$, pelo Lema 12-2 (12.17), logo $Fu \in C^{\lambda}[\epsilon,T]$. Este fato mais o Lema 12-4 nos dizem que $U_\epsilon \in C^{1+\nu}(\epsilon,T]$, $AU_\epsilon \in C^{\nu}[\epsilon,T]$ e $\frac{dU_\epsilon}{dt} = -AV_\epsilon + Fu$.

Assim, conlcuimos que $u \in C^{1+\nu}[\epsilon,T]$, $Au \in C^{\nu}[\epsilon,T]$ e $\frac{du}{dt} = -Au + Fu + Pf$ em $[\epsilon,T]$. Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário a conclusão vale em $(0,T]$.

Usando este resultado mostremos agora que as soluções de (9.10) em $S(0,T]$ são diferenciáveis em $(0,T]$.

TEOREMA 12-6: Seja $Pf \in C^{\theta}(0,T]$, $0 < \theta < 1$ $a \in E(\Omega)$, $\|Pf(t)\| = O(t^{\epsilon-1})$, para algum $\epsilon > 0$, $t \to 0^+$. Se u é uma solução de (9.10) $u \in S[0,T]$ então $u \in C^{1+\nu}(0,T]$, $Au \in C^{\nu}(0,T]$ para $0 < \nu < \frac{1}{4}$, $0 < \nu < \theta$ e u é solução de (9.5), (9.6) em $(0,T]$.

Demonstração: Seja $t_1 \in (0,T]$ arbitrário. Se escolhermos β e γ tal que $1/4 < \beta < 1/2$, $3/4 < \gamma < 1$, $3/4 < \gamma < \beta+1/2$ então $u(t_1) \in D(A^{\beta})$ porque $u(t_1) \in D(A^{1/2})$ e $Pf \in C^{\theta}[t_1,T]$.

Consideremos a equação

$$u(t) = e^{-(t-t_1)A}u(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{-(t-s)A}Fu(s)ds + \int_{t_1}^{t} e^{-(t-s)A}Pf(s)ds \quad t > t_1 \tag{12.39}$$

com instante inicial t_1 e valor inicial $u(t_1)$.

Pelo Teorema 12-2 existe uma solução $v \in \bar{S}[t_1, t_1+\delta]$, $\delta > 0$ qualquer satisfazendo $0 < \delta < T-t_1$. Como esta solução é única pelo Teorema 12-1, se u é solução então u e v coincidem em $[t_1, t_1+\delta]$.

Mas então u satisfaz as conclusões do Teorema 12-5 com o intervalo $(0,T]$ substituido por $[t_1, t_1+\delta]$. Como $\delta > 0$ é arbitrário e independe de t_1 o teorema está demonstrado.

CAPÍTULO V

§13. Conclusão

Mostramos, assim, que uma solução $u = u(t)$ da equação integral (9.10) é diferenciável e é solução do problema de valor inicial (9.5), (9.6).

Uma vez conhecida a solução $u = u(t)$ de (9.5), (9.6) em um intervalo I podemos determinar a pressão p em (9.1).

Dizemos que a função $p: I\times\Omega \to \mathbb{R}$, $p \in L^1_{loc}(I\times\Omega)$ é a pressão associada a $u = u(t)$ se u é solução de (9.5) e se p e u satisfazem a equação de Navier-Stokes (9.1).

A pressão p pode ser determinada se conhecermos a função de Green, relativa à pressão, do problema de Stokes.

O problema de Stokes, com condição de fronteira homogênea, consiste em determinar uma função vetorial $v: I\times\Omega \to \mathbb{R}^3$ e uma função real $q: I\times\Omega \to \mathbb{R}$ tal que o sistema

$$\Delta v - \nabla q = -f$$
$$\nabla \cdot v = 0$$
$$v\big|_{\partial\Omega} = 0$$

seja satisfeito para uma dada função f.

De acordo com Odqvist e Ladyzhenskaya [12] a única solução $\{v,q\}$ deste sistema é dada por

$$v(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy \quad e \quad q(x) = \int_\Omega g(x,y)f(y)dy$$

onde $G(x,y)$ é um tensor e $g(x,y)$ uma função vetorial definida em $\Omega\times\Omega$. Uma vez determinada a função $g(x,y)$ a pressão p está determinada a menos de uma constante aditiva de acordo com o seguinte lema:

LEMA: Seja u uma solução de (9.5) num intervalo I onde $f \in C(I;\ L^2(\Omega))$ e $w(x,t) = -\frac{du}{dt} - (u|\nabla)u + f$. Então

$$p(x,t) = \int_\Omega g(x,y)w(y,t)dy \qquad (x,t) \in \Omega\times I$$

é a pressão associada à velocidade u.

A demonstração deste lema envolve outros resultados sobre as funções $G(x,y)$ e $g(x,y)$ e não será feita aqui.

A solução do problema de Stokes e a forma explícita de $G(x,y)$ e $g(x,y)$ estão em [12].

APÊNDICE 1

Decomposição do $L^2(\Omega)$ em subespaços ortogonais

Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^3$, $L^2(\Omega)$ o espaço de Hilbert das funções vetoriais $u: \Omega \to \mathbb{R}^3$ com componentes $u_k \in L^2(\Omega)$, $k=1,2,3$. Em $L^2(\Omega)$ está definido o produto escalar $(u|v) = = \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} u_k v_k dx$.

$L^2(\Omega)$ se decompõe, então, em dois subespaços ortogonais $E(\Omega)$ e $G(\Omega)$ sendo $E(\Omega)$ o fecho, na norma do $L^2(\Omega)$, do conjunto das funções vetoriais solenoidais u infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em Ω e $G(\Omega)$ o fecho, na norma do $L^2(\Omega)$ das funções $w = \text{grad}\ \varphi$, φ função real e infinitamente diferenciável em Ω.

Temos então:

$$L^2(\Omega) = E(\Omega) \oplus G(\Omega)$$

$$E(\Omega) = \overline{\{u \in C_o^\infty(\Omega);\ \text{div}\ u = 0\}}^{L^2(\Omega)}$$

$$G(\Omega) = \overline{\{w = \text{grad}\ \varphi,\ \varphi \in C^\infty\}}^{L^2(\Omega)}$$

Antes, veremos o seguinte problema auxiliar: [12]

"Construir em Ω um campo vetorial solenoidal $a(x)$ tal que $a(x) = \alpha$ se $x \in \partial\Omega$ ".

Como o campo $a(x)$ procurado deve ser soleinodal, teremos que:

$$0 = \int_{\Omega} \text{div } a(x)dx = \int_{\partial\Omega} (\alpha|\nu)dS$$

onde ν é a normal unitária externa à $\partial\Omega$.

Vamos supor, então, que vale a relação:

$$\int_{\partial\Omega} (\alpha|\nu) = 0$$

e decompor o vetor α segundo componentes normal e tangencial à fronteira de Ω, isto é,

$$\alpha = \alpha_\nu \nu + \alpha_\tau \tau \qquad \alpha_\nu = (\alpha|\nu)$$

Usaremos a componente normal α_ν para construir um campo vetorial solenoidal da forma $b = \text{grad } \varphi$ com $b_\nu(x) = \alpha_\nu$.

