

CBPF-NF-071/85  
SOLUÇÃO EXATA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DOS NUCLEONS  
COM SEÇÃO DE CHOQUE INELÁSTICA CRESCENTE

por

H.M. Portella

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/CNPq  
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150  
22290 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

Instituto de Física  
Universidade Federal Fluminense  
24210 - Niterói, RJ - Brasil

## RESUMO

O presente artigo emprega o método das aproximações sucessivas na obtenção de uma solução analítica exata e compacta da equação diferencial que descreve a difusão da componente nucleônica na atmosfera, quando a seção de choque inelástica da interação nucleon-núcleo do ar cresce com a energia. O resultado é comparado com dados experimentais obtidos em Chacaltaya ( $x = 540 \text{ g/cm}^2$ ) pela colaboração Brasil-Japão que usa câmaras de emulsão. O valor da constante  $a$ , que mede a variação da seção de choque com a energia, que melhor ajusta o resultado encontrado com os dados experimentais está entre 0.05 e 0.06.

Palavras-chave: Equação de difusão dos nucleons na atmosfera; Seção de choque inelástica variável.

## I INTRODUÇÃO

Conhecido o espectro primário da radiação cósmica obtido por medidas diretas, é possível encontrar o espectro correspondente a uma profundidade  $x(\text{g/cm}^2)$  resolvendo-se a equação diferencial que descreve a difusão dos nucleons na atmosfera. Os resultados encontrados resolvendo-se a equação diferencial

$$\frac{\partial F_N(x, E)}{\partial x} = - \frac{F_N(x, E)}{\lambda_N} + \frac{F_N(x_1 E/\eta)}{\eta x \lambda_N} \quad (1)$$

com a condição inicial

$$F_N(0, E) = N_0 E^{-(\gamma+1)}$$

estão em franco desacordo com aqueles obtidos experimentalmente em Fuji ( $x = 650 \text{ g/cm}^2$ ), Pamir ( $x = 594 \text{ g/cm}^2$ ) e Chalcathaya ( $x = 540 \text{ g/cm}^2$ ) quando se consideram os seguintes fatos:

- a) livre percurso médio da interação nucleon núcleo do ar constante
- b) espectro primário constituído só de prótons
- c) validade do scaling de Feynman

Várias hipóteses têm sido apresentadas para explicar tal discrepância, como as que se seguem

- a) espectro primário mais completo, com a presença de nucleos pesados para energias acima de 155 TeV.
- b) violação do scaling de Feynman
- c) aumento da seção de choque inelástica da interação nucleon-núcleo do ar com a energia
- d) Variação brusca da expoente  $\gamma$  na expressão  $N_0 E^{-(\gamma+1)}$  do espectro diferencial primário a partir de uma determinada energia

e) uso do modelo CKP (G. Cocconi, L.J. Koester and D.H. Perkins)<sup>(1)</sup> para descrever o mecanismo de produção de pions.

Experiências efetuadas em aceleradores para reações  $p-p$ <sup>(2-6)</sup> e as realizadas ultimamente no CERN para reações  $p-\bar{p}$ <sup>(7,8)</sup>, mostram-nos de maneira evidente, o aumento com a energia da seção de choque total dessas reações. Esse acréscimo pode ser colocado nas formas  $(S/S_0)^a$ ,  $\ln^2(S/S_0)$  ou convenientemente expresso por  $(1 + a \ln E/E_0)$  ( $E$  = energia do nucleon incidente no sistema de laboratório) como indicado por N.L. Guigorov<sup>(9)</sup> com validade no intervalo  $(1 \leq E \leq 150)$  TeV.

Vamos assumir, também, que a seção de choque inelástica da interação nucleon-nucleo do ar cresça com a energia do nucleon incidente de maneira similar, e consideremos para o nosso propósito uma lei de variação da forma

$$\sigma_{n-A}^{in} = \sigma_0^{in} (1 + a \ln E/E_0)$$

Tendo em vista esses resultados é nosso intuito resolver a equação de difusão dos nucleons na atmosfera (1) com o auxílio do método rigoroso das aproximações sucessivas, já utilizado em artigos precedentes por F.M. de Oliveira Castro<sup>(10)(11)</sup>.

