

CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Rio de Janeiro

Monografia

CBPF-MO-001/15
janeiro 2015

Teoria Quântica de Campos

Jorge André Swieca

Teoria Quântica de Campos*

J.A. Swieca

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF,
Rua Dr. Xavier Sigaud 150, Urca,
22290-180, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

*Esta monografia apresenta as notas de aulas do curso de introdução à teoria quântica de campos dado em 1970 por Jorge André Swieca no Departamento de Física da PUC/RJ. As notas foram tomadas por diferentes alunos, como se pode perceber com facilidade a partir da variedade de caligrafias. Infelizmente, não nos são conhecidas as identidades desses alunos. A cópia não é o original, mas, sim, uma versão mimeografada, que pertence a Antonio Luciano Leite Videira, então professor do mesmo departamento, além de grande amigo de Swieca desde o período da antiga Faculdade Nacional de Filosofia (FNF_i). O material, usado para a digitalização, contém uma série de problemas decorrentes da ação do tempo sobre o papel, produzindo alguma imperfeição na qualidade das imagens vistas nas telas dos computadores ou em folhas impressas. A equipe da CDI/CBPF, a quem agradeço pelo empenho, procurou retirar as manchas, sem que o conteúdo fosse prejudicado. No entanto, não foi possível retirar todas elas. Ainda assim, o texto é legível. Finalmente, quero agradecer ao Professor Carlos Alberto Aragão de Carvalho Filho pela introdução. (Antonio Augusto Passos Videira)

Jorge André Swieca e a Teoria Quântica de Campos

No início dos anos 70, o Departamento de Física da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro tinha-se tornado uma referência para a física brasileira. E havia motivos de sobra para isso.

Com um quadro enxuto de cerca de 40 professores, pesquisadores ativos trabalhando em temas de fronteira, o Departamento produzia artigos científicos e ministrava cursos de padrão internacional.

O ambiente científico era enriquecedor, a ponto de atrair visitantes estrangeiros para colaborações científicas. Os estudantes se beneficiavam desse clima propício à investigação e ao aprendizado, e logo se engajavam na pesquisa.

O Departamento era estruturado em grupos: o de física nuclear estudava colisões atômicas; o de matéria condensada tinha áreas teóricas e experimentais; o de física teórica englobava gravitação, teoria de campos, partículas e óptica quântica.

Jorge André Swieca pertencia ao grupo de física teórica, mas seu brilhantismo era reconhecido por todos no Departamento. Físico de rara intuição aliada a amplo domínio da matemática, sua especialidade era teoria quântica de campos, tratada com o rigor e a profundidade da escola alemã de Rudolf Haag, seu mentor.

Swieca havia-se tornado internacionalmente conhecido por seus trabalhos, em especial pela solução, por meio de operadores, de um modelo de teoria de campos, o modelo de Schwinger bidimensional, fruto de colaboração com John Lowenstein.

Sua linha de pesquisa consistia em entender as teorias quânticas de campos com modelos bidimensionais que compartilhavam características importantes de suas extensões a quatro dimensões. Ele mesmo brincava que parecia estar confinado a um mundo bidimensional.

No seletivo universo dos teóricos de campos, seu nome era conhecido em todo o mundo. Ao chegar a Princeton para iniciar meu programa de doutorado, a mera menção de que fora supervisionado por ele atraiu atenção para meu trabalho de mestrado, já publicado na revista *Nuclear Physics B*.

Esse trabalho resolveu um problema proposto por Samuel MacDowell, de Yale. Ele foi mais um exemplo da visão, intuição e conhecimento de Swieca que, com sua sugestão de uma técnica de cálculo simplificadora, finalmente me tirou de um impasse e me levou à solução.

Além de pesquisador de destaque, ele era um professor de grande talento. Suas exposições claras, conceitualmente sólidas, e sua capacidade de simplificar os cálculos, valendo-se de admirável intuição física, tornavam suas aulas agradáveis e estimulantes, mesmo nos assuntos mais complexos.

Ele discorria sobre os mais variados assuntos quase sem fazer uso das notas de aula previamente preparadas. As deduções fluíam de maneira natural e tornavam simples o que sabíamos ser complicado. Fui seu aluno de mecânica quântica e teoria quântica de campos no Mestrado, o que determinou minha escolha desta última como área de pesquisa.

O curso que Swieca ministrou nos anos 70, e que eu tive o privilégio de assistir, traz a marca registrada do excepcional professor que ele foi. Claro, conciso, mesclando rigor e intuição de maneira bem dosada, as notas de aula desse curso me serviram durante toda a carreira. Fui aprovado nos difíceis exames de qualificação da Universidade de Princeton estudando as notas dos cursos de Swieca.

Certamente, muitos aspectos recentes dos testes e aplicações da teoria quântica de campos não aparecerão nessas notas. No entanto, tudo o que é conceitualmente necessário para acompanhar desenvolvimentos atuais estará lá. É, portanto, um ótimo ponto de partida para quem quer se aprofundar no mundo quântico, cujos segredos continuam a nos surpreender.

Em especial, o curso se concentrou em mostrar como a fusão de mecânica quântica e relatividade especial em uma mesma teoria levou a uma visão abrangente e poderosa, que serviu de base para entender a eletrodinâmica quântica e, posteriormente, levou ao modelo padrão das interações, a partir de sua extensão a campos de calibre não abelianos.

Aos novos alunos de Jorge André Swieca, meus sinceros votos de que saibam apreciar a leveza e a sutileza com que ele tratava os tópicos que ensinava. Quando isso ocorrer, esses novos aprendizes terão sido definitivamente atraídos pela física, uma das mais belas e importantes aventuras do conhecimento humano.

Carlos Alberto Aragão de Carvalho Fo.
Professor Titular do Instituto de Física da UFRJ

Curso de J. A. SWIECA - PUC - 1970

Física Quântica dos Campos Introdução

Algumas considerações sobre a equação de Schrödinger nos levam à conclusão de que ela não é adequada para descrever certos processos ocorrendo na natureza. Dentre estes, está o problema da instabilidade das partículas. Assim o conceito de uma partícula isolada perde seu significado. A ideia do movimento livre de uma partícula é assim apenas uma simples idealização da realidade.

Além disso, a equação de Schrödinger não é invariante sob transformações de Lorentz (apenas sob transformações de Galileu). Essas e outras considerações nos levam a ver que devemos modificar esta equação, procurando uma equação que seja covariante e que possa explicar um maior número de fenômenos.

Notação

Usaremos o sistema de unidades natural, onde $\hbar = c = 1$.

O tensor métrico escolhido tem componentes

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

2.

As coordenadas do espaço-tempo serão denominadas x^μ

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \quad c=1 \quad \mu=0, 1, 2, 3$$

Precisamos fazer distinção entre vetores covariantes e contra-variantes. Um vetor contra-variante (se transforma como os vetores coordenada) será denominado v^μ . Um vetor covariante (que se transforma como o gradiente) por v_μ . Igualmente para tensores.

O abaixamento e levantamento de índices é efetuado por meio do tensor métrico

$$v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu \quad v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu$$

Observe-se que $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$

O produto escalar de dois vetores será definido por.

$$p \cdot x = g^{\mu\nu} p_\mu x_\nu = g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = p_\mu x^\mu = p^\mu x_\mu$$

$$p_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar d_\mu$$

$$p_\mu \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i d_\mu \quad p^\mu = i \partial^\mu$$

$$d_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad \partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

Define-se o d'Alembertiano \square

$$\square = g^{\mu\nu} d_\mu d_\nu = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Obs $\delta^{4\nu} \equiv g^{4\lambda} \delta^\nu_\lambda = g^{4\nu}$ 3.
 $\delta_{4\nu} \equiv g_{4\lambda} \delta^\lambda_\nu = g_{4\nu}$ $g^\lambda_\lambda = \delta^\lambda_\lambda$

Sob uma transformação de Lorentz um vetor se transforma

$$V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu$$

e um tensor de segunda ordem

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\sigma T^{\lambda\sigma}$$

Equação de Onda Relativística

A equação de Schrödinger pode ser escrita formalmente por meio da substituição na equação relacionando energia e momento

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \quad E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\nabla$$

Uma equação relativística pode ser obtida a partir da relação relativística entre energia e momento

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{p} \rightarrow -i\nabla$$

obtendo a equação

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad \text{— equação de Klein Gordon}$$

Observemos que esta equação é de segunda ordem nas variáveis t e \vec{x} . Além disso, para caracterizar o sistema precisamos especificar um certo instante de tempo.

4.
 devemos saber ψ e $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ num instante t_0 .

A equação de Schrödinger nos leva a uma lei de conservação da probabilidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$$

A partir da equação de Klein Gordon chegamos também a uma lei de conservação

$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$ onde $j^\mu = \frac{1}{2mi} \left\{ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu} \right\}$
 sendo $j^0 = \frac{1}{2mi} \left\{ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right\}$ não definida positiva, por isso não se pode interpretar-la como uma densidade de probabilidade.

Outro motivo que nos leva a rejeitar a equação relativística de Klein Gordon é que não dá para calcularmos com exatidão os níveis de energia da átomo de Hidrogênio. Usando esta equação a separação entre os níveis de energia da estrutura fina para um dado n é muito maior do que é observado experimentalmente.

Atualmente compreende-se que a equação de Klein Gordon não deve ser rejeitada mas devemos dar a ela outra interpretação

5.

Equação de Dirac

Para nos conduzir a uma densidade de probabilidade positiva definida, devemos procurar uma equação de 1ª ordem no tempo.

$$\text{Sendo } p_4 p^4 = m^2$$

podemos escrever $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

A primeira idéia seria a de introduzirmos o operador $\sqrt{m^2 - \nabla^2}$, mas uma análise mais profunda nos leva ao fato de que este operador é um operador não local por ser um operador integral.

Continuando nossas considerações, lembremos que a quadrivelocidade, definida por

$$u^4 = \frac{p^4}{m} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (1, \vec{v})$$

podemos usar ela para escrevermos

$$p_4 v^4 - m = 0$$

A partir da equação anterior, esqueçamos que v^4 tenha qualquer relação com p^4 e façamos a substituição

$$p_4 \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x^4} \quad v^4 \rightarrow \gamma^4$$

Obtemos a equação

$$(i \gamma^4 \frac{\partial}{\partial x^4} - m) \psi = 0 \quad - \text{ equação de Dirac}$$

6.

Determinação de γ^4

Não nos esqueçamos que devemos ter ainda a relação $E^2 = p^2 + m^2$.

Ou ainda, a partir da equação de Dirac devemos poder obter a equação de Klein Gordon

Multiplicando a equação acima por $(i \gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + m)$ obtemos

$$\left(-\gamma^4 \frac{\partial}{\partial x^4} \gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - m^2\right) \psi = 0$$

ou ainda

$$\left(-\frac{(\gamma^4 \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^4)}{2} \frac{\partial}{\partial x^4} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m^2\right) \psi = 0$$

que se reduz à equação de Klein Gordon desde que

$$\{\gamma^4, \gamma^\nu\} = 2g^{4\nu}$$

Se γ^4 satisfaz às relações de anti-comutação acima, a equação de Dirac, pode nos levar à equação de Klein Gordon.

Prendemos agora representar os operadores γ^4 por meio de matrizes finitas.

Para isso procuramos analisar antes de mais nada, o que podemos afirmar a respeito das dimensões dessas matrizes.

$$\text{Se } \gamma \neq \gamma^{\nu} \quad \gamma^{\nu} \gamma^{\nu} = -\gamma^{\nu} \gamma^{\nu} \quad 7.$$

$$\det \gamma^{\nu} \gamma^{\nu} = \det \gamma^{\nu} \gamma^{\nu} = \det (-1) \det \gamma^{\nu} \gamma^{\nu}$$

Como $\det(-1) = (-1)^m$, sendo $m \times m$ a dimensão das matrizes, concluímos que m deve ser par. Assim, excluimos a possibilidade de γ^{ν} ser um número puro, pois γ^{ν} deve ser uma matriz de dimensão par.