Como $\text{div } b = \text{div grad } \varphi = \Delta\varphi = 0$ e

$$b_\nu(x)\Big|_{\partial\Omega} = (b|\nu)\Big|_{\partial\Omega} = (\text{grad } \varphi|\nu)\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = \alpha_\nu$$

o problema de determinar o campo b fica reduzido ao seguinte problema de Neuman

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = \alpha_\nu \qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Em virtude da relação $\int_{\partial\Omega} (\alpha|\nu)dS = 0$, válida por hipótese, este problema possui solução em Ω, [15] sendo esta solução determinada a menos de uma constante aditiva, que pode ser fixada fazendo $\varphi(x_o) = 0$, $x_o \in \partial\Omega$.

Escrevemos então $a(x)$ na forma

$$a(x) = b(x) + c(x)$$

onde $c(x)$ deve ser determinado obedecendo às condições:

$$\text{div } c(x) = 0$$

$$c(x)\Big|_{\partial\Omega} = (\alpha - b)\Big|_{\partial\Omega} = \beta$$

sendo $(\beta|\nu)\big|_{\partial\Omega} = 0$.

O campo $c(x)$ pode ser obtido construindo um outro campo $d(x)$ [12] satisfazendo à certas propriedades e tal que

$$c(x) = \text{rot } d(x)$$

$$\text{rot } d(x)\big|_{\partial\Omega} = \beta$$

Assim,

$$a(x) = \text{grad } \varphi + \text{rot } d$$

ou

$$a(x) = b(x) + c(x)$$

Passamos agora à decomposição do $L^2(\Omega)$ em dois sub-espaços ortogonais tais que:

$$L^2(\Omega) = E(\Omega) \oplus G(\Omega)$$

onde $E(\Omega)$, como já foi dito, é o fecho, na norma do $L^2(\Omega)$, do conjunto das funções vetoriais de suporte compacto e infinitamente diferenciáveis em Ω e com divergência nula. Veremos o seguinte:

TEOREMA: $G(\Omega)$ é constituido das funções grad φ onde φ é uma função real em Ω, $\varphi \in L^2(\Omega)$ localmente e φ possui derivadas primeiras em $L^2(\Omega)$.

Antes de passarmos à demonstração veremos os seguintes resultados, que nos serão úteis durante a demonstração.

Seja $\rho(x)$ uma função real, não negativa, $\rho \in C^\infty(\Omega)$, satisfazendo:

$$\begin{cases} \rho(x) = 0 \quad \text{se} \quad |x| > 1 \\ \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)dx = 1 \end{cases}$$

Escolhendo convenientemente o valor da constante c a função $\rho(x)$ definida a seguir satisfaz à estas condições:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |x| > 1 \\ c e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se} \quad |x| \leq 1 \end{cases}$$

Para $\epsilon > 0$ definimos o operador J_ϵ por

$$(J_\epsilon u)(x) = \frac{1}{\epsilon^3}\int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)u(y)dy$$

onde $u(y)$ está definida em Ω.

Valem, então, os seguintes resultados [15]

1) Se $u \in L^2(\Omega)$ então $J_\epsilon u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^3)$, isto é, $J_\epsilon u$ é indefinidamente diferenciável e de suporte compacto no $\mathbb{R}^3$.

2) $J_\epsilon : L^2(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$ é uma transformação linear limitada.

3) $\|J_\epsilon u - u\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$ quando $\epsilon \to 0$ para cada $u \in L^2(\Omega)$.

4) Se $u \in C_o^\infty(\Omega)$ então $D^\alpha(J_\epsilon u) = (-1)^{|\alpha|} J_\epsilon(D^\alpha u)$

Demonstração: Seja então $u \in G(\Omega)$, isto é, $\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i v_i dx = 0$ para todo $v \in E(\Omega)$. Vamos indicar o produto escalar, para facilidade de notação, por $\int u \cdot v \, dx$. Tomemos $v = \text{rot } w_\epsilon$, onde w é suficientemente regular e de suporte compacto em Ω e $w_\epsilon = J_\epsilon w$ ou seja:

$$w_\epsilon(x) = \int_{\|x-y\| \leq \epsilon} \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) w(y)dy$$

Vamos escolher ϵ menor do que a distância de Ω', onde $w \neq 0$, à fronteira $\partial\Omega$. Assim, w_ϵ está definida em Ω e possui suporte compacto em Ω com $w = 0$ fora de Ω. Pelo resultado 4) acima temos que:

$$\text{rot } w_\epsilon = \text{rot}(J_\epsilon w) = J_\epsilon(\text{rot } w).$$

Levando em conta este resultado temos:

$$0 = \int_\Omega u \cdot v \, ds = \int_\Omega u(x) \cdot \left(\int_{\|x-y\| \le \varepsilon} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \mathrm{rot}\; w(y) dy \right) dx =$$

$$= \int_\Omega \left(\int_{\|x-y\| \le \varepsilon} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(x) dx \right) \cdot \mathrm{rot}\; w(y) dy =$$

$$= \int_\Omega u_\varepsilon(y) \cdot \mathrm{rot}\; w(y) dy.$$

Pela propriedade 1) segue-se que $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Integrando por partes vem:

$$0 = \int_\Omega u_\varepsilon(y) \cdot \mathrm{rot}\; w(y) dy = \int_\Omega \mathrm{rot}\; u_\varepsilon(y) \cdot w(y) dy$$

e como $w(y)$ é suficientemente arbitrário podemos concluir que $\mathrm{rot}\; u_\varepsilon = 0$. u_ε está definida para todo $x \in \Omega'$ onde Ω' é um subdomínio de Ω, a uma distância ε de $\partial\Omega$ e $\mathrm{rot}\; u_\varepsilon = 0$ fora de Ω'.

Sendo $\mathrm{rot}\; u_\varepsilon = 0$ podemos construir uma função $\varphi(x,\varepsilon)$ em Ω' tal que $\varphi(x,\varepsilon) = \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{3} u_{k_\varepsilon} dx_k$, x_0 um ponto fixo.

A função $\varphi(x,\varepsilon)$ é definida por esta integral e $u_\varepsilon = \mathrm{grad}\; \varphi(x,\varepsilon)$.

Tomando limite quando $\varepsilon \to 0$ e usando a propriedade 3) temos que $u_\varepsilon \to u$ em $L^2(\Omega')$ enquanto que $\varphi(x,\varepsilon) \to \varphi(x)$ em $W^{1,2}(\Omega')$ e $u = \mathrm{grad}\; \varphi$. Sendo Ω' um subdomínio arbitrário de Ω segue-se que φ está definida em todo Ω. Temos que verificar agora se φ é contínua em Ω, isto é, se $\oint_c d\varphi = 0$ para todas as trajetórias fechadas em Ω.

Vamos tomar um domínio tubular $T \subset \Omega$ e considerar uma seção plana transversal S_1 em T. Em S_1 supomos existir um campo de vetores α, suficientemente regular, com direção ortogonal a S_1 e $\alpha = 0$ na fronteira de S_1. Construimos, em T, um campo solenoidal $u(x)$ regular no interior de T, $a(x) = 0$ se x pertence à superfície lateral de T e $a(x) = \alpha$ se $x \in S_1$. $a(x)$ é limitado em T e contínuo no interior e na fronteira de T, com exceção, talvez, da curva Σ_1 interseção de S_1 com T. Esta construção do campo $a(x)$ em T é possível em vista do resultado do problema auxiliar.

Podemos estender $a(x)$ a todo $\mathbb{R}^3$ definindo $a(x) = 0$ se $x \notin T$.