Considerando a equação diferencial (1) com a condição inicial  $F(0, E) = G(E)$  e uma lei de variação para o livre percurso médio da interação nucleon-nucleo do ar da forma  $\frac{1}{\lambda_N(E)} = \frac{1 + a \ln E/E_0}{\lambda_N^0}$ , obtivemos uma solução exata que converge absolutamente, com raio de convergência  $\rho = 1$ . Quando o espectro diferencial primário for  $N_0 E^{-(\gamma+1)}$  a solução encontrada para o espectro integral de nucleons é de extrema simplicidade facilitando a con-

frontação com os dados experimentais.

O problema por nós resolvido tem sido estudado por vários autores<sup>(9)(12)(13)</sup>. Todos utilizaram como espectra diferencial primário de prótons a expressão aproximada  $N_0 E^{-(\gamma+1)}$ . As equações usadas para descrever a difusão dos nucleons e as hipóteses admitidas para a distribuição da elasticidade da colisão são ligeiramente diferentes, mas a lei de variação da seção de choque inelástica com a energia do nucleon incidente, dentro de certos limites é a mesma daquela por nós utilizada.

## 2-a) = SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DOS NUCLEONS NA ATMOSFERA

Vamos utilizar para descrever a difusão dos nucleons na atmosfera, a equação diferencial

$$\frac{\partial F_N(x, E)}{\partial x} = - \frac{F_N(x, E)}{\lambda_N(E)} + \frac{F_N(x, E/\eta)}{\lambda_N(E/\eta) \cdot \eta} \quad (2)$$

mais frequentemente usada que a empregada na referencia (11) onde  $F_N(x, E)$  representa o fluxo diferencial de nucleons com energia entre  $E$  e  $E + dE$  na profundidade  $x$  ( $\text{g}/\text{cm}^2$ ).

$\eta$  é a elasticidade média da colisão suposta constante, tal que  $0 < \eta_{\min} \leq \eta < 1$ .

$\lambda_N(E)$  é o livre percurso médio da interação nucleon- nucleodo ar expressa por

$$\frac{1}{\lambda_N(E)} = \frac{1 + a \ln E/E_0}{\lambda_N^0} \quad (3)$$

com  $\lambda_N^0$  constante.

A equação diferencial (2) está sujeita a condição limite  $F_N(0, E) = G(E)$ , onde  $G(E) dE$  representa o espectro diferencial de prótons no topo da atmosfera ( $x = 0$ ). A função  $G(E)$  é suposta ser contínua positiva e limitada ( $G(E) \leq M$ ) no intervalo  $D < E_{\min} \leq E < \infty$ . A integral  $\int_E^\infty G(E) dE$  existe como condição básica e necessária para a existência do espectro integral dos nucleons no topo da atmosfera.

Em artigo precedente (10), mostra-se que, para o caso de  $\lambda_N$  constante e supondo-se válidas as hipóteses acima mencionadas sobre a função  $G(E)$ , o método das aproximações sucessivas conduz a uma solução única do problema idêntica a obtida por G. Brooke, P.J. Haymann, Y. Kamy, e A.W. Wolfendale<sup>(14)</sup>.

Para simplificar nosso problema vamos proceder a substituição:

$$F_N(x; E) = e^{-x/\lambda_N(E)} y_N(x, E) \quad (4)$$

A equação diferencial (2) fica

$$\frac{\partial y_N(x, E)}{\partial x} = \frac{e^{-\delta(\eta)x}}{\eta \lambda_N(E/\eta)} y_N(x, E/\eta) \quad (5)$$

com

$$y_N(0, E) = G(E) \quad (6)$$

e

$$\delta(\eta) = \frac{a}{\lambda_N^0} \ln \frac{1}{\eta}$$

A equação diferencial (5) com a condição inicial (6) equivalem a equação integral

$$y_N(x, E) = G(E) + \frac{1}{\eta \lambda_N(E/\eta)} \int_0^x e^{-\delta(\eta)t} y_N(t, E/\eta) dt \quad (7)$$