O $\det \gamma^{\nu}$ deve ser diferente de zero (analise $\gamma = \gamma^{\nu}$)

Agora devemos procurar, como primeira tentativa entre as matrizes 2×2 . As matrizes de Dirac multiplicadas por i satisfazem relações de anti-comutação análogas. A dificuldade é que não encontrarei γ_0 que satisfaz as relações de comutação necessárias.

$$\text{Tomando } \vec{\gamma} = i \vec{\sigma}$$

como as matrizes $\vec{\sigma}$ e I formam uma base para o espaço das matrizes 2×2 , podemos escrever

$$\gamma^0 = c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3 + c_4 I$$

$$\text{ou } \gamma^0 = c_1 \sigma^1 + c_2 \sigma^2 + c_3 \sigma^3 + c_4 I$$

Devemos ter $\gamma^0 \gamma^i + \gamma^i \gamma^0 = 0$ Seja $i=1$:

$$0 = (c_1 \sigma^1 \sigma^1 + c_2 \sigma^2 \sigma^1 + c_3 \sigma^3 \sigma^1 + c_4 I \sigma^1) + c_1 \sigma^1 \sigma^1 + c_2 \sigma^1 \sigma^2 + c_3 \sigma^1 \sigma^3 + c_4 \sigma^1 I$$

$$-c_1 + c_2(\sigma^2 \sigma^1 + \sigma^1 \sigma^2) + c_3(\sigma^3 \sigma^1 + \sigma^1 \sigma^3) + c_4 I = 0$$

$\sigma_1 = \frac{c_1}{c_4} I \rightarrow c_1 = 0$. Fazendo para $i=2,3$ encontrarei $c_2 = c_3 = 0$. Como $\gamma^0 = I$ não satisfaz concluo que n não pode ser igual a 2.

Assim as matrizes de ordem mais baixa que esperamos encontrar as relações de anti comutação são as matrizes 4×4 . As matrizes definidas abaixo satisfazem as relações de anti comutação.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}$$

Esta representação (a menos de equivalência) é uma representação irredutível.

O teorema fundamental concernente às matrizes gama é:

"Dados dois conjuntos de matrizes 4×4 γ^μ e γ'^μ que satisfazem as regras de comutação

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

$$\gamma'^\mu \gamma'^\nu + \gamma'^\nu \gamma'^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

então existe uma matriz não singular S tal que

$$\gamma'^\mu = S \gamma^\mu S^{-1} "$$

$$\left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \Psi = 0$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Invariância relativística.

Usaremos a notação já introduzida. Assim, sob uma transformação de Lorentz as coordenadas se transformam de acordo com

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$$\text{com } x'^\mu x'_\mu = x^\nu x_\nu$$

Um campo escalar $\phi(x)$ é um campo tal que

$$\phi'(x') = \phi(x) = \phi(\Lambda^{-1}x')$$

Um campo vetorial

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) \quad \text{Assim que}$$

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x')$$

Um campo tensorial $F^{\mu\nu}(x) \rightarrow F'^{\mu\nu}(x')$

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}(x) \quad x = \Lambda^{-1}x'$$

A equação de Dirac será invariante em forma se definirmos

$$S \text{ tal que } \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$$

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x')$$

S é uma matriz 4×4 que opera sobre as componentes de ψ ou seja:

$$\psi'_\alpha(x') = S_{\alpha\beta}(\Lambda)\psi_\beta(\Lambda^{-1}x')$$

Assim, devemos encontrar S de tal forma que a exigência da invariância em forma nos leve a uma equação

$$\left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m \right) \psi'(x')$$

$$\left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m \right) \psi'(x') = S S^{-1} \left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m \right) S \psi(x)$$

$$S \left(S^{-1} \gamma^\mu S \Lambda^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m \right) \psi(x)$$

Obtemos a equação de Dirac novamente se for satisfeita a condição

$$S^{-1} \gamma^\mu S \Lambda^\mu_\nu = \gamma^\nu \quad \text{ou equivalentemente}$$

$$\Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu = S \gamma^\nu S^{-1}$$

Observe-se que $S\gamma^\mu S^{-1}$ se transforma como um ⁽¹⁰⁾ quadri-vetor, pois é possível encontrar S com esta propriedade.

$$\text{Seja } \gamma'^\mu = S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

$$\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = \Lambda^\mu{}_\beta \Lambda^\nu{}_\xi \{\gamma^\beta, \gamma^\xi\} = \Lambda^\mu{}_\beta \Lambda^\nu{}_\xi g^{\beta\xi}$$

$$\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

Assim mostramos que γ^μ e γ'^μ tem as mesmas relações de comutação e de acordo com o teorema anterior existe S . Assim provamos a existência de S .

Procuraremos a forma de S para uma dada transformação de Lorentz, considerando o caso de transformações de Lorentz próprias, ortogonais e homogêneas ($\det \Lambda = +1$, $\Lambda^0{}_0 > 0$). É suficiente investigar as transformações infinitesimais, desde que uma transformação finita pode ser obtida por exponenciação.

Para transformações infinitesimais

$$X'^\mu = X^\mu + \epsilon \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$$

$$\epsilon^\mu{}_\nu = \epsilon \Lambda^\mu{}_\nu$$

O que caracteriza o grupo das transformações de Lorentz é a invariância de $X^\mu X_\mu$, que para transformações infinitesimais pode ser escrita como

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$$

$$\epsilon^{\mu\nu} = g^{\gamma\beta} \epsilon^\mu{}_\beta$$

Para uma transformação infinitesimal

$$S = 1 + \epsilon^{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta$$

Obs: Somos levados a essa conclusão também por analogia ⁽¹¹⁾ com transformações infinitesimais em três dimensões com

$$S = 1 + i \frac{\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}}{2}$$

Assim esperamos que os geradores infinitesimais tenham a forma

$$S^{-1} = 1 - \frac{\epsilon_{\mu\nu}}{4} \gamma^\mu \gamma^\nu$$

Se substituirmos S na expressão $S \gamma^\mu S^{-1}$ constatamos que $S^{-1} \gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$ (use as regras de anti-comutação de γ^μ e despreze termos de ordem acima de um)

Para uma representação finita podemos obter por iteração $S = e^{\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu}$; $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$

Obs: A partir da expressão acima vemos que S não é uma transformação unitária (as matrizes γ^μ não são hermitianas).

O grupo de Lorentz não admite representações unitárias finitas.

A começar das transformações unitárias, podemos verificar que

$$\gamma^0 S^\dagger = S^{-1} \gamma^0$$

ou seja

$$S^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0$$

Álgebra das Matrizes de Dirac

Formando produtos de matrizes γ é possível construir 16 matrizes 4×4 linearmente independentes que aparecem

frequentemente na teoria de Dirac (Assim elas formam ⁽¹²⁾ uma base para o espaço das matrizes 4×4)

Essas matrizes são:

$$1, \gamma^\mu, \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma_5 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_5, \gamma_5 \gamma^\mu$$

Se $\psi \rightarrow S\psi$ então

$$\psi^+ \rightarrow \psi^+ S^+$$

Dado sua aplicação, geralmente se trabalha com $\bar{\psi}$ definida por:

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0$$

De acordo com as propriedades de transformação das grandezas $\bar{\psi} \Gamma^x \psi$ classificamos os Γ de acordo com

$$\Gamma^5 = 1 \quad \text{escalar}$$

$$\Gamma^\mu_\nu = \gamma^\mu \quad \text{vetor}$$

$$\Gamma^{\mu\nu}_T = \sigma^{\mu\nu} \quad \text{tensor} \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\Gamma^P = \gamma_5 \quad \text{pseudo escalar}$$

$$\Gamma^{\mu}_{PV} = i \gamma_5 \gamma^\mu \quad \text{pseudo vetor}$$

Outras equações de campo

Equação de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\partial_\rho F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\rho} + \partial_\nu F^{\rho\mu} = 0$$

As equações de Maxwell descrevem partículas de spin 1 e massa zero.

Para o caso de partículas livres:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Equação de Proca

A partir da definição do tensor do campo, antisimétrico

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu$$

temos a equação de Proca

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} + m^2 \phi^\nu = 0$$

Esta equação descreve partículas de spin 1 e massa diferente de zero

13

(PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO
variacional de Hamilton)

Muitas teorias físicas podem ser formuladas a partir de um princípio de mínima ação (ou para casos mais gerais, princípio da ação estacionária). As teorias físicas são geralmente descritas por um princípio de mínima ação.

Na mecânica clássica este princípio é muito útil para obtermos as equações de movimento de um sistema descrito por N coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_N .

De acordo com o princípio da mínima ação, isto nos permite evoluir dinamicamente entre os instantes de tempo t_1 e t_2 de tal forma que a ação S definida por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad \text{seja um extremo}$$

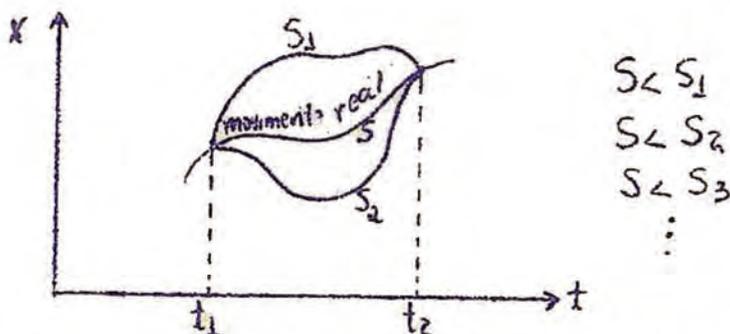
$$\text{com } L = L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$$

Expresso em outros termos este princípio estabelece que o sistema tem uma equação de movimento de tal forma que $\delta S = 0$

Aqui impomos a condição

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

114



Ou ainda, S é tal que ao longo da trajetória real da partícula a integral de linha S é estacionária

Aplicação à teoria de campos

Na teoria clássica dos campos um campo é qualquer função real das coordenadas do espaço-tempo x, t , definida em cada ponto t, x .

$$\phi(x) = \phi(t, x)$$

Assim um campo na teoria clássica é um sistema com um número infinito de graus de liberdade.

Observemos que a coordenada x (posição) não é uma coordenada generalizada, mas ela serve simplesmente como um índice para o índice discreto i . Vamos assumir a correspondência

$$i \leftrightarrow x \quad \phi \leftrightarrow q$$

$$q_i(t) = q(x, t) \leftrightarrow \phi(x, t)$$

Geralmente as equações da Física clássica são PDEs (equações diferenciais) com ordem máxima de $n=2$. (Equações

115

de 2ª ordem)

Assim, o problema das equações do campo se resume a encontrar uma Lagrangiana e usando o princípio de Hamilton encontrar as equações do campo. Tendo em vista o fato acima, L não deve conter termos $\partial\phi/\partial x^\alpha$ de ordem maior do que 1.

De um modo geral procuramos um funcional

$$L(\dot{\phi}, \phi)$$

a) Um funcional F e um operador que atua sobre funções, e como resultado dessa aplicação temos números pertencentes ao conjunto dos números complexos.

$$F(\psi) = C \quad C \in \text{conj. n.º complexos}$$

b) $F(\psi_1, \psi_2) \neq F(\psi_1(x), \psi_2(x))$

De acordo com o princípio de Hamilton

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\phi, \dot{\phi}) dt = 0$$

onde a variação ocorre sobre as funções

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) \quad \text{caso discreto}$$

Por extensão para um índice contínuo

$$\delta L = \int d^3x \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \delta \dot{\phi} + \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \longleftrightarrow \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)}$$

16

$$\delta \dot{\phi}(x) = \delta \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\delta \phi)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \frac{d}{dt} \delta \phi + \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi \right) = 0$$

$$\text{como } \delta \phi(t_1, \mathbf{x}) = \delta \phi(t_2, \mathbf{x}) = 0$$

integrando por partes

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(-\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} + \frac{\delta L}{\delta \phi} \right) \delta \phi = 0$$

o que implica

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} - \frac{\delta L}{\delta \phi} = 0}$$

$\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}}$ derivada funcional

A equação acima é a equação de Euler-Lagrange para os campos.

Como queremos descrever sistemas físicos locais (excluindo efeitos a longa distância).

Sistemas não locais são sistemas ^{tais} que, no funcional da ação S , ocorrem campos tomados em diferentes pontos do espaço-tempo. No caso não local sempre trabalharíamos com equações integrais diferenciais.

Assim, a localidade exige que os termos $\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}}$ e $\frac{\delta L}{\delta \phi}$ possam ser escritos sob a forma:

117

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} = A(\dot{\phi}(x), \phi(x), \nabla\phi, \nabla^2\phi(x), \dots)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} = B(\dot{\phi}(x), \phi(x), \nabla\phi, \nabla^2\phi(x), \dots)$$

Como estamos interessados em teorias relativísticas, devemos ter t e x em pé de igualdade. Esta restrição exige que os termos tenham no máximo um derivadas de primeira ordem para as coordenadas espaciais.

Observe-se que os termos de ordem mais alta não quebram a localidade (só se ocorrerem equações integrais).

Além das restrições anteriores, devemos notar que o formalismo hamiltoniano só aparece quando temos equações derivadas no máximo de segunda ordem.