Seja, agora, $v = a_\epsilon = J_\epsilon a$.

Pela propriedade 1) v é indefinidamente diferenciável e de suporte compacto em Ω.

Também temos que:

$$\operatorname{div} v = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} J_\epsilon a_k = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\|x-y\|\leq\epsilon} \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) a_k(y)\,dy =$$

$$= -\sum_{k=1}^{3} \int_{\|x-y\|\leq\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_k} \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) a_k(y)\,dy = \sum_{k=1}^{3} \int_{\|x-y\|\leq\epsilon} \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \frac{\partial}{\partial y_k} a_k(y)\,dy =$$

$$= \int_{\|x-y\|\leq\epsilon} \rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \operatorname{div} a\,dy = 0 \quad \text{porque} \quad \operatorname{div} a = 0.$$

Sendo $v \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\operatorname{div} v = 0$ então $v \in E(\Omega)$.

Substituindo v em $\int_\Omega u \cdot v\,dx = 0$ obtemos:

$$0 = \int_\Omega u \cdot v\,dx = \int_\Omega \operatorname{grad} \varphi \cdot v\,dx = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_i d_x =$$

$$= \int_{S_1'} [\varphi] v_\nu\,dS - \int_\Omega \varphi \operatorname{div} v\,dx = \int_{S_1'} [\varphi] v_\nu\,dS$$

onde S_1' é uma seção transversal que contém S_1. Podemos tomar ϵ tão pequeno tal que o domínio T', fora do qual $v = 0$, difira muito pouco de T e S_1' difira muito pouco de S_1. Tomando limite, quando $\epsilon \to 0$, $a_\epsilon \to a$ uniformemente em Ω/Σ_1. Portanto:

$$v_\nu\Big|_{S_1'} = (a_\epsilon)_\nu\Big|_{S_1'} \longrightarrow a\Big|_{S_1'} = \alpha_\nu$$

e

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{S_1'} [\varphi] v_\nu \, dS = \int_{S_1} [\varphi]\alpha_\nu \, ds.$$

Como α_ν é arbitrário concluimos que $[\varphi] = 0$, isto é, o salto de φ, ao passar pela secção S_1, é nulo, ou seja, φ é contínua, o que prova o teorema.

APÊNDICE 2

Extensão de Friedrichs

No que segue, estudaremos, sucintamente, o problema de estender um operador linear simétrico, semi-limitado inferiormente (superiormente), de modo que esta extensão seja auto-adjunta.

Seja então um operador A definido em seu domínio $D(A)$ com valores em H e $\overline{D(A)} = H$. Diremos que A é positivo definido em $D(A)$ se tivermos

$$(Au|u) \geq \alpha^2\|u\|^2$$

para todo $u \in D(A)$ sendo α uma constante positiva. Evidentemente, se A é positivo definido segue-se que $(Au|u) \in \mathbb{R}$, para todo $u \in D(A)$, logo A é simétrico e é limitado inferiormente por α^2, isto é,

$$\frac{\|Au\|}{\|u\|} \geq \alpha^2.$$

Temos o seguinte teorema:

TEOREMA (Friedrichs): Um operador A, positivo definido, admite uma extensão auto-adjunta $\tilde{A}$ tal que $\tilde{A}^{-1}$ existe, é limitado e está definido em todo H.

Antes de darmos a demonstração deste teorema veremos alguns resultados auxiliares à demonstração:

LEMA 1 [17]: Se A é um operador positivo definido e a equação $Au = f$ possui solução esta solução é única.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos que u_1 e u_2, $u_1 \neq u_2$ sejam soluções. Então $Au_1 = f$ e $Au_2 = f$ donde $Au_1 - Au_2 = A(u_1 - u_2) = 0$. Como A é positivo definido temos:

$$\alpha^2 \|u_1 - u_2\|^2 \leq (A(u_1-u_2),(u_1-u_2)) = 0$$

o que implica $u_1 = u_2$.

Dado um operador positivo definido A podemos associar a ele um funcional linear F definido por:

$$F(u) = (Au|u) - (u|f) - (f|u), \quad u \in D(A), \quad f \in H$$

e $D(F) = D(A)$. Como $(Au|u) \in \mathbb{R}$ e $-(u|f) - (f|u) = -2 \operatorname{Re}(u|f)$ podemos escrever que:

$$F(u) = (Au|u) - 2 \operatorname{Re}(u|f)$$

e faz sentido então procurar o mínimo de $F(u)$. Temos o seguinte

LEMA 2 [17]: Se a equação $Au = f$ possui uma solução $u_o \in D(A)$ então $F(u_o) \leq F(u)$ para todo $u \in D(A)$ valendo a igualdade se $u = u_o$. Por outro lado, se dado um $u_o \in D(A)$ tivermos $F(u_o) \leq F(u)$ para todo $u \in D(A)$ então $Au_o = f$.

Demonstração: Seja $u_o \in D(A)$ solução de $Au = f$. Levando em conta que A é simétrico temos:

$$\begin{aligned} F(u) &= (Au|u) - (f|u) - (u|f) = (Au|u) - (Au_o|u) - (u|Au_o) = \\ &= (Au|u) - (Au_o|u) - (u|Au_o) + (Au_o|u_o) - (Au_o|u_o) = \\ &= (Au_o|u_o-u) - (Au|u_o-u) - (Au_o|u_o) = \\ &= (A(u_o-u)|(u_o-u)-(Au_o|u_o)). \end{aligned}$$

Porém, $(A(u_o-u)|(u_o-u)) \geq \alpha^2\|u_o-u\|^2$ e

$$\begin{aligned} F(u_o) &= (Au_o|u_o) - (f|u_o) - (u_o|f) = \\ &= (Au_o|u_o) - (Au_o|u_o) - (u_o|Au_o) = \\ &= -(u_o|Au_o) = -(Au_o|u_o). \end{aligned}$$

Logo:

$$F(u) = (A(u_o-u)|(u_o-u)) - (Au_o|u_o) \geq \alpha^2\|u_o-u\|^2+F(u_o)\geq F(u_o)$$

e

$$F(u_o) \leq F(u)$$

Se agora para um dado $u_o \in D(A)$ tivermos $F(u_o) \leq F(u)$ para todo $u \in D(A)$, o que equivale a dizer que $F(u_o) = \min\limits_{u\in D(A)} F(u)$, teremos que:

$$\frac{d}{dt} F(u_o+tz)\Big|_{t=0} = 0 \quad \text{sendo} \quad t \in \mathbb{R} \quad e \quad z \in D(A)$$

qualquer.