Para resolver a equação (7) usamos as seguintes aproximações sucessivas

$$y_{N_0}(x, E) = G(E)$$

$$y_{N_n}(x, E) = G(E) + \frac{1}{\eta \lambda_N(E/\eta)} \int_0^x e^{-\delta(\eta)t} y_{N_{n-1}}(t, E/\eta) dt \quad (8)$$

A n-ésima aproximação é

$$y_{N_n}(x, E) = \sum_{i=0}^n \frac{G(E/\eta^i)}{\eta^i [\lambda_N(E/\eta) \lambda_N(E/\eta^2) \dots \lambda_N(E/\eta^i)]} \times \\ \times \int_0^x e^{-\delta(\eta)t_i} dt_i \int_0^{t_i} e^{-\delta(\eta)t_{i-1}} dt_{i-1} \dots \int_0^{t_2} e^{-\delta(\eta)t_1} dt_1$$

podendo ser escrita como

$$y_{N_n}(x, E) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i(E)}{\eta^i} G(E/\eta^i) \phi_i(x, \delta(\eta)) \quad (9)$$

onde

$$a_i(E) = \frac{1}{\lambda_N(E/\eta) \lambda_N(E/\eta^2) \dots \lambda_N(E/\eta^i)}, \quad i > 0 \quad (10)$$

e  $\phi_i(x, \delta)$  representa a integral multipla calculada por indução,

com solução

$$\phi_i(x, \delta) = \frac{1}{i!} \left( \frac{1 - e^{-\delta(\eta)x}}{\delta(\eta)} \right)^i \quad (11)$$

Usando a expressão (3) para  $\lambda_N(E)$  nós podemos escrever

$$\lambda_N(E/\eta^j) = \delta(\eta)(Z(E) + j)$$

$$\text{com, } Z(E) = \frac{1 + a \ln E/E_0}{\delta(\eta)\lambda_N^0}$$

e

$$a_i(E) = \delta^i(\eta) \prod_{j=1}^i (Z(E) + j) = \delta^i(\eta) \frac{\Gamma(Z+i+1)}{\Gamma(Z+1)} \quad (12)$$

Assim a n-ésima aproximação pode ser escrita

$$y_{N_n}(x, E) = \sum_{i=0}^n \frac{G(E/\eta^i)}{i!\eta^i} \frac{\Gamma(Z+1+i)}{\Gamma(Z+1)} \left( 1 - e^{-\delta(\eta)x} \right)^i \quad (13)$$

2-b) CONVERGÊNCIA DA SUCESSÃO  $y_{N_n}(x, E)$ .

Admitidas as condições iniciais para a função  $G(E)$ , então

$$|y_{N_n}(x, E)| \leq M \sum_{i=0}^n \frac{\Gamma(Z+1+i)}{\Gamma(Z+1)i!} \alpha^i \quad (14)$$

onde  $M$  é uma constante positiva e  $\alpha = \frac{1}{\eta}(1 - e^{-\delta x})$ . O lado direito da expressão 14 é a soma parcial de ordem  $n$  do desenvolvimento  $M(1 - \alpha)^{-(z+1)}$  com raio de convergência  $\rho = 1$ . Dessa maneira a soma parcial  $y_{N_n}(x, E)$  representada pela expressão (13) converge absoluta e uniformemente para a solução da equação inte-



gral (7),  $y_N(x, E)$ , tal que

$$y_N(x, E) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{N_n}(x, E)$$

A função  $y_N(x, E)$  é contínua no conjunto fechado  $T$  cujos pontos  $(x, E)$  satisfazem as condições

$$0 < E_{\min} \leq E \leq E_{\max}$$

$$e^{-\delta(\eta)x} \geq 1 - \eta$$

Assim o fluxo diferencial de nucleons com energia entre  $E$  e  $E + dE$ , a uma profundidade  $x$  ( $\text{g/cm}^2$ ) pode ser escrito

$$F_N^d(x, E) = e^{-x/\lambda_N(E)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(z+1+i) G(E/\eta^i)}{\Gamma(z+1) i! \eta^i} (1 - e^{-\delta x})^i \quad (16)$$

A condição  $|\alpha| < 1$  é sempre satisfeita para  $x \geq 0$ ,  $\delta(\eta) > 0$  e  $0 < \eta_{\min} \leq \eta < 1$ .