As condições anteriores impõem que L deva ser escrito sob a forma:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \phi_{,\mu}(x)) \quad \phi_{,\mu}(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$$

Outra justificativa da escolha acima é que $\frac{\delta L}{\delta \phi}$ deve depender apenas do valor no próprio ponto, e fazendo analogia

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = A_i(q_i, \dot{q}_i) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = B_i(q_i, \dot{q}_i)$$

Na mecânica do ponto isto nos leva a conclusão de que L deve ser escrito sob a forma

118

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \sum L_i(q_i, \dot{q}_i)$$

Esta analogia nos leva a:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \phi_\mu(x))$$

$\mathcal{L} \rightarrow$ densidade lagrangiana

Isso nos assegura que não existe interação entre $\phi(x)$ e $\phi(x+a)$, mas que existe interação apenas entre vizinhos infinitesimalmente próximos. A ausência de interação de longo alcance nos levou então a

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \phi^\mu(x))$$

$$\delta S = 0$$

$$\int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \delta \phi_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi \right) = 0$$

Considerando-se que os limites de fronteira são nulos, cujo significado físico é a exigência de que se anularem os campos no infinito. Obteremos as equações de Euler-Lagrange para os campos a partir de

$$\int d^4x \left(-\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right) \delta \phi = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0}$$

Esta equação obedece a exigência de localidade por não ter nenhum termo de longo alcance (integrais).

FORMALISMO HAMILTONIANO

Por definição, o momento conjugado canônico a uma variável q_i é

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Analogamente podemos definir

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \quad \text{Momento canonicamente conjugado a } \phi$$

$$\pi(x) = \frac{\delta}{\delta \dot{\phi}(x)} \int \mathcal{L} d^3x = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \frac{\delta \dot{\phi}(x)}{\delta \dot{\phi}(x)} d^3x$$

$$\boxed{\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}} \quad \text{momento canonicamente conjugado ao campo}$$

Na mecânica clássica de muitas partículas

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

Assim introduzimos a Hamiltoniana

$$H = \int d^3x \pi(x) \dot{\phi}(x) - \int \mathcal{L} d^3x$$

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \quad \mathcal{H} - \text{densidade hamiltoniana}$$

$$\boxed{\mathcal{H} = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}}$$

120

As equações de movimento sob a forma Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q_i} \longleftrightarrow \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \end{array} \right. \quad \begin{aligned} \dot{\pi}(x) &= - \frac{\delta H}{\delta \phi(x)} \\ \dot{\phi}(x) &= + \frac{\delta H}{\delta \pi(x)} \end{aligned}$$

[2]

Parênteses de Poisson

Na maneira clássica define-se os parênteses de Poisson pela expressão:

$$[A, B]_P = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right)$$

Para o caso de campos definimos de maneira análoga

$$[A, B]_P = \int d^3x \left\{ \frac{\delta A}{\delta \phi(x)} \frac{\delta B}{\delta \pi(x)} - \frac{\delta A}{\delta \pi(x)} \frac{\delta B}{\delta \phi(x)} \right\}$$

As equações de movimento para uma grandeza física F são, nesse formalismo

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H]_P$$

Analogamente, para o caso de funcionais

$$\frac{d\phi}{dt} = [\phi(x), H]_P$$

$$\frac{d\pi}{dt} = [\pi(x), H]_P$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Observe-se que os colchetes de Poisson são simplesmente outra forma de escrever as equações de Hamilton

Calcularemos alguns colchetes de Poisson (a tempos iguais)

$$[\phi(x), \pi(y)]_P$$

$$\phi(x) = \int \phi(x') \delta(x' - x) d^3x'$$

$$\pi(y) = \int \pi(x'') \delta(y - x'') d^3x''$$

[22]

$$[\phi(x), \pi(y)]_P = \int d^3x' \left(\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(x')} \frac{\delta \pi(y)}{\delta \pi(x')} - \frac{\delta \phi(x)}{\delta \pi(x')} \frac{\delta \pi(y)}{\delta \phi(x')} \right)$$

$$\delta \phi(x) = \int \delta \phi(x') \delta(x-x')$$

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(x')} = \delta(x-x') \quad \frac{\delta \phi}{\delta \pi} = 0$$

$$\frac{\delta \pi(y)}{\delta \phi(x')} = 0 \quad \frac{\delta \pi(y)}{\delta \pi(x')} = \delta(y-x')$$

$$[\phi(x), \pi(y)]_P = \int \delta(x'-y) \delta(x'-x) d^3x'$$

$$\boxed{x_i [\phi(x), \pi(y)]_P = \delta(x-y)}$$

$$x_i [\phi(x), \pi(y)]_P = 0$$

$$x_i [\pi(x), \pi(y)]_P = 0$$

Observe a analogia $[q_i, p_j]_P = \delta_{ij}$

Nós quantizamos o campo clássico
por meio da substituição

$$[\quad]_P \rightarrow \frac{1}{i} [\quad]$$

Agora ϕ deve ser encarado como um
operador.

Assim na teoria de Heisenberg, a quantização fez das variáveis do campo operadores, que satisfazem as regras de comutação dadas.

Esta equivalência permite-nos reinterpretar as expressões para a lagrangeana, o tensor energia-momento, momento angular do campo como expressões de operadores.

123

Teorema de Noether

Este teorema procura estabelecer ligação entre propriedades de invariância e leis de conservação.

Teorema de Noether:

A invariância da integral de ação sob transformações de Lorentz contínuas

$$\int_{\Omega} d^4x \mathcal{L} = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}' = 0$$

conduz-nos ao aparecimento de certas leis de conservação para os campos associados com a Lagrangeana.

Começaremos escrevendo as transformações de Lorentz dos sistemas de coordenadas como

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}$$

onde δx^{μ} representa uma transformação infinitesimal.

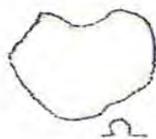
Semelhantemente a transformações para as funções do campo poderiam ser escritas como

$$\phi \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) + \delta \phi(x)$$

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\nu}, x) = \int_{\Omega'} \mathcal{L}(\phi', \phi'_{,\nu}, x') d^4x'$$

Vamos agora procurar uma maneira de caracterizar a mudança de volume da superfície.

Seja $f(x)$ tal que



$$f(x) = \begin{cases} < 0 & \text{para } x \text{ exterior a } \Omega \\ 0 & \text{para } x \text{ sobre a} \\ & \text{superfície de } \Omega \\ > 0 & \text{para } x \text{ interior a } \Omega \end{cases}$$

$$\partial(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

124

Assim podemos escrever

$$S = \int_{\text{todas as direções}} \Theta(f(x)) \mathcal{L}(\phi(x), \phi_{,\mu}(x)) d^4x$$

$$\int \Theta(f(x)) \mathcal{L}(\phi(x), \phi_{,\mu}(x), x) d^4x =$$

$$= \int \Theta(f(x')) \mathcal{L}(\phi'(x'), \phi'_{,\mu}(x'), x') d^4x'$$

$$\Theta(f(x)) = \Theta(f(x' - \delta x))$$

levando em conta que a variável de integração é muda

$$S = \int \Theta(f(x - \delta x)) \mathcal{L}(\phi'(x), \phi'_{,\mu}(x), x) d^4x$$

devemos ter $\delta S = 0$

$$\delta S = \frac{\partial \Theta}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \delta x^\mu = \Theta(f) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$$

$$\delta S = \int - \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \mathcal{L} d^4x + \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'^\mu} \delta \phi'^\mu \right) d^4x$$

$$\phi'(x) = \phi(x) + \delta \phi(x) \quad \text{observe-se que}$$

$$\delta \phi'^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta \phi$$

$$\text{Como } \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'^\mu} \delta \phi'^\mu \right) d^4x = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'^\mu} \right) \delta \phi + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'^\mu} d\sigma^\mu \delta \phi$$

devemos agora observar que o primeiro termo

$$- \int \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \mathcal{L} d^4x$$

é um termo de superfície onde o sinal menos aparece porque orientamos a nova superfície para fora

$$- \int \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \mathcal{L} d^4x = \int \mathcal{L} \delta x^\mu d\sigma^\mu$$

segundo que o campo satisfaz a equação de movimento

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'^\mu} \right) = 0 \quad \text{o termo anterior se reduz a}$$

125

$$\int_S \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) d\sigma^\mu = 0 \quad \text{usando o Teorema de Gauss}$$

$$\int_\Omega d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) = 0.$$

Logo concluímos que a propriedade de invariância de Lorentz sob transformações contínuas, temos uma quantidade conservada, ou seja

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) = 0} \quad \text{Teorema de Noether}$$

Dependendo da transformação temos uma quantidade conservada que é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu = \text{cte.} \quad (\text{constante de movimento})$$

Aplicação do Teorema de Noether

a) Conservação da energia e momento

Consideremos uma translação infinitesimal do sistema de coordenadas no espaço-tempo

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta a^\mu$$

Qualquer campo se transforma da mesma forma sob translação

$$\phi'(x') = \phi(x) = \phi(x' - \delta a^\mu)$$

$$\phi'(x') = \phi(x') - \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \delta a^\nu$$

$$\text{logo} \quad \delta \phi = - \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \delta a^\nu \quad \delta x^\mu = \delta a^\mu$$

126

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \delta a^\nu - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \delta a^\nu \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \right) \delta a^\nu = 0$$

Como δa^ν é uma quantidade arbitrária,
a quantidade conservada é

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \right) = 0 \quad \text{Lei de conservação local}$$

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu}}$$

Tensor de energia
momento

$T^{\mu\nu}$ é conservado uma vez que \mathcal{L} não depende (explicitamente) de x .

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_0} \frac{\partial \phi}{\partial x^0} - \mathcal{L} = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}$$

onde T^{00} é a densidade de energia

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0$$

integrando a equação acima sobre todo o espaço

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{0\mu} d^3x + \int \nabla \cdot \Pi_x d^3x = 0 \quad \Pi_y = (T^{10}, T^{20}, T^{30})$$

$$\int \nabla \cdot \Pi_y d^3x = \int_{\text{infinito}} \Pi_y \cdot dS = 0$$

uma vez que as
funções de campo e
suas derivadas se anulam
no infinito

26 A

Conduímos então que

$$\int \frac{\partial T^{0\nu}}{\partial t} d^3x = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int T^{0\nu} d^3x = 0$$

Assim, a quantidade P^ν definida por (de acordo com a definição P^ν é um vetor)

$$P^\nu = \int T^{0\nu} d^3x$$

$$P^\nu = (E, \mathbf{P})$$

Este é o quadri-vetor Energia-momento do sistema

Generalização

Podemos observar que uma translação generalizada é uma transformação de Lorentz a 4 parâmetros que nos conduz à conservação de quatro grandezas, que são os geradores das transformações respectivas.

Uma transformação de Lorentz própria é uma transformação a 6 parâmetros. Devemos assim ter seis grandezas conservadas, que são os geradores de transformações infinitesimais.

Outro exemplo, vem da Mecânica Quântica, onde a invariância sob rotação (3 parâmetros) nos leva à conservação do momento angular (gerador das transformações que no caso são as rotações)

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$$

$$\text{Seja } M^{ij} = x^i p^j - x^j p^i$$

$$L^k = \epsilon^{kij} M^{ij}$$

Queremos agora estudar rotações generalizadas no espaço quadridimensional.

Para isto, analisemos algumas grandezas.

Já vimos que $T^{0\alpha}$ é a densidade de momento do campo elétrico. Assim, uma definição natural da quantidade de momentum angular do campo em torno da origem é então dado pela expressão

$$m^{\alpha\gamma} = x^\alpha T^{0\gamma} - x^\gamma T^{0\alpha}$$

de modo que o momentum angular total é dado pela parte espacial do tensor

$$M^{\alpha\gamma} = \int m^{\alpha\gamma} d^3x$$

Para assegurar que a parte espacial de $M^{\alpha\gamma}$ (tensor de momentum angular) é conservado, devemos ter

$$\frac{\partial m^{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} = 0$$

$$\text{onde } m^{\beta\alpha\gamma} = x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\gamma T^{\beta\alpha}$$

obs $m^{\beta\alpha\gamma}$ é antisimétrico nos índices $\alpha\gamma$

Assim

$$\frac{\partial m^{\rho\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} T^{\rho\gamma} + x^\alpha \frac{\partial T^{\rho\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\beta} T^{\rho\alpha} - x^\gamma \frac{\partial T^{\rho\alpha}}{\partial x^\beta} = 0$$

sendo $\frac{\partial T^{\rho\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0$ e $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta$

deveremos ter $T^{\alpha\gamma} - T^{\gamma\alpha} = 0$

Assim concluímos que $M^{\alpha\gamma}$ será um tensor conservado, se $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, ou seja, se o tensor de energia-momentum for simétrico. Em geral, esta não é uma consequência da teoria. Para que tenhamos uma lei de conservação devemos adicionar a $m^{\rho\alpha\gamma}$ mais um termo para que ele seja conservado.