Obtemos:

$$\frac{d}{dt} F(u_o+tz) = (Au_o|z) + (Az|u_o) + 2t(Az|z) - (f|z) - (z|f) \quad e$$

$$\frac{d}{dt} F(u_o+tz)\Big|_{t=0} = (Au_o|z) + (Az|u_o) - (f|z) - (z|f) \quad \text{donde}$$

$$(au_o|z) + (Az|u_o) - (f|z) - (z|f) = 0$$

ou $$(Au_o|z) + (z|Au_o) - (f|z) - (z|f) = 0$$

Então:

$$(Au_o-f|z) + (z|Au_o-f) = 0$$

$$(Au_o-f|z) + \overline{(Au_o-f|z)} = 0$$

e $$\mathrm{Re}((Au_o-f|z)) = 0$$

Se substituirmos z por iz verificaremos que

$$\mathrm{Im}((Au_o-f|z)) = 0$$

Logo, $(Au_o-f|z) = 0$, u_o, $z \in D(A)$ e $f \in H$, isto é, Au_o-f é ortogonal a $D(A)$. Sendo $D(A)$ denso em H segue-se que $Au_o-f = 0$ portanto,

$$Au_o = f.$$

Este lema mostra que dado qualquer $f \in H$ o funcional $F(u)$ assume um valor mínimo para algum $u_o \in D(A)$. Vamos agora "aumentar" o domínio de F, que é o domínio de A, de modo que o problema min $F(u)$ sempre tenha solução. [15]

Para isto, vamos introduzir em $D(A)$ um novo produto escalar definido por:

$$[u|v] = (Au|v) \quad u,v \in D(A) \tag{1}$$

então: $$[u|u] = \|u\|_A^2 = (Au|u)$$

e $$\|u\|_A^2 = (Au|u) \geq \alpha^2\|u\|^2$$

ou $$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|u\|_A \tag{2}$$

$D(A)$ com este produto escalar define um novo espaço de Hilbert que pode ser completo ou não. No caso de não se completo nós o completaremos acrescentando-lhe novos elementos. Chamaremos este espaço de Hilbert, agora completo, de H_A.

Seja então uma seqüência de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $u_n \in D(A)$ com o produto escalar (1).

Mas, então, por (2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é também uma seqüência de Cauchy em H. Como H é completo temos que:

$$u_n \to u' \quad u' \in H.$$

Se tivermos duas seqüências de Cauchy, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ equivalentes em $D(A)$ com o produto escalar (1), isto é, se $\|u_n - v_n\|_A \to 0$ $n\to\infty$, então por (2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são equivalentes em H, ou seja, seqüências equivalentes em $D(A)$ convergem para o mesmo elemento em H. Sejam agora $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências de Cauchy pertencentes à classes diferentes, $u_n, v_n \in D(A)$, com o produto escalar (1). Se $z \in D(A)$, z qualquer, então:

$$(Az|u_n - v_n) = [z|u_n - v_n] = [z|w_n]$$

Se $n\to\infty$, temos:

$$(Az|u' - v') = [z|w] \quad w\neq 0 \quad w \in H_A.$$

Se fosse $u' = v'$ então $[z|w] = 0$ ou $w \perp D(A)$ com $w \in H_A$. Mas isto é impossível uma vez que $\overline{D(A)} = H_A$ e $w\neq 0$.

Logo, $u' \neq v'$. Assim, elementos distintos de H correspondem à seqüências distintas de $D(A)$ com produto escalar (1). Deste modo, o completamento de $D(A)$ com a métrica dada pelo produto escalar (1) está bem definido. Pelo que acabamos de ver, verificamos que o completamento de $D(A)$ com a métrica dada por (1) foi feito usando elementos de H. Sendo H_A o completado de $D(A)$ temos agora a relação seguinte:

$$D(A) \subseteq H_A \subseteq H \quad \overline{D(A)} = H \quad \overline{H_A} = H \tag{3}$$

Podemos agora estender o funcional F a todo H_A pondo

$$\tilde{F}(u) = [u|u] - (f|u) - (u|f) \qquad u \in H_A \tag{4}$$

e procurar resolver o problema do mínimo para $\tilde{F}$. Seja, então, f fixo, $f \in H$. Temos que $(u|f)$, $u \in H_A$ é um funcional limitado em H_A, pois,

$$|(u|f)| \leq \|f\| \; \|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\| \; \|u\|_A$$

Pelo lema de Riesz, existe um único u_o em H_A tal que

$$(u|f) = [u|u_o] \qquad u \in H_A, \quad f \in H \tag{5}$$

A expressão (4) pode ser escrita, então, como:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u) &= [u|u] - [u_o|u] - [u|u_o] = \\ &= [u|u] - [u_o|u] - [u|u_o] + [u_o|u_o] - [u_o|u_o] = \\ &= [u-u_o|u-u_o] - [u_o|u_o] \end{aligned}$$

Porém,

$$\tilde{F}(u_o) = [u_o|u_o] - [u_o|u_o] - [u_o|u_o] = -[u_o|u_o] \quad \text{e}$$

$$\tilde{F}(u) = [u-u_o|u-u_o] + \tilde{F}(u_o) \geq \tilde{F}(u_o)$$

$\tilde{F}(u_o) \leq \tilde{F}(u)$ para todo $u \in H_A$, valendo a igualdade quando $u = u_o$.

Assim:

$$\min_{u \in H_A} \tilde{F}(u) = \tilde{F}(u_o) = -[u_o|u_o]$$

De acordo com o que vimos anteriormente, em vista do fato de que u_o é o ponto em que $\tilde{F}$ assume um mínimo, podemos escrever que

$$\tilde{A}u_o = f \qquad f \in H, \quad u_o \in H_A$$

sendo o domínio de $\tilde{A}$ o subespaço de todas as soluções do problema do mínimo de $\tilde{F}(u)$ quando f varia em H. Evidentemente, tem-se $A \subset \tilde{A}$ e $D(\tilde{A}) \subseteq H_A$.

Se $\tilde{A}u_o = 0$ temos, usando a (5), que:

$$(f|u) = [u_o|u]$$

e

$$(Au_o|u) = [u_o|u] = 0$$

com $u_o \in D(\tilde{A})$, $u \in H_A$, ou seja $u_o \perp H_A$. Como $D(\tilde{A})$ é denso em H_A obtemos que $u_o = 0$.

Logo, $\tilde{A}u_o = 0$ implica $u_o = 0$ e existe o inverso $\tilde{A}^{-1}$ definido no conjunto de valores de $\tilde{A}$ que é todo o H, isto é, $D(\tilde{A}^{-1}) = H$.

Por outro lado, temos, usando novamente a (5), que:

$$(f|u) = [u_o|u]$$

ou seja
$$(\tilde{A}u_o|u) = [u_o|u] \qquad u_o \in D(\tilde{A}), \quad u \in H_A$$

Se fizermos $u = u_o$, então:

$$(Au_o|u_o) = [u_o|u_o] = \|u_o\|_A^2 \geq 0$$

e

$$(Au_o|u_o) \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad u_o \in D(\tilde{A})$$

o que implica ser $\tilde{A}$ um operador simétrico em $D(\tilde{A})$.

Ora, $\tilde{A}$ é simétrico e possui um inverso $\tilde{A}^{-1}$, logo $\tilde{A}^{-1}$ é também simétrico, $\tilde{A}^{-1}$ simétrico com $D(\tilde{A}^{-1}) = H$ é auto-adjunto, logo é fechado. Pelo teorema do "gráfico fechado" $\tilde{A}^{-1}$ é limitado. Se $\tilde{A}^{-1}$ é auto-adjunto o seu inverso $\tilde{A}$ também é auto-adjunto no seu domínio $D(\tilde{A})$.

Assim, obtivemos $\tilde{A}$ tal que:

$$A \subset \tilde{A} \quad \text{com} \quad \tilde{A}^* = \tilde{A}$$

o que demonstra o teorema.