Mediante um cálculo elementar podemos confirmar, por substituição de (16) na equação diferencial (2), que a solução por nós encontrada, realmente, satisfaz a equação da difusão dos nucleons na atmosfera.

### 3 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Adotando-se para representar o espectro diferencial primário de prótons a expressão aproximada  $G(E) = N_0 E^{-(\gamma+1)}$ , o espectro diferencial

de nucleons na profundidade  $x(\text{g}/\text{cm}^2)$  expresso por (16) toma a forma

$$F_N(x, E) = N_0 E^{-(\gamma+1)} e^{-x/\lambda_N(E)} (1 - \alpha')^{-(Z+1)} \quad (17)$$

com

$$\alpha' = \eta^\gamma (1 - e^{-\delta(\eta)x})$$

e a respectiva condição inicial

$$F_N(0, E) = N_0 E^{-(\gamma+1)}$$

Da solução exata (17) por nós obtida, mediante algumas aproximações, obtemos a solução aproximada encontrada por N.L. Grigorov<sup>(9)</sup>

$$F_N(x, E) \cong N_0 E^{-(\gamma+1)} e^{-x/L_n(E)}$$

onde

$$L_n(E) = \frac{\lambda_N(E)}{1 - \eta^\gamma}$$

que representa o livre percurso médio de absorção do nucleon na atmosfera.

O espectro integral de nucleons correspondente é

$$F_N(x, \geq E) = \frac{N_0 e^{-x/\lambda_N^0} E_0^{ax/\lambda_N^0} (1 - \alpha')^{-(z+1)} E^{-(\gamma+ax/\lambda_n^0)}}{\gamma + \frac{ax}{\lambda_n^0} + \frac{\ln(1 - \alpha')}{\ln 1/\eta}} \quad (18)$$

Os valores numéricos de  $F_N(x, \geq E)$  foram calculados com  $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$ ,  $\eta = 0.5$  e o valor  $E_0$  da fórmula (3) igual a 1 TeV. O espectro integral primário de prótons utilizado foi o obtido pela Colaboração JACBE<sup>(15)</sup>. Os resultados encontrados são válidos no intervalo  $(1 \leq E \leq 150) \text{ TeV}$ . Avaliando-se a produção de pions em Chacaltaya, com a aproximação  $\lambda_N$  constante e igual a  $80 \text{ g/cm}^2$  em cerca de 20% do total de hadrons<sup>(16)</sup>, construímos o espectro integral de nucleons a partir do correspondente espectro de hadrons obtido experimentalmente. A comparação do nosso resultado com os dados experimentais<sup>(17)</sup> reavaliados segundo a aproximação acima mencionada, mostra-nos um bom ajuste para valores de  $a$  entre 0.05 e 0.06. Esse resultado é comparável ao 0.06 encontrado pela Colaboração M<sup>t</sup> Fuji<sup>(18)</sup> e por M. Shibata<sup>(19)</sup> obtidos por meio de simulação.

Usando a aproximação  $\ln(1 - \alpha') \approx -\alpha'$ , a expressão (18), fica

$$F_N(x, \geq E) = \frac{N_0 E_0 \left( \frac{ax}{\lambda_N^0} - \frac{a\alpha'}{\delta\lambda_N^0} \right) e^{-x/\lambda_N^0 + \alpha' \left( 1 + \frac{1}{\delta\lambda_N^0} \right) E} \left( \gamma + \frac{ax}{\lambda_N^0} - \frac{a\alpha'}{\delta\lambda_N^0} \right)}{\gamma + \frac{ax}{\lambda_N^0} - \frac{a\alpha'}{\delta\lambda_N^0}} \quad (19)$$