(É sempre possível simetrizar o tensor de energia-momentum)

Para que tenhamos uma quantidade conservada devemos adicionar o termo

$$S^{\rho\alpha\gamma} \rightarrow m^{\rho\alpha\gamma} = x^\alpha T^{\rho\gamma} - x^\gamma T^{\rho\alpha} + S^{\rho\alpha\gamma}$$

O termo $S^{\rho\alpha\gamma}$ aparece mais naturalmente quando levamos em conta que $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$ (vários índices). Assim no teorema de Noether haveria um termo em $\delta\phi^i$ (correspondendo à rotação dos índices)

Assim teríamos

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = (\Lambda x)_\mu = (\delta_\mu^\nu + \epsilon \lambda_{\mu\nu}) x_\nu$$

$$\lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu}$$

Sob esta transformação, ϕ_r se transforma de acordo com

$$\phi_r \rightarrow \phi'_r(x') = \sum_{s=1}^r B_r^s(\Lambda) \phi_s(x)$$

$$\approx \sum_{s=1}^r \left(\delta_r^s + \frac{\epsilon}{2} b_r^{s\mu\nu} \lambda_{\mu\nu} \right) \phi_s(x)$$

com $b_r^{s\mu\nu} = -b_r^{s\nu\mu}$ (antisimétrico em μ e ν)

A covariância de Lorentz da Lagrangeana assegura que

$$L'(\phi'_r(x'), \phi'_{r,\mu}(x')) = L(\phi_r(x), \phi_{r,\mu}(x)) = L((\bar{B}'\phi')_r, (\bar{B}'\phi')_{r,\mu}(x'))$$

isto é: L e L' têm o mesmo valor numérico em cada ponto que sejam os mesmos fisicamente

Podemos verificar que as variações induzidas por uma transformação de Lorentz homogênea infinitesimal, implicam que o ten-

$$\text{sor } \eta^{\beta\alpha\gamma} = \sum_{r,s=1}^n b_r^{s\alpha\gamma} \phi_s \frac{\partial L}{\partial \phi_{r,s}} + x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\gamma T^{\beta\alpha}$$

é conservado e satisfaz a equação

$$\frac{\partial \eta^{\beta\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} = 0 \quad \text{logo } S^{\beta\alpha\gamma} = \sum_{r,s=1}^n b_r^{s\alpha\gamma} \phi_s \frac{\partial L}{\partial \phi_{r,s}}$$

30

Belinfante mostrou como redefinir o tensor de energia canônico ($T^{\mu\nu}$) de tal maneira que o novo tensor $T_s^{\mu\nu}$ seja sempre simétrico e tal que

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial T_s^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0$$

Além disso, o tensor de momento angular definido de $T_s^{\mu\nu}$ pela equação

$$m_s^{\rho\alpha\gamma} = x^\alpha T_s^{\rho\gamma} - x^\gamma T_s^{\rho\alpha}, \text{ tem a proprie-}$$

dade de

$$\frac{\partial m_s^{\rho\alpha\gamma}}{\partial x^\rho} = 0 = \frac{\partial m^{\rho\alpha\gamma}}{\partial x^\rho} = 0$$

Segue que o tensor $m_s^{\rho\alpha\gamma}$ tem as mesmas consequências físicas que $m^{\rho\alpha\gamma}$, ou seja: ele dá as mesmas constantes de movimento. Em particular, se o campo é escalar, então $b_r^{spv} = 0$ e o tensor canônico já é simétrico.

É sempre possível simetrizar o tensor de energia-momento fazendo uso do fato de que sempre podemos adicionar uma quadrivergência à lagrangeana sem alterar o conteúdo físico da teoria. Assim, apesar da densidade de energia não ser determinada univocamente, a energia total do sistema é bem definida e única.

31

Tensor simétrico de Energia-Momentum

$$T_s^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} f^{\beta\mu\nu}$$

onde f é tal que $f^{\beta\mu\nu} = -f^{\beta\nu\mu}$
(antisimétrico nos índices μ e ν)

$$\frac{\partial T_s^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} f^{\beta\mu\nu}$$

O primeiro termo é nulo e o segundo anula-se pela antisimetria dos índices.

Concluímos então que o tensor simétrico também será conservado e assim

$$\int T_s^{0\nu} d^3x = \int T^{0\nu} d^3x \text{ é conservado.}$$

Em termos do tensor simétrico, definiremos $\eta^{\beta\alpha\gamma}$

$$\eta^{\beta\alpha\gamma} = x^\alpha T_s^{\beta\gamma} - x^\gamma T_s^{\beta\alpha}$$

Esse novo tensor já leva em conta a distribuição de densidade de momentum angular de spin (obs. o spin não dá contribuição para a energia mecânica) A densidade de momentum angular de spin é levada em conta por meio do termo

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} f^{\beta\mu\nu}$$

A partir de $\frac{\partial m^{\alpha\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0$ obtemos 32

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int m^{\alpha\gamma} d^3x \right\} = 0$$

ou ainda: podemos definir as seis quantidades independentes do tempo (tensor)

$$M^{\alpha\gamma} = \int m^{\alpha\gamma} d^3x$$

Estas quantidades formam as componentes de um tensor antisimétrico cujas componentes especiais correspondem às componentes do momento angular do sistema

$$M^{ij} = \int m^{0ij} d^3x = \int \{ x^i T^{0j} - x^j T^{0i} \} d^3x$$

Logo, três das seis componentes da grandeza conservada são as componentes do momento angular do sistema

O que representam as outras três componentes

Consideremos agora as componentes tempo-
pais $\alpha=0$ e $\gamma=0, 1, 2, 3$

$$\int m^{00j} d^3x = \int x^0 T^{0j} d^3x - \int x^j T^{00} d^3x$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int m^{00j} d^3x &= \int T^{0j} d^3x + \int x^0 \frac{\partial}{\partial x^0} T^{0j} d^3x - \\ &- \int \frac{\partial x^j}{\partial t} T^{00} d^3x - \int x^j \frac{\partial T^{00}}{\partial t} d^3x = 0 \end{aligned}$$

33

$$\frac{d}{dt} \int \eta^{00j} d^3x = \int T^{0j} d^3x - \frac{d}{dt} \int x^j T^{00} d^3x = 0$$

$$\int T^{0j} d^3x = \frac{d}{dt} \int x^j T^{00} \quad \text{dividido por}$$

$$E = \int T^{00} d^3x$$

$$\frac{\int T^{0j} d^3x}{\int T^{00} d^3x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\int x^j T^{00}}{\int T^{00}} \right)$$

$$\frac{P_j}{E} = \frac{d}{dt} x_j \text{ (c.m.)}$$

$x_j \text{ (c.m.)}$ projeção j do
centro de energia ou
centro de massa

$$\boxed{v_j = \frac{d}{dt} x_j}$$

Assim a conclusão a que chegamos a partir da invariância da integral da ação sob transformação de Lorentz é que o centro de massa movimenta com velocidade constante, para um sistema fechado.

CAMPOS ESCALARES

B4

A partir das propriedades de invariância da integral da ação concluímos que \mathcal{L}_0 deve ser invariante sob transformações de Lorentz (\mathcal{L}_0 deve ser escalar).

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\phi; \phi_{,\mu}) \quad \phi_{,\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$$

Para campos escalares a Lagrangeana mais simples que podemos formar é:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\mu} - m^2 \phi^2)$$

Outros termos como $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 + a\phi$ podem ser reduzidos à forma anterior por meio da substituição $\phi \Rightarrow \phi' + \epsilon$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\mu} - m^2 \phi^2) = \frac{1}{2} (\phi'^2 - (\nabla \phi')^2 - m^2 \phi'^2)$$

A equação de movimento para o campo ϕ obtida de

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi_{,\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\phi_{,\mu}) + m^2 \phi = 0 = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right) + m^2 \phi$$

$$(\square + m^2) \phi = 0$$

Obteremos agora o tensor de energia-momento construído a partir dessa Lagrangeana.

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi_{,\mu}} \phi_{,\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_0$$

Logo

$$T^{\mu\nu} = \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

[35]

Observe-se que neste caso o tensor canônico já é automaticamente simétrico, o que permite concluir que o campo escalar descreve partículas de spin zero.

Energia total e Momento total

$$E = \int T^{00} d^3x \quad T^{00} = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\phi'^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2)$$

$$E = \frac{1}{2} \int (\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) d^3x \quad \text{note-se que } E > 0 \text{ pois}$$

$$T^{00} > 0 \quad E = H \quad \text{Energia total}$$

Momento

$$P_i = \int T^{0i} d^3x \quad T^{0i} = -\dot{\phi} \phi_{,i} = -\dot{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

$$\vec{P} = -\int \dot{\phi} \vec{\nabla} \phi d^3x \quad \text{com } -\dot{\phi} \vec{\nabla} \phi = \text{densidade de momento linear.}$$

Quantização do Campo Escalar

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

$$\Pi(x) = \dot{\phi}$$

$\Pi(x)$ é o momento canonicamente conjugado ao campo. Não deve ser confundido com um momento linear.

O processo de quantizar o campo será impor³⁶ que Π e ϕ sejam tratados como campos de operadores satisfazendo, para tempos iguais as regras de comutação.

$$[\phi(x,0), \Pi(y,0)] = i\delta(x-y)$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\Pi(x), \Pi(y)] = 0 \quad (t=0)$$

Observe a analogia dessas relações de comutação com as relações $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$. Ainda mais, as regras de comutação são usadas para dar as condições iniciais.

O programa da Teoria de Campos é obter autofunções e autovalores de H , bem como os autovalores de operadores que comutam com H .

Para o caso de campo livre é possível resolver o problema satisfatoriamente.

Voltando ao campo escalar:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x,t) = - (m^2 - \nabla^2) \phi(x,t)$$

O guia sobre como efetuar a quantização do campo livre é obter a transformada de Fourier (coordenadas espaciais) de $\phi(x,t)$.

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{\phi}(k,t) e^{i k \cdot x} d^3k$$

substituindo na eq. acima vem.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\phi}(k,t) = - (m^2 + k^2) \tilde{\phi}(k,t) \leftarrow \text{Equação do oscilador harmônico com frequência angular}$$

Assim as equações de campo quando escritas em termos das transformadas de Fourier dos $\phi(x,t)$ são equações de osciladores harmônicos desacoplados.

Quantizando esses osciladores teremos uma teoria quântica dos campos. A quantização dos osciladores nos leva à quantização do próprio campo.

As transformadas de Fourier dos campos desempenham um papel de maior importância que os próprios campos. Em termos das novas variáveis as expressões serão muito mais simples.

A quantização do oscilador harmônico nos leva ao conhecimento dos autovalores e autofunções de H e de outras grandezas de interesse.

Primeiramente quantizaremos o campo dentro de uma caixa de volume V (condições periódicas). As quantidades obtidas terão carácter discreto. A vantagem é que nesse caso ficam mais fáceis as interpretações. Num estágio posterior, por meio de um processo de limite faremos a caixa infinita. Dessa forma, ao invés de uma transformada de Fourier teremos inicialmente um série de Fourier.

$$\phi(x,0) = \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{V}}$$

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(m, n, p) \quad V = L^3$$

$$\pi(y,0) = \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}}{\sqrt{V}}$$

das relações de comutação
nem

$$[\phi(x,0), \phi(y,0)] = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} [q_{\mathbf{k}}, q_{\mathbf{k}'}] = 0 \Rightarrow [q_{\mathbf{k}}, q_{\mathbf{k}'}] = 0, \forall \mathbf{k}, \mathbf{k}'$$

$$[\pi(x,0), \pi(y,0)] = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} [p_{\mathbf{k}}, p_{\mathbf{k}'}] = 0 \Rightarrow [p_{\mathbf{k}}, p_{\mathbf{k}'}] = 0, \forall \mathbf{k}, \mathbf{k}'$$

Finalmente, consideremos a relação de comutação ^{BE}

$$[\phi(x,0), \Pi(y,0)] = i \delta^3(x-y)$$

$$[\phi(x,0), \Pi(y,0)] = \sum_k \sum_{k'} \frac{e^{ikx} e^{ik'y}}{V} [q_k, p_{k'}] = i \delta^3(x-y)$$

Usando a propriedade de completude do conjunto e^{ikx} podemos escrever.

$$\sum_k \frac{e^{ik(x-y)}}{V} = \delta^3(x-y) \quad \text{e portanto devemos ter}$$

$$\frac{1}{V} \sum_k \sum_{k'} e^{ikx} e^{ik'y} [q_k, p_{k'}] = \frac{i}{V} \sum_k e^{ikx} e^{-iky} \quad \text{o que}$$

será satisfeito se

$$[q_k, p_{k'}] = i \delta_{k,-k'}$$

Notemos agora que ^{estas} relações de comutação são as relações de comutação de um conjunto de coordenadas generalizadas q_k, p_k (número infinito).