Aplicação:

Seja $L^2(\Omega) = E(\Omega) \oplus G(\Omega)$ como em A-1, onde lembramos que $E(\Omega)$ é o espaço de Hilbert definido por:

$$E(\Omega) = \overline{\{u \in C_o^\infty(\Omega);\ \operatorname{div} u = 0\}}^{L^2(\Omega)}$$

Vamos considerar o operador $A = -\Delta$, o negativo do operador laplaciano, de $E(\Omega)$ em $E(\Omega)$

$$A: E(\Omega) \longrightarrow E(\Omega)$$

Tomaremos como domínio de A, $D(A) = D(-\Delta)$ o subespaço vetorial das funções $u \in C_o^\infty(\Omega)$ com $\operatorname{div} u = 0$, isto é,

$$D(A) = \{u \in C_o^\infty(\Omega):\ \operatorname{div} u = 0\}$$

Vamos considerar o problema de estender o operador A a $E(\Omega)$ de modo que a extensão obtida seja auto-adjunta.

De acordo com o que vimos temos que verificar se $D(A)$ é denso em $E(\Omega)$ e se A é positivo definido em $D(A)$.

a) $D(A)$ é denso em $E(\Omega)$ pela própria definição de $D(A)$ e de $E(\Omega)$.

b) Veremos que $(Au|u) \geq k^2\|u\|^2$ para todo $u \in D(A)$. De fato, seja $u \in D(A)$. Então, temos:

$$(Au|u) = \int_\Omega -\Delta u(x)\cdot u(x)dx = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}\, u(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\left\{-\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\, u(x)\Big|_{\partial\Omega} + \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\, dx\right\} =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx.$$

Usando a desigualdade de Friedrichs [15]

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \alpha^2 \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

vem então:

$$(Au|u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx \geq \frac{1}{\alpha^2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

donde $\qquad (Au|u) \geq k^2 \|u\|^2$ para todo $u \in D(A)$.

Logo A é positivo definido em $D(A)$ e portanto simétrico. O espaço H_A é obtido completando $D(A)$ com a norma induzida pelo produto escalar $[u,v] = (Au|v)$ ou seja:

$$\|u\|^2_A = (Au|u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx.$$

Observamos que esta norma é equivalente à norma do $H^1(\Omega)$. De fato, sendo a norma de $H^1(\Omega)$ da por:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(|u|^2 + \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right) dx$$

vem que:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(|u|^2 + \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right) dx \geq \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx = \|u\|^2_A$$

isto é, $\qquad \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \geq \|u\|^2_A$

Empregando novamente a desigualdade de Friedrichs temos:

$$\|u\|^2_A \leq \|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \leq$$

$$\leq \alpha^2 \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx =$$

$$= (\alpha^2+1) \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx = (\alpha^2+1)\|u\|^2_A .$$

Assim:

$$\|u\|_A^2 \le \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \le (\alpha^2+1)\|u\|_A^2$$

o que implica a equivalência das normas.

Portanto, H_A é o completado de $D(A)$ com a norma de $H^1(\Omega)$. Por definição, o fecho de $C_o^\infty(\Omega)$ com a norma de $H^1(\Omega)$ é o $H_o^1(\Omega)$. Logo, H_A é o subespaço das funções $u \in H_o^1(\Omega)$ satisfazendo a condição adicional $\operatorname{div} u = 0$, isto é,

$$H_A = \{u \in H_o^1(\Omega);\ \operatorname{div} u = 0\}.$$

O funcional $F_f(u)$ com $u \in D(A)$ é dado por:

$$F_f(u) = \int_\Omega [-\Delta u(x)u(x) - 2\operatorname{Re}(u|f)]dx =$$

$$= \int_\Omega [\sum_{i=1}^{3} |\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}|^2 - 2\operatorname{Re}(u|f)]dx.$$

Vimos que o problema do mínimo de $F_f(u)$, $u \in H_A$ e $f \in E(\Omega)$ possui uma solução única. Acrescentando a $D(A)$ todas as soluções u de $\min F_f(u)$ quando f varia em $E(\Omega)$ chegamos à extensão auto-adjunta $\tilde{A}$ de $\tilde{A}$ sendo

$$\tilde{A}u = f.$$

Como $A \subseteq \tilde{A}$ vem que

$$D(\tilde{A}) \subseteq D(A^*).$$

Mas, as funções $u \in D(A^*)$ possuem derivadas fracas até 2^a ordem em Ω e A^* é o operador de Laplace. Logo, $\tilde{A}$ é o operador laplaciano e

$$\tilde{A}u = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f$$

com $D(\tilde{A}) \subseteq H_A = \{u \in H_o^1(\Omega):\ \operatorname{div} u = 0\}$.

Não é difícil mostrar que o conjunto das funções que constituem $D(\tilde{A})$ coincide com o conjunto das funções do domínio da raiz quadrada positiva de A, $D(A^{1/2})$ e que $D(A^{1/2}) = H_A$.[14]

Logo:

$$D(\tilde{A}) = D(A^{1/2}) = H_A.$$

APÊNDICE 3

Semigrupos

Seja X um espaço de Banach complexo e $L(X)$ a álgebra de Banach dos operadores limitados de X. Tomemos a semi-reta $[0,\infty)$ e consideremos a aplicação:

$$S: [0,\infty) \longrightarrow L(X)$$
$$t \qquad S(t)$$

que a cada $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, associa um operador contínuo $S(t)$ em $L(X)$. Diremos que a família $\{S(t),\ t \geq 0\} \subset L(X)$ é um semigrupo de classe C_0 quando satisfizer as seguintes condições:

1) $S(t+s) = S(t)S(s) = S(s)S(t)$, $t,s \geq 0$
2) $S(0) = I$, I é a identidade de $L(X)$.
3) A aplicação $S(\cdot)u: [0,\infty) \longrightarrow X$ é fortemente contínua em $\mathbb{R}$, isto é, $\lim\limits_{t \to t_0} \|S(t)u - S(t_0)u\| = 0$ para cada $u \in X$, sendo $t, t_0 > 0$ e o limite tomado no sentido da norma de X.

As derivadas e integrais de funções definidas em $[0,\infty)$ e com valores em X são definidas de modo análogo a integral de Riemann, quando $X = \mathbb{R}$, sendo que os limites são tomados no sentido da norma de X. Assim, $u: [0,\infty) \longrightarrow X$ é fortemente derivável em $t_0 \in [0,\infty)$ se existir $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \|u(t_0+h) - u(t_0)\|$, $h > 0$ e este limite, quando existir, é derivada da u no ponto t_o.

Se u é uma função contínua num intervalo $[0,t]$ com valores em X a integral $\int_0^t u(t)dt$ existe como limite de somas $\sum_{i=1}^{n} u(\xi_i)\,(t_{i+1}-t_i)$, $\xi_i \in (t_{i+1}, t_i)$ quando $n \to \infty$ e $\max(t_{i+1}-t_i) \to 0$. A existência deste limite segue-se do fato de que uma função contínua num intervalo fechado e limitado é uniformemente contínua. A verificação disto pode ser feita aplicando um funcional linear contínuo a ambos os lados da equação em consideração e usar as regras para cálculo de integrais de funções reais [6].

Dado $u \in X$ a função $\begin{matrix} \mathbb{R}^+ \to X \\ t \to S(t)u \end{matrix}$ nem sempre é derivável.