Assim, se a seção de choque inelástica da colisão nucleon-nucleo do ar crescer de acordo com  $\sigma_{N-A}^{\text{in}}(E) = \sigma_0^{\text{in}}(1 + a \ln E/E_0)$ , no intervalo  $(1 \leq E \leq 150) \text{ TeV}$ , o expoente  $\gamma$  do espectro energético de nucleons na profundidade  $x$ , tomará a forma aproximada

$$\gamma' \approx \gamma + \frac{ax}{\lambda_N^0} - \frac{a\alpha'}{\delta\lambda_N^0} \quad (20)$$

com  $\gamma$  sendo o expoente do espectro primário de nucleons. Em Chacaltaya  $\gamma'$  assumirá os valores

$$a = 0.05 \implies 1.92 \leq \gamma' \leq 2.02$$

$$a = 0.06 \implies 1.97 \leq \gamma' \leq 2.07$$

Uma simples análise da figura 1, nos confirma o fato mencionado na introdução deste trabalho que se  $\lambda_N$  for constante, o fluxo integral de nuelons em Chacaltaya calculado analiticamente fica muito longe dos dados experimentais.

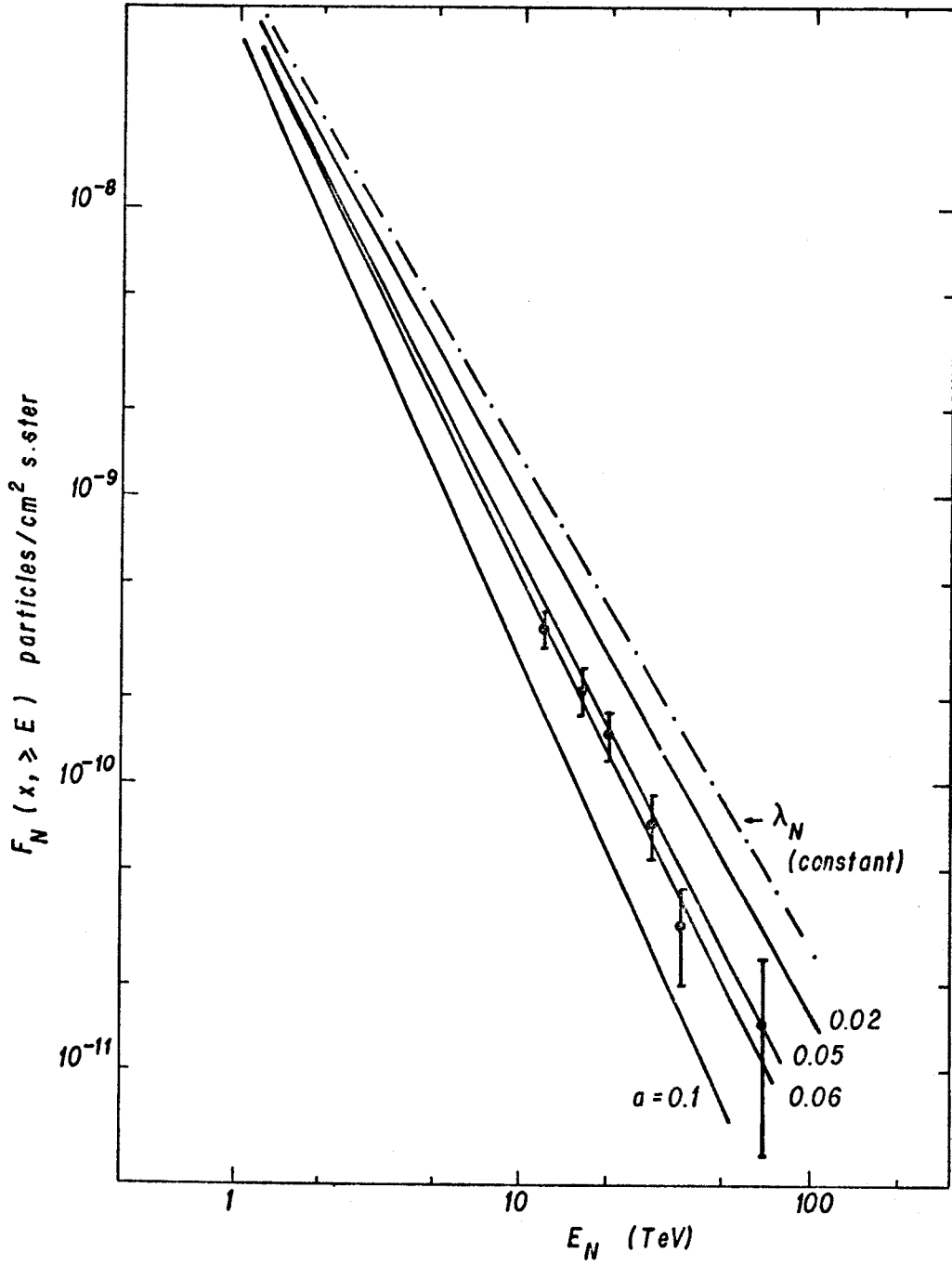
#### AGRADECIMENTO

O autor agradece aos professores N. Amato e N. Arata pela leitura do manuscrito, a F.M. de Oliveira Castro pela indicação do método analítico empregado e pela verificação dos cálculos, a colaboração Brasil-Japão pela utilização dos dados experimentais e ao CBPF pela publicação do presente artigo em Notas de Física.

## LEGENDA DAS FIGURAS

Fig. 1 - Espectro de nucleons no Monte Chacaltaya, ( $x = 540 \text{ g/cm}^2$ ).

A energia observada  $\tilde{E}$  é convertida na energia do nucleon,  $E_N = E_{\text{obs}} \cdot 0,25^{(20)}$ . — presente trabalho, —.—.— resultado para  $\lambda_N$  constante, ● dados experimentais da referência (20).