A condição de campo real, transforma-se na condição de que os operadores do campo quantizado devem ser hermiteanos.

$$\phi^\dagger = \phi \quad \Rightarrow \quad q_k^\dagger = q_{-k}$$

$$\Pi^\dagger = \Pi \quad \Rightarrow \quad p_k^\dagger = p_{-k}$$

Vamos agora escrever H em termos das $p_k = \dot{q}_k$, lembrando sempre que estes são operadores.

$$H = \frac{1}{2} \int (\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2) d^3x$$

$$\frac{1}{2} \int \dot{\phi}^2 d^3x = \frac{1}{2} \int \Pi^2 d^3x = \frac{1}{2} \int d^3x \sum_k \sum_{k'} \frac{e^{ikx} e^{ik'x}}{V} p_k p_{k'}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \dot{\phi}^2 d^3x &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{1}{V} \int d^3x e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')x} p_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}'} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} p_{(-\mathbf{k})} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}^+ \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int m^2 \phi^2 d^3x = \frac{m^2}{2} \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}^+$$

$$\frac{1}{2} \int (\nabla \phi)^2 d^3x = \frac{1}{2} \int d^3x \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} (i\mathbf{k})(i\mathbf{k}') \frac{e^{i\mathbf{k}x} e^{i\mathbf{k}'x}}{V} q_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}'} = \frac{k^2}{2} \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}^+$$

Finalmente podemos escrever para H

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (p_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}^+ + (k^2 + m^2) q_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}^+)$$

Do resultado acima concluímos que o campo consiste de uma coleção de osciladores harmônicos desacoplados, quantizados pelas regras de comutação dadas.

Analogamente encontramos para o momento total

$$\vec{P} = i \sum_{\mathbf{k}} \vec{k} p_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}^+$$

Geralmente é mais útil trabalhar numa outra representação introduzindo os operadores a e a^+ . Todos os estados do oscilador harmônico podem ser caracterizados em termos de a e a^+ .

Introduzimos os operadores a_k e a_k^\dagger através das relações

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{w_k} q_k + i \frac{p_k}{\sqrt{w_k}} \right)$$

$$\text{onde } w_k = \sqrt{k^2 + m^2}$$

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{w_k} q_k^\dagger - i \frac{p_k^\dagger}{\sqrt{w_k}} \right)$$

donde

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{2w_k}} (a_{-k}^\dagger + a_k)$$

$$p_k = -i \sqrt{\frac{w_k}{2}} (a_k - a_{-k}^\dagger)$$

a partir da definição é fácil mostrar que esses operadores satisfazem às relações de comutação:

$$[a_k, a_{k'}] = 0 = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger]$$

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$$

Podemos escrever a Hamiltoniana em termos de a_k e a_k^\dagger :

$$H = \frac{1}{2} \sum (p_k p_k^\dagger + w_k^2 q_k q_k^\dagger)$$

$$p_k^\dagger = \sqrt{\frac{w_k}{2}} (a_k^\dagger - a_{-k})$$

$$q_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2w_k}} (a_k^\dagger + a_{-k})$$

levando em conta as relações de comutação, encontra-se

$$H = \sum w_k (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2})$$

Para \vec{P} encontrarei

$$\vec{P} = \sum_k \vec{k} a_k^\dagger a_k$$

Considerando-se as relações de comutação vemos que podemos nos concentrar no estado de um k particular. Consideremos um a_k particular ($a_k = a$).

$$[a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

$$[a, a^\dagger] = 1.$$

A partir das relações de comutação podemos chegar a uma série de conclusões.

Consideremos o operador $a^\dagger a$

$$(a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger a \quad \text{logo } a^\dagger a \text{ é hermiteano.}$$

$$\langle a^\dagger a \rangle = (\psi, a^\dagger a \psi) = (a\psi, a\psi) \geq 0,$$

logo $a^\dagger a$ é hermiteano e positivo definido ($\langle a^\dagger a \rangle \geq 0$).

Admitamos agora $a^\dagger a$ ter um conjunto completo de auto-vetores e auto-valores

$$a^\dagger a \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda, \quad \psi_\lambda \text{ auto-vetor de } a^\dagger a \text{ com auto-valor } \lambda$$

$$\text{Seja } a^\dagger \psi_\lambda = \psi_\lambda$$

$$a^\dagger a \psi_\lambda = a^\dagger a a^\dagger \psi_\lambda = a^\dagger (a^\dagger a + 1) \psi_\lambda$$

$$a^\dagger a \psi_\lambda = a^\dagger (\lambda + 1) \psi_\lambda = (\lambda + 1) \psi_\lambda$$

Concluimos, então, que como resultado da aplicação de $a^\dagger a$ ψ_λ , o auto-valor de ψ_λ é acrescido de uma unidade.

Normalização

$$(a^+ \psi_\lambda, a^+ \psi_\lambda) = (\psi_\lambda, a a^+ \psi_\lambda) = (\psi_\lambda, (a^+ a + 1) \psi_\lambda) = \lambda + 1$$

Concluimos, assim, que

$$\frac{a^+ \psi_\lambda}{\sqrt{\lambda+1}} = \psi_{\lambda+1}$$

É fácil ver que $a \psi_\lambda \rightarrow \psi_{\lambda-1}$

a abaixa os autovalores de uma unidade (auto-valores do operador $a^+ a$)

$$(a \psi_\lambda, a \psi_\lambda) = (\psi_\lambda, a^+ a \psi_\lambda) = \lambda$$

$$\frac{a \psi_\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \psi_{\lambda-1}$$

$a^+ \psi_\lambda = \sqrt{\lambda+1} \psi_{\lambda+1}$
$a \psi_\lambda = \sqrt{\lambda} \psi_{\lambda-1}$

Em princípio, eu poderia por meio de sucessivas aplicações do operador abaixamento, fazer com que os auto-valores λ chegassem a ser negativos, o que estaria em desacordo com o caráter positivo definido de $a^+ a$. A forma através da qual poderíamos contornar isto, é através de sucessivas aplicações de a atingirmos o estado descrito por ψ_0 tal que

$$\|a \psi_0\| = 0 \Rightarrow a \psi_0 = 0$$

Logo λ deve ser números inteiros $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$

A partir de ψ_0 posso obter qualquer ψ_m por aplicações sucessivas de a^\dagger .

$$\psi_1 = \frac{a^\dagger \psi_0}{\sqrt{1}}$$

$$\psi_2 = \frac{(a^\dagger)^2 \psi_0}{\sqrt{2!}}$$

$$\boxed{\psi_m = \frac{(a^\dagger)^m \psi_0}{\sqrt{m!}}}$$

Estudemos a_i^\dagger e a_i . Queremos auto-estados simultâneos de a_i^\dagger, a_i . Consideremos $\psi(0, 0, 0, \dots, 0)$ tal que

$$a_i \psi(0, 0, \dots, 0) = 0$$

$$\psi(m_1, m_2, \dots, m_m) = \frac{(a_1^\dagger)^{m_1}}{\sqrt{m_1!}} \frac{(a_2^\dagger)^{m_2}}{\sqrt{m_2!}} \dots \frac{(a_m^\dagger)^{m_m}}{\sqrt{m_m!}} \psi(0, 0, \dots)$$

$\psi(m_1, m_2, \dots, m_m)$ é autoestado simultâneo de a_i^\dagger, a_i de $\text{todo } i$.

$$a_i^\dagger a_i \psi(m_1, m_2, \dots, m_m) = m_i \psi(m_1, m_2, \dots, m_m)$$

Denominaremos os operadores a_i^\dagger, a_i de n.º de ocupação.

$$N_i = a_i^\dagger a_i$$

n.º de ocupação é o número de partículas com um dado momento num dado estado.

Para o caso de um finito, pode-se mostrar que existe $\psi(0, 0, \dots, 0) = |0\rangle$. Assim podemos construir os estados $\psi(m_1, m_2, \dots, m_m)$.

Para o caso de $m \rightarrow \infty$ (nº infinito de osciladores), postularemos que existe este estado, denominado vácuo.

$|0\rangle$, estado de vácuo.

Existe $|0\rangle$ tal que $N_i|0\rangle = 0$. A existência do estado de vácuo não é uma consequência da teoria (é postulado).

Geralmente não nos preocupamos com a existência das soluções com $m \rightarrow \infty$, isto porque, a partir das relações de comutação

$$[q_i, p_j] = i \hbar \delta_{ij} \quad i, j \text{ finito},$$

se $i, j < \infty$, a representação dos operadores é única e qualquer outra lhe seria equivalente, ou seja diferente de outra por uma transformação de equivalência.

Para $i, j \rightarrow \infty$, existe um número infinito de representações (não equivalentes). No entanto, dentre essas representações escolhemos aquela na qual podemos definir o vácuo $|0\rangle$. Observamos que existem outras representações nas quais não existe o vácuo.

$$a_i|0\rangle = 0, \quad i = 1, \dots$$

A partir do estado de vácuo, podemos construir

$$|n_1, n_2, \dots, n_j, \dots\rangle = \frac{(a_1^+)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(a_2^+)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \dots |0\rangle.$$

Geralmente aplicamos um número finito de operadores. Isto é justificado pelo fato de que estados obtidos por meio da aplicação de número infinito de operadores, (que corresponde a ter um número infinito de osciladores excitados) não

têm importância física.

O espaço de Hilbert sobre o qual os operadores atuam será expandido pelos auto-vetores de operadores mútuos de comutação. Estes auto-vetores se constituirão numa base ortonormal.

$$N_i |n_1, n_2, \dots\rangle = n_i |n_1, n_2, \dots\rangle$$

\swarrow autovalor \searrow autovetor

$|n_1, n_2, \dots\rangle$ - base ortonormal

Por isso diremos que o espaço de Hilbert será gerado pelos vetores da base $|n_1, n_2, \dots\rangle$.

Qualquer vetor do espaço de Hilbert pode ser escrito como uma combinação linear dos auto-vetores $|n_1, n_2, \dots\rangle$.

$$|\psi\rangle = \sum a_{n_1, \dots, n_i, \dots} |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle$$

Estes estados são auto-estados de $a_i^\dagger a_i$, logo são auto-estados de H , pois

$$H = \sum_K \omega_K (M_K + 1/2)$$

$$H |n_1, \dots\rangle = \sum \omega_k (n_k + \frac{1}{2}) |n_1, \dots\rangle$$

$$\sum_k \omega_k (n_k + \frac{1}{2}) = \infty$$

Considerando-se que temos uma soma com infinito termos. Esta é a primeira divergência na teoria, no entanto esta divergência pode ser removida lembrando que a energia de ponto zero é um termo que contribuirá para esta divergência. Como podemos tomar como nível de energia zero qualquer um, nós tomaremos o estado de energia mais baixo como o zero da energia. Assim, passaremos a redefinir H por meio de

$$H \rightarrow H - \frac{1}{2} \sum_k \omega_k \quad (\text{subtraímos uma parte infinita})$$

logo

$$H |0\rangle = 0$$

$$H |n_1, n_2, \dots\rangle = \underbrace{\sum \omega_k n_k}_E |n_1, n_2, \dots\rangle$$

$$E < \infty \quad \text{pois} \quad \sum n_i < \infty$$

$$\hat{P} |n_1, n_2, \dots\rangle = \sum_k \hbar k n_k |n_1, n_2, \dots\rangle$$

47

$$\omega_k = \sqrt{\hbar k^2 + m^2}$$

$$E_k = n_k \omega_k$$

$$\hat{P}_k = n_k \hbar k$$

$E = \sum_k n_k \omega_k$
$\hat{P} = \sum_k n_k \hbar k$

Para um dado k , devemos ter

$$E = 0, \sqrt{\hbar^2 k^2 + m^2}, 2\sqrt{\hbar^2 k^2 + m^2}, 3\sqrt{\hbar^2 k^2 + m^2}, \dots$$

$$P = 0, \hbar k, 2\hbar k, 3\hbar k, \dots$$

A interpretação é a de que no primeiro caso temos 0 partículas com energia $\sqrt{\hbar^2 k^2 + m^2}$. No segundo caso, temos uma partícula com energia $\sqrt{\hbar^2 k^2 + m^2}$, e assim por diante.