Vamos indicar por $D(A)$ o conjunto dos elementos $u \in X$ tal que a função acima possua derivada, isto é,

$$D(A) = \{u \in X \mid \lim_{h \to 0} \frac{S(h)u - Iu}{h} \text{ existe}\}$$

Temos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO: Chama-se gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t), t \geq 0\}$ ao operador A, não necessariamente limitado, definido pela condição seguinte:

Se $u \in D(A)$ então

$$Au = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\,(S(h)u - Iu).$$

O resultado principal neste pequeno resumo será o teorema de Hille-Yosida que dá as condições necessárias e suficientes para que um operador A seja gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_o. Antes de ver este teorema e sua demonstração veremos alguns resultados em forma de proposições algumas delas sem demonstração.

Daremos agora a seguinte definição:

DEFINIÇÃO: Seja B um operador de X em X e $D(B)$ seu domínio.

Dizemos que B é um operador fechado se tivermos o seguinte:

$$\text{Se } \begin{cases} u_n \to u\,, & u_n \in D(B) \\ Bu_n \to v & v \in X \end{cases} \qquad \text{Então } \begin{cases} u \in D(B) \\ v = Bu \end{cases}$$

PROPOSIÇÃO 1 [6]: Seja B um operador linear fechado em X e $u(t)$ uma função contínua de $[0,T)$ em X tal que $u(t) \in D(B)$ e $Bu(t)$ seja contínua para $0 \leq t < T$. Se as integrais $\int_0^T u(t)dt$ e $\int_0^T Bu(t)dt$ existem então

$$\int_0^T u(t)dt \in D(B) \quad \text{e} \quad B\int_0^T u(t)dt = \int_0^T Bu(t)dt.$$

PROPOSIÇÃO 2:

a) $S(t)D(A) \subset D(A)$

b) $AS(t) = S(t)A$

Demonstração: Suponhamos $u \in D(A)$. Como $S(t)$ é limitado teremos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(h)-I}{h} S(t)u = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} (S(h)S(t)u-S(t)u) =$$

$$= S(t) \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} (S(h)u-Iu)$$

que existe pois, por hipótese, $u \in D(A)$. Logo, se $u \in D(A)$ $S(t)u \in D(A)$ e também $AS(t)u = S(t)Au$ para todo $u \in D(A)$.

PROPOSIÇÃO 3: [6] Se $S(t)$ é um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A então para todo $u \in D(A)$ tem-se:

$$\frac{d}{dt} S(t)u = AS(t)u = S(t)Au$$

PROPOSIÇÃO 4: O gerador infinitesimal A de um semigrupo de classe C_o é um operador fechado.

Demonstração [3]: Para cada $u \in D(A)$ $S(t)u$ é contínuo em t. Logo podemos escrever:

$$S(t)u-u = \int_0^t \frac{d}{ds} S(s)uds = \int_0^t AS(s)ds = \int_0^t S(s)Au\ ds$$

pela Proposição 3. Seja então: $u_n \to u$ e $Au_n \to v$, $u_n \in D(A)$.

Temos:

$$\frac{1}{t} (S(t)-I)u_n = \frac{1}{t}\int_0^t S(s)Au_n\ ds$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t} (S(t)-I)u_n = \frac{1}{t} (S(t)-I)u$$

$$\lim \frac{1}{t}\int_0^t S(s)Au_n\ ds = \frac{1}{t}\int_0^t S(s)vds$$

ou seja

$$\frac{1}{t} (S(t)-I)u = \frac{1}{t}\int_0^t S(s)vds$$

Mas,

$$Au = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (S(t)-I)u = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t S(s)vds =$$

$$= \lim_{t\ 0} \frac{1}{t} \{S(\theta)vt\} = \lim_{t\to 0} S(\theta)v = v,$$

onde $0 < \theta < t$. Assim:

$$\begin{matrix} u_n \to u \\ Au_n \to v \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u \in D(A) \\ Au = v \end{matrix}$$

o que prova ser A fechado.

PROPOSIÇÃO 5: Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_o então o domínio de A é denso em X, isto é, $\overline{D(A)} = X$.

<u>Demonstração</u>: [13] Temos que mostrar que para qualquer $u \in X$ existe uma seqüência de elementos de $D(A)$ que converge para u. Para cada $u \in X$ e cada $\epsilon > 0$ seja:

$$u_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon S(t)u(t)dt.$$

Tem-se:

a) $u_\epsilon \to u$ quando $\epsilon \to 0$

b) $u_\epsilon \in D(A)$

a) $$\|u_\epsilon - u\| = \left\|\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon S(t)udt - \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon S(0)udt\right\| = \left\|\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon (S(t)u - S(o)u)dt\right\| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \|S(t)u - S(0)u\|dt$$

e $$\lim_{\epsilon\to 0}\|u_\epsilon - u\| \leq \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \|S(t)u - S(0)u\|dt = \lim_{\epsilon\to 0}\|S(\theta)u - S(0)u\| = 0$$

devido à continuidade forte de $S(t)u$ e sendo $0 < \theta < \epsilon$.

b) $$\frac{S(h)-I}{h}u_\epsilon = \frac{S(h)-I}{h}\,\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon S(t)udt = \frac{S(h)}{h\epsilon}\int_0^\epsilon S(t)udt -$$
$$- \frac{1}{h\epsilon}\int_0^h S(t)udt = \frac{1}{h\epsilon}\int_0^\epsilon (S(t+h)-S(t))udt =$$
$$= \frac{1}{h\epsilon}\int_0^h (S(t+\epsilon)-S(t))udt = \frac{1}{h\epsilon}\int_0^h (S(\epsilon)S(t)-S(t))udt =$$
$$= \frac{S(\epsilon)-I}{\epsilon}\,\frac{1}{h}\int_0^h S(t)udt = \frac{S(\epsilon)-I}{\epsilon}u_h.$$

Assim:

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(h)-I}{h}u_\epsilon = \lim_{h\to 0}\frac{S(\epsilon)-I}{\epsilon}u_h = \frac{S(\epsilon)-I}{\epsilon}u$$

existe o que quer dizer $u_\epsilon \in D(A)$.

Vamos supor agora que o semigrupo $\{S(t),\ t \geq 0\}$ de classe C_o além das três condições da definição satisfaça à uma quarta condição que é a seguinte:

4) Para todo $t \geq 0$ $\|S(t)\| \leq e^{kt}$ $k > 0$.

PROPOSIÇÃO 6: Seja $\{S(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo de classe C_0 tal que $\|S(t)\| \leq e^{kt}$, $k > 0$. Então os $\lambda > k$ não são valores próprios de A.

<u>Demonstração</u> [13]: Suponhamos que algum $\lambda > k$ seja valor próprio de A. Então existe $u \in D(A)$, $u \neq 0$ com $Au = \lambda u$. Supondo $\|u\| = 1$ e usando o teorema de Hanh-Banach [2], podemos afirmar que existe uma forma linear contínua $f \in X'$ (X' é o dual de X) tal que:

$$f(u) = 1 \quad \text{e} \quad \|f\| = 1$$

Seja φ uma aplicação dos reais positivos nos complexos definida por

$$\varphi(t) = f(S(t)u).$$

Sendo f contínua segue-se que φ é derivável para todo $u \in D(A)$ e obtemos:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\,[f(S(t+h)u) - f(S(t)u)] = f[\lim_{h \to 0} \frac{S(t+h)u - S(t)u}{h}] =$$
$$= f(\frac{d}{dt}\, S(t)u) = f(S(t)Au) = f(S(t)\lambda u) = \lambda f(S(t)u) = \lambda\varphi(t)$$

$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda\varphi(t)$ possui como solução $\varphi(t) = Ce^{\lambda t}$ e como $\varphi(0) = f(S(0)u) = f(u) = 1$ temos $C = 1$ e

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}.$$

Mas, então:

$$|\varphi(t)| = |f(S(t)u)| \leq \|f\|\,\|S(t)u\| = \|S(t)u\|$$

o que resulta

$$\|S(t)\| \geq \|S(t)u\| \geq |\varphi(t)| = e^{\lambda t} \geq e^{kt} \quad \text{se} \quad \lambda > k$$

o que é uma contradição, pois, por hipótese $\|S(t)\| \leq e^{kt}$ para

$\lambda > k$.