## BIBLIOGRAFIA

- (1) G. Cocconi, L.G. Koester and D.H. Perkins, Lawrence Radiation Laboratory High Energy Physics Study Seminars Report n° 28.2 (U.C.I.D-1944, 1, 961) unpublished.
- (2) H. Cheng and T.T. Wu, Phys. Rev. Lett. 24, 1456 (1970).
- (3) G.B. Yodh, Yash Pal and J.S. Trefil, Phys. Rev. Lett. 28, 1005 (1972).
- (4) D.R.O. Morrison, Preprint CERN, Phys. 73-46.
- (5) E. Leader and W. Maor, Phys. Lett. 43B, 505 (1973).
- (6) U. Amaldi et al., Nucl. Phys. B145, 367 (1978).
- (7) UA(1) Collaboration CERN/E.P. 83-70, may 27th (1983), submitted to Physics Letters B.
- (8) UA(4) Collaboration, CERN/E.P. 82-111, 21 july (1982).
- (9) N.L. Grigorov, Sov. J. Nucl. Phys. 26(4), 419-426 (1977).
- (10) F.M. de Oliveira Castro, An. Acad. Bras. Cienc. 49, 113 (1977).
- (11) F.M. de Oliveira Castro, Topics on Cosmic Rays-60th anniversary of C.M.G. Lattes, vol. I, 151 (1984).
- (12) K. Kasahara, A. Ohsawa, and Y. Takahashi Cosmic Ray Laboratory, CK. J. Report-11, Tokyo (1974).
- (13) J. Sidhanta et al., 18th I.C.R.C. Bangalore, HE 4-40, 5, 368 (1983).
- (14) G. Brooke, P.J. Haymann, Y. Kanuya and A.W. Wolfendale, Phys. Soc., 83-853 (1964).
- (15) JACEE Collaboration, Workshops on Cosmic Ray Interactions and High Energy Results, La Paz - R. Janeiro, 16 (1982).
- (16) F.M. de Oliveira Castro and H.M. Portella, in published.

- (17) Brasil-Japão Emulsion Chamber Group. Suppl. Prog. Theor. Phys. n° 47, 23 (1971).
- (18) M<sup>t</sup> Fuji Collaboration, 18th I.C.R.C., Bangalore, HE 4-5, 284 and HE-11, 57 (1983).
- (19) M. Shibata, Phys. Rev. D. 24, 7, 1847 (1981).
- (20) Brasil-Japão Emulsion Chamber Group 13th I.C.R.C., vol. 3, 2210 (1970).