Esses estados descrevem partículas com energia e momento arbitrários.

A partir das considerações anteriores, podemos entender mais plenamente a representação número de ocupação, que é esquematizada da seguinte maneira:

$$|n_{k_1}, n_{k_2}, n_{k_3}\rangle$$

Estado com energia total e momento dados por

$$E = n_{k_1} \sqrt{\hbar^2 k_1^2 + m^2} + n_{k_2} \sqrt{\hbar^2 k_2^2 + m^2} + n_{k_3} \sqrt{\hbar^2 k_3^2 + m^2}$$

$$\hat{P} = n_{k_1} \hbar k_1 + n_{k_2} \hbar k_2 + n_{k_3} \hbar k_3$$

A partir dos resultados anteriores vemos que, em um estado especificado do sistema, a energia do campo pode

ser interpretada como constituída através da adição 48
de partículas individuais, com momento \mathbf{k} e massa
de repouso m . Cada partícula contribui com um quantum
de energia $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Os coeficientes $n_{\mathbf{k}}$ dão o número de tais
partículas presentes em cada modo \mathbf{k} .

Esta interpretação da quantização do campo é suplementada
pela observação de que cada quantum do modo \mathbf{k} contribui para o
momento por meio de uma contribuição de \mathbf{k} para o momento do campo
total.

Das considerações anteriores surge a natureza corpuscular dos
campos. Observemos ainda que essa natureza corpuscular é uma con-
sequência do fato de $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ e $a_{\mathbf{k}}$ terem como autovalores números
inteiros. A quantização leva-nos assim à interpretação corpuscular

Para $t=0$, podemos escrever para ϕ

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{a_{\mathbf{k}} + a_{(-\mathbf{k})}^{\dagger}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}$$

Vamos abandonar agora a quantização numa caixa e gene-
ralizar para todo o espaço. Assim a expansão em série de Fourier
será convertida numa \int de Fourier, por meio da substituição

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sum \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k}$$

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{a(\mathbf{k}) + a^{\dagger}(-\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}$$

onde $a(\mathbf{k})$ e $a^{\dagger}(\mathbf{k})$ satisfazem as regras de comutação

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = 0 = [a^{\dagger}(\mathbf{k}), a^{\dagger}(\mathbf{k}')]$$

$$[a(k), a^\dagger(k')] = \delta^3(k - k')$$

49

$$H = \int \omega(k) a^\dagger(k) a(k) d^3k$$

obs. $a(k) = \sqrt{V} a_{1k}$

$$P = \int k a^\dagger(k) a(k) d^3k$$

Para o caso discreto, $n_k = a_k^\dagger a_k$ é o número de partículas (nº de ocupação). Para o caso contínuo, $a^\dagger(k) a(k)$ é a densidade de partículas com momento k .

Evolução Temporal

Até aqui temos trabalhado na representação de Heisenberg, na qual o estado independe do tempo. Para passarmos para a representação de Schrödinger, aplicamos os conhecimentos sobre essas representações.

$$\psi_S(x, t) = e^{iHt} \phi(x, 0) e^{-iHt}$$

$$\phi_S(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{2\omega_k}} (a(k, t) + a^\dagger(k, t))$$

onde $a(k, t)$ e $a^\dagger(k, t)$ são os operadores de aniquilação e criação evoluídos temporalmente, ou seja

$$a(k, t) = e^{iHt} a(k) e^{-iHt}$$

$$a^\dagger(k, t) = e^{iHt} a^\dagger(k) e^{-iHt}$$

Na representação de Heisenberg, a evolução temporal dos operadores obedece à equação

$$\dot{a}(k,t) = \frac{1}{i} [a(k,t), H]$$

50

$$\dot{H} = \frac{1}{i} [H, H] = 0 \quad \text{logo} \quad H = \text{cte} = H_0$$

$$H = H_0 = \int \omega(k) a^\dagger(k) a(k) d^3k = \int \omega(k) a^\dagger(k,t) a(k,t) d^3k$$

$$\dot{a}(k,t) = \frac{1}{i} [a(k,t), \int d^3k' a^\dagger(k',t) a(k',t)]$$

Como

$$[a(k,t), a^\dagger(k',t)] = \delta(k-k')$$

$$\dot{a}(k,t) = \frac{1}{i} \int d^3k' \omega(k') \delta(k-k') a(k',t)$$

$$\dot{a}(k,t) = \frac{\omega_k}{i} a(k,t)$$

Logo

$$a(k,t) = e^{-i\omega_k t} a(k)$$

Tomando o hermit. conj. desta equação, obteremos

$$a^\dagger(k,t) = e^{i\omega_k t} a^\dagger(k)$$

Observe-se que êsses operadores a e a^\dagger têm uma evolução temporal muito simples.

Processos de comutação a tempos diferentes

54

Como já vimos em parágrafos anteriores,

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(a(\vec{k},t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^\dagger(\vec{k},t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}$$

$$\text{com } a(\vec{k},t) = a(\vec{k}) e^{-i\omega_k t}$$

$$a^\dagger(\vec{k},t) = a^\dagger(\vec{k}) e^{i\omega_k t}$$

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left\{ a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_k t)} + a^\dagger(\vec{k}) e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right\} d^3k$$

Podemos escrever a expressão acima usando notação relativística

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{a(\vec{k})}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(k_\mu x^\mu)} + \frac{a^\dagger(\vec{k})}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i k_\mu x^\mu} \right) d^3k$$

$$\text{com } k^\mu = (\omega_k, \vec{k}) \quad ; \quad x^\mu = (t, \vec{x})$$

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k d^3k'}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} \left[[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] e^{-i(kx - k'y)} + \right. \\ &\quad \left. + [a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{i(kx - k'y)} \right] \end{aligned}$$

Lembrando que:

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad \text{obtemos para o termo acima}$$

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left[e^{-i\omega_k(x-y)} - e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\sqrt{k^2+m^2}} \left(e^{-i\omega_k(x-y)} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} - e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} e^{-i\omega_k(x-y)} \right) \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left(e^{-i\omega_k(x-y)} - e^{i\omega_k(x-y)} \right) \end{aligned}$$

52

logo

$$[\phi(x), \phi(y)] = - \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\sin \omega_k (x_0 - y_0)}{\omega_k} e^{ik(x-y)}$$

Esta expressão pode ser integrada diretamente dando como resultado

$$[\phi(x), \phi(y)] = -i \left[\frac{1}{2\pi} \epsilon(x) \delta(x^u x_u) + \frac{m}{4\pi} \frac{\theta(x^u x_u)}{\sqrt{x^u x_u}} \epsilon(x) J_1(m\sqrt{x^u x_u}) \right]$$

No entanto, sem usarmos esse resultado, podemos obter muitos resultados que são consequências diretas da expressão anterior.

a) o comutador para separações arbitrárias (tempos diferentes), é um número c (escalas)

b) Derivando o comutador em relação ao tempo y_0 .

$$\frac{\partial}{\partial y_0} [\phi(x), \phi(y)] = [\phi(x), \dot{\phi}(y)] = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ik(x-y)} = i\delta(x-y)$$

onde a segunda parte consideraremos a tempos iguais ($x_0 = y_0$) donde temos uma consistência, uma vez que já esperávamos esse resultado considerando que

$$[\phi(x), \dot{\phi}(y)] = [\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x-y)$$

c) De agora em diante usaremos a notação

$$[\phi(x), \phi(y)] = -i\Delta(x-y) = -i\Delta(x-y, m^2)$$

A partir da definição, podemos escrever, usando $z = x - y$

$$\Delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ikz} \sin(\sqrt{k^2 + m^2} z_0)$$

faremos uma transformação de Lorentz sobre essa função e veremos que ela é invariante sob transformações de Lorentz. Para isso escreveremos essa equação em quatro dimensões.

$$\Delta(\vec{z}) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) e^{-ikz} \mathcal{E}(k_0)$$

$$\mathcal{E}(k_0) = \begin{cases} 1 & k_0 > 0 \\ -1 & k_0 < 0 \end{cases}$$

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta(k_0^2 - (\vec{k}^2 + m^2)) = \delta\{(k_0 - \omega_k)(k_0 + \omega_k)\}$$

Para $k_0 \cong \omega_k$ e usando $\delta(xa) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$

$$\delta(k_0 - \omega_k) 2\omega_k \cong \frac{1}{2\omega_k} \delta(k_0 - \omega_k) \quad (\text{nas vizinhanças de } \omega_k)$$

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2\omega_k} [\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)]$$

$$\mathcal{E}(k_0) \delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2\omega_k} [\delta(k_0 - \omega_k) - \delta(k_0 + \omega_k)]$$

logo

$$\Delta(\vec{z}) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k} e^{i\vec{k}\vec{z}} \int dk_0 e^{-ik_0 z_0} [\delta(k_0 - \omega_k) - \delta(k_0 + \omega_k)]$$

$$\Delta(\vec{z}) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k} \left[e^{-i\omega_k z_0} - e^{i\omega_k z_0} \right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega_k} e^{i\vec{k}\vec{z}} \sin \omega_k z_0$$

logo podemos escrever:

$$\Delta(\vec{z}) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \mathcal{E}(k_0) e^{-ikz}$$

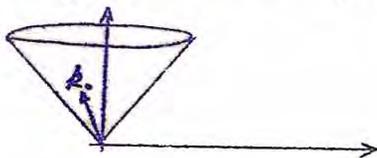
54

Podemos assegurar que essa função é invariante sob transformações de Lorentz próprias, uma vez que

$\delta(k^2 - m^2)$ é invariante relativístico

e^{-ikz} " " "

$\mathcal{E}(k_0)$ é invariante relativístico, desde que esteja no cone de luz (conservação de prop. time-like ou space-like)



$k^2 = m^2$ $k^2 > 0$ donde k^0 pertence ao cone de luz, consequentemente $\mathcal{E}(k_0)$ é invariante relativístico

Seja Λz uma transformação de Lorentz própria.

Podemos escrever então:

$$\Delta(z) = \Delta(\Lambda z)$$

Assim espero poder escrever $\Delta(z)$ sob a seguinte forma

$$\Delta(z) = f(z^2) + g(z^2) \mathcal{E}(z_0)$$

com $g(z^2) = 0$ se $z^2 < 0$

Uma vez que $\Delta(-z) = -\Delta(z)$ (ver. na representação integral) concluo que $f(z^2)$ não satisfaz, donde deve ser eliminada esta possibilidade

$$\Delta(z) = g(z^2) \mathcal{E}(z_0) \quad g(z^2) = 0 \quad z^2 < 0$$

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = -i \Delta(x-y)$$

55

se $(x-y)^2 < 0$ devemos ter $[\varphi(x), \varphi(y)] = 0$.

Se y estiver fora do cone de luz de x o comutador se anula. Assim, as grandezas associadas a esses operadores podem ser medidas simultaneamente (posso medi-las em X e Y). Esse resultado é uma consequência do princípio de causalidade.

Não posso exercer influência em pontos que estejam fora do cone de luz. Assim, posso fazer medidas simultâneas em x e em y . Isso não é verdade se y estiver dentro do cone de luz de x , uma vez que uma medida efetuada em x influencia em todos os pontos dentro do cone de luz de x .

Essa exigência, para certos campos, é apenas uma extrapolação.

Calculemos Δ para o caso de $m=0$. Ou seja um campo de massa de repouso nula.

$$\Delta(z) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \times \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{|k|} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{z}} \left(e^{-i|k|z_0} - e^{+i|k|z_0} \right)$$

$$d^3k = k^2 \sin\theta d\theta d\varphi dk$$

$$\Delta(z) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \times \frac{1}{2} \int k^2 \frac{dk}{k} d\varphi d(\cos\theta) e^{i|k|z_0 \cos\theta} \left[e^{-i|k|z_0} - e^{+i|k|z_0} \right]$$

$$\Delta(z) = \frac{-i}{(2\pi)^2} \times \frac{1}{2} \int \frac{k^2 dk}{k(ik\pi)} \left[e^{+ik\pi} - e^{-ik\pi} \right] \left[e^{-i|k|z_0} - e^{+i|k|z_0} \right]$$

$$\text{onde } \pi = |\vec{z}|$$

56

$$\Delta(z) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(e^{ik(\eta-z_0)} - e^{ik(\eta+z_0)} - e^{-ik(\eta+z_0)} + e^{-ik(\eta-z_0)} \right) dk$$

$$\Delta(z) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{ik(\eta-z_0)} + e^{-ik(\eta-z_0)} - e^{ik(\eta+z_0)} - e^{-ik(\eta+z_0)} \right] dk =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left(e^{ik(\eta-z_0)} - e^{ik(\eta+z_0)} \right) =$$

$$= -\frac{2\pi}{(2\pi)^2} \times \frac{1}{2\pi} \left[\delta(z_0 - \eta) - \delta(z_0 + \eta) \right] =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \times 2\pi \delta(z^2) \varepsilon(z_0).$$

$$\Delta(z) = -\frac{1}{2\pi} \delta(z^2) \varepsilon(z_0).$$

A expressão acima só é diferente de zero no cone de luz, logo essas partículas com velocidade da luz devem ter $m=0$.