Logo, os $\lambda > k$ não são valores próprios de A.

DEFINIÇÃO: Seja A um operador de X em X, X um espaço de Banach. Se para $\lambda \in \mathbb{C}$ o operador $(\lambda I-A)$ com domínio $D(\lambda I-A)$ tiver imagem densa em X e possuir inverso limitado então o operador $(\lambda I-A)^{-1}$ é chamado resolvente de A e o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que o resolvente de A existe é chamado conjunto resolvente de A.

Indicaremos o conjunto resolvente de A por $\rho(A)$ e o resolvente por $R(\lambda,A)$. De acordo com a definição acima $\lambda \in \rho(A)$ se $(\lambda I-A)$ for biunívoca, possuir imagem densa em X e $(\lambda I-A)^{-1}$ for contínuo. Vimos pela Proposição 6 que se o semigrupo $\{S(t),\ t \geq 0\}$ de classe C_0 satisfaz à condição de crescimento $\|S(t)\| \leq e^{kt}$ $k > 0$ então os $\lambda > k$ não podem ser autovalores do gerador infinitesimal A. Pode-se mostrar que se o semigrupo satisfaz à condição de crescimento acima então os números λ tais que $\lambda > k$ pertencem ao conjunto resolvente de A e que para tais λ o resolvente de A é a transformada de Laplace do semigrupo $S(t)$. Se $\|S(t)\| \leq e^{kt}$ então a integral,

$$J_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)u\, dt$$

é convergente para todo $u \in X$, pois

$$\|J_\lambda u\| \leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}\, S(t)u\| dt \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|S(t)\|\,\|u\| dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{kt} \|u\| dt = \|u\| \int_0^\infty e^{-(\lambda-k)t} dt = \frac{\|u\|}{|\lambda-k|} .$$

Assim, $J_\lambda u$ é a transformada de Laplace de $S(t)$.

Temos a seguinte

PROPOSIÇÃO 7: Para todo $\lambda > k$ $R(J_\lambda) = D(A)$ e $J_\lambda u = (\lambda I - A)^{-1} u$ onde $R(J_\lambda)$ é o conjunto de valores de J_λ.

(Demonstração [13]). Segue-se do que foi dito antes e da Proposição 7 que se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}$ de classe C_o com $\|S(t)\| \leq e^{kt}$ então $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e, para todo $\lambda > k$ vale $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda - k|}$.

TEOREMA (Hille-Yosida): Seja X um espaço de Banach. Uma condição necessária e suficiente para que um operador A de X seja gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_o satisfazendo a condição $\|S(t)\| \leq e^{kt}$, $k > 0$ é que $D(A)$ seja denso em X, que os números reais $\lambda > k$ pertençam ao conjunto resolvente de A e para tais λ se tenha

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda - k|} .$$

Demonstração: Necessidade: Vimos que se A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_o então $D(A)$ é denso em X pela Proposição 5. Além disto, se $\|S(t)\| \leq e^{kt}$ então para todo $\lambda > k$ tem-se que $\lambda \in \rho(A)$ e $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq (\lambda - k)^{-1}$ pela Proposição 7 e pelos comentários que a precederam.

Suficiência: Temos de mostrar que se A é um operador com domínio $D(A)$ denso em X e tal que se $\lambda > k$ o resolvente $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e satisfaz a condição

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq (\lambda - k)^{-1}$$

então A é gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ de classe C_o satisfazendo a condição $\|S(t)\| \leq e^{kt}$, $k > 0$.

Indicando o resolvente de A por $R(\lambda, A)$ e usando o fato de que $\|R(\lambda, A)\| \leq (\lambda - k)^{-1}$ para $\lambda > k$ é fácil verificar que para todo $u \in D(A)$ temos os seguintes resultados: [13]

a) $\lambda R(\lambda, A)u - u = R(\lambda, A)Au$

$$\|\lambda R(\lambda, A)u - u\| = \|R(\lambda, A)Au\| \leq \frac{\|\tilde{A}u\|}{(\lambda - k)}$$

donde $\lambda R(\lambda, A)u \to u$ quando $\lambda \to \infty$.

b) $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq \lambda(\lambda - k)^{-1} \leq 2$ se $\lambda > 2k$ logo $\{\lambda R(\lambda, A)\}$ é uniformemente limitada. Como $D(A) = X$ segue-se que $\lambda R(\lambda, A)u \to u$ para todo $u \in X$.

c) Seja o operador $B_\lambda = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda$. B_λ é limitado para $\lambda > k$ logo e^{tB_λ} está bem definida e vale

$$\|e^{tB_\lambda}\| \leq e^{t\frac{\lambda k}{\lambda - k}} \qquad \text{para} \quad \lambda > k$$

ou

$$\|e^{tB_\lambda}\| \leq e^{kt} \qquad \text{para} \quad \lambda > 2k$$

ou seja, e^{tB_λ} é uniformemente limitado se $\lambda > 2k$.

Supondo $u \in D(A)$ definimos $S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda}$ e obtemos

$$\frac{d}{dt} S_\lambda(t)u = S_\lambda(t)B_\lambda u$$

De

$$S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u = \int_0^t \frac{d}{ds}[S_\mu(t-s)S_\lambda(s)u]\,ds =$$

$$= \int_0^t S_\mu(t-s)\, S_\lambda(s)(B_\lambda u - B_\mu u)\,ds$$

vem

$$\|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| \le te^{2kt}\|B_\lambda u - B_\mu u\|.$$

Para $u \in D(A)$ $B_\lambda u \to Au$ logo $\|B_\lambda u - B_\mu u\| \to 0$ quando $\lambda,\mu \to \infty$ e isto implica ser $\{S_\lambda(t)u\}$ convergente para todo $u \in D(A)$ em qualquer intervalo $0 \le t \le t_o$ quando $\lambda \to \infty$. Sendo $\overline{D(A)} = X$ para todo $v \in X$ existe $u \in D(A)$ tal que $\|u-v\| < \varepsilon$. Logo:

$$\|S_\lambda(t)v - S_\mu(t)v\| \le \|S_\lambda(t)v - S_\lambda(t)u\| + \|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| +$$
$$+ \|S_\mu(t)u - S_\mu(t)v\| \le 2\varepsilon\, e^{2kt} + \|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\|$$

donde
$$\lim_{\lambda,\mu\to\infty} \|S_\lambda(t)v - S_\mu(t)v\| \le 2\varepsilon\, e^{2kt}$$

Sendo X completo $S_\lambda(t)v$ converge para todo $v \in X$ e para todo t em cada intervalo $[0,t_o]$.