$\Delta(z)$ mais geral, é dado pela expressão

$$\Delta(z) = -\frac{\varepsilon(z_0)}{2\pi} \left\{ \delta(z^2) + \frac{m^2}{2} \Theta(z^2) \frac{J_1(m\sqrt{z^2})}{m\sqrt{z^2}} \right\}$$

$$\text{com } \Theta(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

É fácil verificar que

$$(\square + m^2) \Delta(z) = 0$$

Outras Funções Invariantes

57

Como já vimos $[\varphi(x), \varphi(y)] = -i \Delta(x-y)$

Calcularemos agora o valor esperado no vácuo de $\varphi(x)\varphi(y)$

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle \equiv i \Delta^+(x-y)$$

Encontraremos então

$$\Delta^+(z) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) e^{-ik \cdot z}$$

$$\Delta^-(z) \equiv \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(-k_0) e^{+ik \cdot z}$$

$$\Delta^-(z) = \Delta^{*+}(z)$$

$$\Delta(z) = \Delta^+(z) + \Delta^-(z) \quad \text{uma vez que } \epsilon(k_0) = \theta(k_0) - \theta(-k_0)$$

Definimos ainda $\Delta^{(1)}(z)$ por meio de

$$-i \Delta^{(1)}(z) = \Delta^+ - \Delta^-$$

$$\Delta^{(1)}(z) = \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle$$

Podemos verificar que todas essas funções satisfazem a equação de Klein-Gordon. Ainda mais, $\Delta^{(1)}$ é invariante sob quais que transformações de Lorentz (próprias ou impróprias)

Interpretação Física da localizabilidade em teoria dos campos.

$$\Delta^+(z) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\omega_k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}} e^{-i\omega_k z_0}$$

Notemos que ^{em} Δ^+ só comparecem termos correspondentes a soluções com energias positivas.

Queremos agora estudar essa função para grandes separações espaciais (comportamento assintótico). Esse comportamento será analisado a partir de Δ^+ .

Comçaremos nossa análise a partir de $z_0 = 0$. Por uma transformação de Lorentz, passamos para qualquer outro.

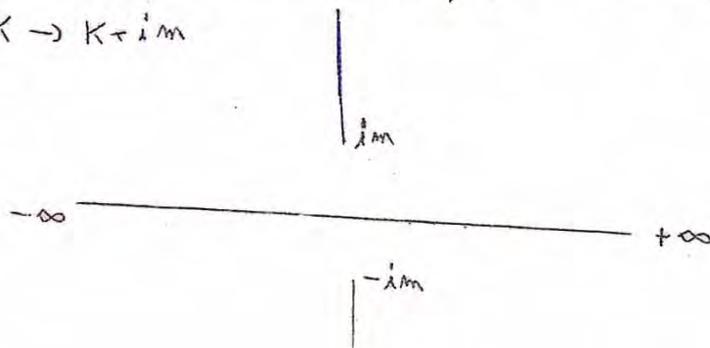
$$\Delta^+(z) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \times \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{\omega_k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}} \quad |\vec{z}| = \eta$$

$$\Delta^+(z) = -\frac{1}{2(2\pi)^2 \eta} \int_0^\infty \frac{k dk}{\omega_k} (e^{ik\eta} - e^{-ik\eta})$$

$$\Delta^+(z) = -\frac{1}{2(2\pi)^2 \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ik\eta}$$

Escolha o caminho de integração de tal forma que

$$k \rightarrow k + im$$



• então

$$\Delta^+(z) = -\frac{1}{2(2\pi)^3 \eta} \int \frac{(k+i\epsilon)}{\sqrt{k^2+2i\epsilon k}} dk e^{ik\eta} (e^{-m\eta}) \quad 59$$

O comportamento para grandes distâncias de η é, essencialmente
n:tr a função

$$\Delta^+(z) = e^{-m\eta} \left[\frac{1}{2(2\pi)^3 \eta} \int \frac{(k+i\epsilon)}{\sqrt{k^2+2i\epsilon k}} dk e^{ik\eta} \right]$$

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle \approx \frac{e^{-m|x-y|}}{|x-y|^{3/2}}$$

$$\varphi(k)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} |0\rangle, \quad a|0\rangle = 0$$

$\varphi(y)|0\rangle$ é um estado de uma partícula criada no ponto y . Este
resultado de $\langle 0 | \varphi(x)$ ~~cria~~ cria outra partícula em x . Pois
devemos ter $\langle x | y \rangle = 0$.

O resultado é que a partícula tem uma certa extensão e existe
um limite para o conceito de localizabilidade. Existe uma
influência do ponto x no ponto y .

Na mecânica quântica usual

$\Delta x \Delta p \sim 1$, portanto não existe limite para Δx . Na teoria
relativística existe limitação para Δx

$\Delta x \sim \lambda c$, λc - comprimento de onda de Compton.

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} \quad \Delta E \sim \frac{\Delta p^2}{2m} \sim \frac{1}{m \Delta x^2}$$

$$\text{Se } \Delta x \sim \frac{1}{m} = \lambda c \text{ então } \boxed{\Delta E \sim m}$$

A indeterminação de E é da ordem de m . Dessa forma
temos energia suficiente para encontrar duas partículas.

Para $\Delta x \ll \lambda_c$ não tem sentido a localização da partícula, uma vez que ela perde sua identidade.

Logo, para $\Delta x \gg \lambda_c$, a localização é da ordem de

$$\frac{e^{-m|x-y|}}{|x-y|^{3/2}} \quad (\text{limitação na localização})$$

Existem tentativas para definir estados localizados para partículas.

Outras funções invariantes

$\Delta_F(z)$ - Função propagador de Feynmann

$$\Delta_F(z) = 2 \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle$$

onde T é o produto cronológico de dois operadores. Onde o produto cronológico de dois operadores A e B é definido por

$$T(A(x)B(y)) = \begin{cases} A(x)B(y) & \text{se } x^0 > y^0 \\ B(y)A(x) & \text{se } x^0 < y^0 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta_F(z)}{2} = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle \theta(x_0 - y_0) + \langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle \theta(y_0 - x_0)$$

$$\Delta_F(z) = 2i \Delta^+(z) \quad z^0 > 0$$

$$\Delta_F(z) = -2i \Delta^-(z) \quad z^0 < 0$$

$$\Delta_F(z) = 2i (\Delta^+(z) \theta(z_0) - \Delta^-(z) \theta(-z_0))$$

$\Delta^+(z)$ e $\Delta^-(z)$ são funções invariantes de z . $\theta(z_0)$ é invariante, desde que $z^2 > 0$. Deve ter $z^2 > 0$ (dentro do cone de luz)

Fora do cone de luz $\Delta = 0$

61

$$\Delta^+ = -\Delta^-$$

Logo $\Delta_F(z)$ é relativisticamente invariante.

$\Delta_F(z)$ não é uma solução da equação de Klein-Gordon.
Assim Δ_F é uma função de Green do operador.

Funções avançada e retardada

$$\Delta_R(z) = \Delta(z) \theta(z_0)$$

$$\Delta_A(z) = \Delta(z) \theta(-z_0)$$

Exemplo clássico.

Consideremos a solução para a equação de Klein-Gordon não homogênea. Introduzimos um termo descrevendo a presença de fontes.

$$(\square + m^2) \phi(x) = J(x)$$

A solução geral se escreve sob a forma:

$$\phi(x) = \phi^h(x) + \int \Delta_R(x-x') J(x') dx'$$

Mostraremos agora que todas essas funções podem ser escritas como integrais do mesmo integrando no plano complexo, diferindo apenas pelo contorno de integração.

$$\begin{aligned} \Delta^+(z) &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int S^+(k^2 - m^2) \theta(k_0) e^{-ikz} d^4k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} \frac{e^{-ikz}}{m^2 - k^2} d^4k = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} \frac{e^{-ikz}}{m^2 - k^2} d^4k \end{aligned}$$

Integrando na variável k_0 , no plano complexo 62

$$\Delta^+(\vec{z}) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \omega_k^2} dk_0 d^3k e^{ik \cdot \vec{z}} =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} \frac{e^{-ik_0 z_0} dk_0}{(k_0 - \omega_k)(k_0 + \omega_k)} e^{ik \cdot \vec{z}}$$

$$\Delta^+(\vec{z}) = -\frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ik \cdot \vec{z}}}{2\omega_k} e^{-i\omega_k z_0} d^3k = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-iKz}}{2\omega_k} d^3k$$

Como $\Delta(\vec{z}) = \Delta^+(\vec{z}) + \Delta^-(\vec{z})$

$$\Delta(\vec{z}) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} e^{ik \cdot \vec{z}} \frac{e^{i\omega_k z_0} - e^{-i\omega_k z_0}}{2i}$$

concluímos que

$$\Delta^+(\vec{z}) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \oint_{C^+} \frac{e^{-ikz}}{k^2 - m^2} d^4k$$

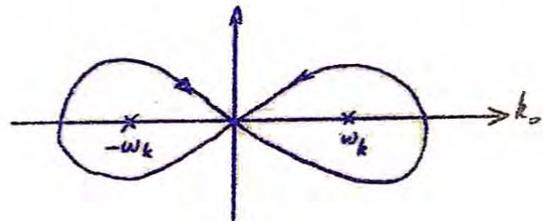
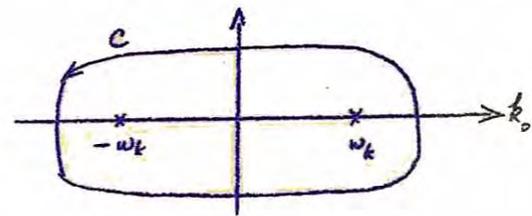
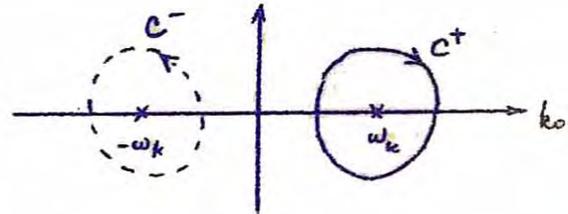
$$\Delta^-(\vec{z}) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \oint_{C^-} \frac{e^{-ikz}}{k^2 - m^2} d^4k$$

$$\Delta(\vec{z}) = \Delta^+(\vec{z}) + \Delta^-(\vec{z})$$

$$\Delta(\vec{z}) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \oint_C \frac{e^{-ikz}}{k^2 - m^2} d^4k$$

$$\Delta^{(1)}(\vec{z}) = i(\Delta^+(\vec{z}) - \Delta^-(\vec{z}))$$

$$\Delta^{(1)}(\vec{z}) = \frac{i}{(2\pi)^4} \oint_{C'} \frac{e^{-ikz}}{k^2 - m^2} d^4k$$



$$\Delta_F(z) = \begin{cases} 2i \Delta^+(z) & z^0 > 0 \\ -2i \Delta^-(z) & z^0 < 0 \end{cases}$$

63

$$\Delta_F(z) = \frac{2i}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{e^{-ikz}}{k^2 - m^2} d^4k$$

Seja $z_0 > 0$

$$\Delta_F(z) = -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikz_0} e^{ikz_3}}{\omega_k}$$

$$\Delta_F(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{e^{-ikz}}{k^2 - m^2}$$