Podemos por então:

$$\lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)v = S(t)v.$$

Pelo teorema de Banach-Steinhauss $S(t)$ é limitada em X e

$$\|S(t)\| \le \lim_{\lambda\to\infty} \inf \|S_\lambda(t)\| = \lim_{\lambda\to\infty} \inf e^{t\frac{\lambda k}{\lambda - k}} = e^{kt},$$

isto é, $S(t)$ satisfaz à condição de crescimento. Também, sendo uniforme a convergência concluimos que $S(t)$ é contínua em t.

$$S(0)v = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(0)v = \lim_{\lambda\to\infty} e^{oB_\lambda} v = v$$

e
$$S(0) = I$$

$$S_\lambda(t+s)v = e^{(t+s)B_\lambda} v = e^{tB_\lambda} e^{sB_\lambda} v = S_\lambda(t)\, S_\lambda(s)v$$

e

$$\lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t+s)v = S(t+s)v = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)\, S_\lambda(s)v = S(t)\, S(s)v$$

Suponhamos que B seja o gerador infinitesimal de $S(t)$. De

$$S(t)u-u = \int_0^t \frac{d}{ds} S_\lambda(s)u\, ds = \int_0^t S_\lambda(s)\, B_\lambda u\, ds$$

temos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(S(t)u-Iu) = Au \quad \text{se} \quad u \in D(A)$$

Assim, $D(A) \subset D(B)$ e $B|_{D(A)} = A$, isto é, B é uma extensão de A. Mostremos que $D(A) = D(B)$.

Em $D(A)$, $(\lambda I-A) = (\lambda I-B)$. Como B é gerador infinitesimal de $\{S(t)\}$ se $\lambda > k$, $\lambda \in \rho(B)$ e $(\lambda I-B)\colon D(B) \to X$ é uma aplicação biunívoca. Logo, $(\lambda I-A)\colon D(A) \to X$ é biunívoca.

Seja $u \in D(B)$, $v = (\lambda I-B)u$, $w = (\lambda I-A)^{-1}v$.

Então, $w \in D(A) \subset D(B)$ e $(\lambda I-A)w = v = (\lambda I-B)u$.

Sendo $w \in D(A)$ e $(\lambda I-A) = (\lambda I-B)$ em $D(A)$ e biunívoco temos que $w = u$ logo $u \in D(A)$ isto é, $D(A) = D(B)$ e $A = B$.

Assim, A é gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ de classe C_0 satisfazendo $\|S(t)\| \leq e^{kt}$, $k > \lambda$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARIS, R. - Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics. Prentice-Hall (1962)

[2] BACHMAN, G.-NARICI, L. - Functional Analysis. Academic Press (1969)

[3] GOLDSTEIN, J.A. - Semi groups of operators and abstract Cauchy problems. Tulane University, 1970.

[4] CODDINGTON, E.A.- LEVINSON, N. - Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill (1955)

[5] FLEMING, H.W. - Functions of Several Variables. Addison-Wesley (1966)

[6] FRIEDMAN, A. - Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston (1969)

[7] FUJITA, H. - On the existence an regularity of the steady state solutions of the Navier-Stokes equations. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.I 9 (1961) (59-102)

[8] FUJITA, H.- Kato, T. - On the Navier-Stokes initial value problem. Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 16 (1964) (269-315)

[9] KATO, T. - A generalization of the Heinz inequality. Proc. Japan Acad. 37 (1961) (305-308)

[10] KATO, T.-FUJITA, H. - On the non-stationary Navier-Stokes system. Rediconti Sem. Math. Univ. Padova, 32 (1962) (243-260)

[11] KATO, T. - Fractional powers of dissipative operators. J. Math. Soc. Japan 13 (1961) (246-274)

[12] LADYZHENSKAYA, A.O. - The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. Gordon and Breach (1968)

[13] MEDEIROS, L.A. - Tópicos de Análise Funcional. Inst. de Mat. Univ. Fed. Pernambuco. Textos de Matemática nº 17.

[14] MEDEIROS, L.A. - The initial value problem for nonlinear wave equations in Hilbert Space.
Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 136 (1969) (305-327)

[15] MIKHLIN, S.G. - Mathematical Physics, an Advanced Course. North-Holland (1970)

[16] SERRIN, J. - Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics. Handbuch der Physik Bd VIII/1

[17] SMIRNOV, V.I. - A Course of Higher Mathematics. Vol. V Pergamon Press (1964)

[18] STAKGOLD, I. - Boundary Value Problems of Mathematical Physics

[19] YOSIDA, K. - Functional Analysis. Springer Verlag (1971)

E R R A T A

Pág.	Linha	Onde se lê	Leia-se
6	última	$(x_o,t) \to x_i(x,t)$	$(x_o,t) \to x_i(x_o,t)$
20	última	$\sum\limits_{L=1}^{3} \sigma(\xi^{-i},t,-e_i)+\sigma(\overline{\xi},t,\eta)$	$\sum\limits_{L=1}^{3} \sigma(\overline{\xi}^{\,i},t,-e_i)\eta_i+\sigma(\overline{\xi},t,\eta)$
35	12	$\leq \dfrac{1}{k-\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda-k}, \quad \lambda > k$
39	17 19	$-\Delta u + \lambda u = 0$	$-\Delta u + \lambda u = g$
47	20	Seja A	Seja $-A$
47	21	tal que $(\lambda I - A)^{-1}\ldots$	tal que $(\lambda I + A)^{-1}\ldots$
54	18	$t \in [\varepsilon t]$	$t \in [\varepsilon,t]$
57	12	$\|A^{1/2}\psi(t)\| \leq \ldots.$	$\|A^{1/2}\psi(t)\| \leq \ldots.$ (10,5)
58	17	$0 < s \leq t \leq T \ldots.$	$0 < s \leq t \leq T \ldots.$ (10,6)
60	6	Pelo Lema (-4 (9,21)	Pelo Lema (9-4) (9,21) (9,21)
62	15	$\|Pf\| = 0(t - \frac{3}{4})$	$\|Pf\| = 0(t^{-\frac{3}{4}})$
64	17	$W_\eta(t) = \ldots$	$W_{\eta+1}(t) = \ldots.$
66	12	$\alpha_\eta = \underset{0<s\leq T}{} s^{1/2}\|\ldots\|$	$\alpha_\eta = \sup\limits_{0s\leq T} s^{1/2}\|\ldots.\|$
67	18	$\leq 2\, K_o(t)\, t^{-1/4}$	$\leq 2\, K_o(t)$

Pág.	Linha	Onde se lê	Leia-se
69	1	$\|\|A^{1/2}a\|\| + \ldots$	$\|\|A^{1/4}a\|\| + \ldots$
72	6	$[0, t_1']$	$[0, t']$
76	última	depende de β, γ e $\|\|A^{\beta}a\|\|$	depende de $\beta, \gamma, \|\|A^{\beta}a\|\|$ e de $M = \sup_{0<t\leq T} t^{1-\beta}\|\|Pf(t)\|\|$
89	5	e $\frac{dU\varepsilon}{dt} = A \quad \varepsilon + F_u$	e $\frac{dU\varepsilon}{dt} = - A\,U\varepsilon + F_u$
93	14	$\Delta u = 0$	$\Delta\phi = 0$

****

"PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARA A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES"

NIRZI GONÇALVES DE ANDRADE

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Luiz Adalto da Justa Medeiros/CBPF

Mario Novello/CBPF

Adel da Silveira/CBPF

Guilherme Maurício Souza Marcos de La penha

Pedro H. Rivera Rodrigues/ UFRJ

Rio de Janeiro, 22 de novembro de 1973