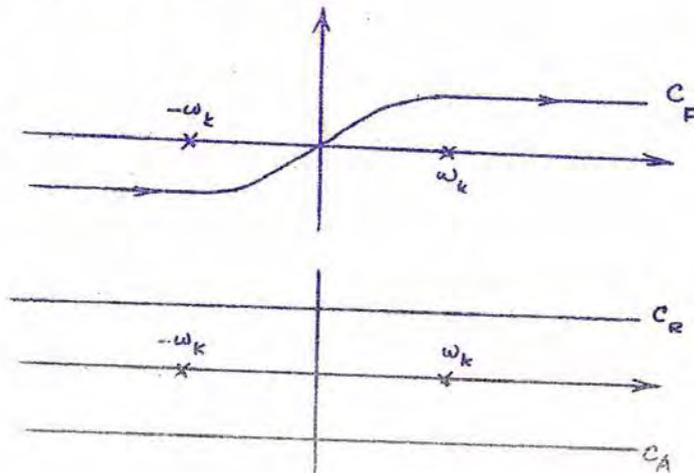
Observemos que

Para definirmos Δ , Δ^- , Δ^+ , $\Delta^{(1)}$ usamos contornos fechados

Para definirmos Δ_F , Δ_A , Δ_R usamos contornos abertos

$$(\square + m^2) \Delta^{0, -, +, 1} = 0$$

$$(\square + m^2) \Delta_{C,A} \sim \delta^4(z)$$



CAMPO ESCALAR COMPLEXO

64

Iniciemos com uma discussão do campo clássico. Como um campo complexo pode ser decomposto em dois campos reais $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ com $\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$, podemos usar os métodos estudados para um campo com mais de uma componente. Ao invés de tratarmos a densidade de Lagrangeana como função de $\phi_1, \phi_2, \phi_{1,\mu}$ e $\phi_{2,\mu}$; vamos fazer $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \phi^*, \phi_{,\mu}, \phi^*_{,\mu})$ pois como veremos mais adiante, tomar ϕ e ϕ^* como variáveis independentes, torna mais claro o significado físico do campo complexo. Usando o princípio variacional, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_{x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*_{,\mu}} = 0$$

A densidade de Lagrangeana, generalização natural do caso de campos reais é

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

Obtemos então as equações do campo

$$(\square + m^2)\phi = 0 \qquad \text{e} \qquad (\square + m^2)\phi^* = 0$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i^\mu} \dot{\phi}_i^\nu - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad \mu, \nu = 1, 2 \text{ etc}$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i^\mu} \dot{\phi}_i^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i^{*\mu}} \dot{\phi}_i^{*\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$$T^{\mu\nu} = \dot{\phi}_i^{*\mu} \dot{\phi}_i^\nu + \dot{\phi}_i^\mu \dot{\phi}_i^{*\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0.$$

Como o tensor de energia-momento já é simétrico, concluímos que este campo descreverá partículas de spin zero.

$$H = \int T^{00} d^3x = \int d^3x (\dot{\phi} \dot{\phi}^* + \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* + m^2 \phi^* \phi) \geq 0$$

$$P^i = \int T^{0i} d^3x = \int d^3x (\dot{\phi}^* \nabla^i \phi + \dot{\phi} \nabla^i \phi^*)$$

$$\text{Consideremos } M^{\mu\alpha\beta} = \int m^{\mu\alpha\beta} d^3x \text{ com}$$

$$m^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} \text{ temos } \partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0.$$

$$\text{Logo } \int m^{\mu\alpha\beta} d^3x = \text{const} = L^{\alpha\beta} \quad \begin{array}{l} \text{gerador de} \\ \text{transf. de Lorentz} \\ \text{do campo esc. complexo} \end{array}$$

Transformação de GAUGE de 1ª espécie

Seja a transformação que deixa

$$\phi(x) \mapsto e^{i\theta} \phi(x)$$

$$\phi^*(x) \mapsto e^{-i\theta} \phi^*(x)$$

o real

A densidade de Lagrangiana é invariante por esta transformação o que nos permite estabelecer uma lei de conservação:

Pelo teorema de Noether

-66-

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^\alpha} \delta \phi^\alpha - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^\alpha} \phi_{,\nu}^{\alpha\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \delta x_\nu \right] = 0$$

como pela transf. definida $\delta x = 0$ temos

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^*} \delta \phi^* \right] = 0$$

para transf. infinitesimais

$$\begin{cases} \delta \phi = i \delta \theta \phi \\ \delta \phi^* = -i \delta \theta \phi^* \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[i (\phi_{,\mu}^* \phi - \phi_{,\mu} \phi^*) \delta \theta \right] = 0$$

como θ é independente de x temos

$$j^\mu = -i (\phi_{,\mu}^* \phi - \phi_{,\mu} \phi^*) \quad \text{com} \quad \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad \text{e portanto}$$

$$\int j^0 d^3x = \text{const.} \equiv Q$$

Q é interpretado como a energia do campo. O campo escalar complexo descreve, portanto, partículas carregadas.

Esta carga em geral não necessita ser a carga elétrica usual podendo ser um outro número quântico com as propriedades básicas da carga como por exemplo hipercarga, número bariônico, número leptônico etc..

QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR COMPLEXO

Fazendo uso do esquema de quantização de Heisenberg, definiremos os momentos conjugados ao campo.

$$\pi_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^*$$

$$\pi_{\phi^*} = \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi}$$

$$\left. \begin{aligned} [\phi(x), \pi(y)] &= i \delta(x-y) \\ [\phi^*(x), \pi^*(y)] &= i \delta(x-y) \end{aligned} \right\} \text{Tempos iguais}$$

os demais comutadores nulos

Expandindo os campos

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a(k) e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right]$$

$$\phi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a^\dagger(k) e^{ik \cdot x} + b(k) e^{-ik \cdot x} \right]$$

Onde $a^\dagger(k)$ e $b^\dagger(k)$ são independentes e como veremos são operadores de criação de partículas diferentes.

Usando as relações de comutação para os campos temos

$$[a(k), a^\dagger(k')] = \delta(k-k')$$

$$[b(k), b^\dagger(k')] = \delta(k-k')$$

os demais nulos

Com a expansão acima obtemos para H (depois de diminuirmos a energia de ponto zero)

$$H = \int \omega_k \{ a^\dagger(k) a(k) + b^\dagger(k) b(k) \} d^3k$$

$$\vec{P} = \int \vec{k} [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})] d^3k$$

68

$$Q = \int [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})] d^3k$$

Uma interpretação física para os resultados acima sairia mais clara se tivéssemos usado expansão em série de Fourier (quantização num volume V). Neste caso definiríamos

$N_{\mathbf{k}}^{(+)} = a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$ e $N_{\mathbf{k}}^{(-)} = b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})$ como operadores de número de partículas com momento \mathbf{k} . No tratamento que fizemos estes seriam operadores de densidade de partículas.

Como $N_{\mathbf{k}}^{(+)}$ e $N_{\mathbf{k}}^{(-)}$ comutam, podemos tomar uma representação em que estes são diagonais. Estes operadores terão espectro de autovalores

$$N_{\mathbf{k}}^{(+)} = 0, 1, 2, \dots$$

$$N_{\mathbf{k}}^{(-)} = 0, 1, 2, \dots$$

Assumamos que existe o vácuo,

$$\text{tal que } \begin{aligned} a(\mathbf{k})|0\rangle &= 0 & \forall \mathbf{k} \\ b(\mathbf{k})|0\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{então } \begin{aligned} H(a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle) &= \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle \\ \vec{P}(a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle) &= \vec{k} a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle \\ Q(a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle) &= a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle \end{aligned}$$

Vemos assim que o estado $a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$, é um estado de uma partícula com energia $\omega_{\mathbf{k}}$, momento \vec{k} e carga $+1$. Para o estado $b^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$ temos

$$H b^\dagger(k)|0\rangle = \omega_k b^\dagger(k)|0\rangle$$

$$\vec{P} b^\dagger(k)|0\rangle = \vec{k} b^\dagger(k)|0\rangle$$

$$Q b^\dagger(k)|0\rangle = - b^\dagger(k)|0\rangle$$

O estado $b^\dagger(k)|0\rangle$ é portanto associado a uma partícula com energia ω_k , momento \vec{k} e carga -1 .

Por sucessivas aplicações de $a^\dagger(k)$ e $b^\dagger(k)$ a $|0\rangle$ construímos estados com

$$E = \sum \omega_k (N_k^{(+)} + N_k^{(-)})$$

$$\vec{P} = \sum \vec{k} (N_k^{(+)} + N_k^{(-)})$$

$$Q = \sum (N_k^{(+)} - N_k^{(-)})$$

Vemos que o campo tem dois tipos de quanta. Os dois correspondem a partículas de mesma massa m , para um dado momento k têm ambas mesma energia ω_k e diferem por terem cargas de sinais opostas.

Para o campo escalar neutro $\phi^+ = \phi$
 " " " " " complexo $\phi^+ \neq \phi$

As funções invariantes são as mesmas para dois.

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0$$

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = i \Delta(x-y)$$

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi^\dagger(y)) | 0 \rangle \sim \Delta_F(x-y)$$

$$\langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle \sim \Delta^+(x-y)$$

etc.

Campo de Dirac

70

Uma Lagrangeana para o campo de Dirac pode ser construída a partir de uma combinação de um bilinear escalar $\bar{\psi}\psi$ e um termo contendo uma derivada $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

Como $\bar{\psi}\psi$ é um escalar e $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ é um vetor, \mathcal{L} é um escalar.

Agora devemos considerar ψ e $\bar{\psi}$ como variáveis independentes, e fazendo uso do princípio variacional, tomando variações de ψ e $\bar{\psi}$, obtemos equações para os campos ψ e $\bar{\psi}$

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0$$

① variando $\bar{\psi}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \rightarrow \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi = 0$$

② variando $\psi \rightarrow \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m \right) \bar{\psi} = 0$

Tensor de energia - momentum

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \phi_{,\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}^\alpha} \psi_{,\nu}^\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Como ψ satisfaz a equação de movimento $b=0$, então $T^{\mu\nu}$ fica reduzido a

$$T^{\mu\nu} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu}$$

$$T^{\mu\nu} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi$$

temos $\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0$

Como podemos observar a partir da expressão explícita para $T^{\mu\nu}$ que esse tensor não é simétrico

$T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$. Por meio deste resultado sabemos que o campo de Dirac descreve partículas com spin diferente de zero.

$$H = \int T^{00} d^3x$$

$$H = i \int \bar{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3x = i \int \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3x$$

A equação de Dirac pode ainda ser escrita sob a forma

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_0 \psi$$

$$\text{onde } H_0 = (-\alpha \cdot p + m\beta)$$

$$(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - i\gamma \cdot \nabla - m) \psi = 0$$

multiplicando à esquerda por γ^0

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\gamma_0 (\gamma \cdot \nabla + m\gamma_0) \psi$$

$$\text{Seja } \begin{cases} \alpha = \gamma_0 \gamma \\ \gamma_0 = \beta \end{cases}$$

72

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (i \alpha \cdot \nabla + m) \psi = H_D \psi$$

H_D - op. Hamiltoniano da eq de Dirac

$$H = \int \psi^\dagger (i \alpha \cdot \beta + m \beta) \psi$$

$$H = \int \psi^\dagger H_D \psi d^3x$$

Assim o operador Hamiltoniano do campo é o valor esperado do op. Hamiltoniano da Eq de Dirac e

$$P^i = \int T^{0i} d^3x$$

$$P^i = \int \psi^\dagger (-i \nabla_i) \psi$$

O momentum do campo é o valor esperado do op. momentum da teoria comum de Schrödinger

Geradores das transformações do grupo de Lorentz

O teorema de Noether fornece também o gerador de qualquer transformação de simetria. De acordo com o teorema de Noether, a quantidade conservada quando consideramos uma transformação é

$$\frac{\partial b}{\partial \phi_{,\mu}^{\alpha}} \delta \phi^{\alpha} - \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}^{\alpha}} \phi_{,\nu}^{\alpha} - g^{\mu\nu} b \right) \delta x_{\nu} \quad 73$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left\{ \frac{\partial b}{\partial \phi_{,\mu}^{\alpha}} \delta \phi^{\alpha} - \left(\frac{\partial b}{\partial \phi_{,\mu}^{\alpha}} \phi_{,\nu}^{\alpha} - \delta_{\nu}^{\mu} b \right) \delta x^{\nu} \right\} = 0$$

Sob uma transformação infinitesimal de Lorentz

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu\nu} x_{\nu}, \quad \epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$$

O campo escalar se transforma de acordo com $\psi'(x') = \psi(x)$ ao passo que o campo espinorial

$$\psi'(x') = \left(1 - \frac{i}{4} \epsilon_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} \right) \psi(x)$$

$$\text{como } x^{\mu} = x'^{\mu} - \epsilon^{\mu\nu} x_{\nu}$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}]$$

$\sigma^{\alpha\beta}$ é o gerador das transformações de Lorentz infinitesimais com respeito aos índices

$$\psi'(x') = \left(1 - i \frac{\epsilon_{\alpha\beta}}{4} \sigma^{\alpha\beta} \right) \psi(x'^{\mu} - \epsilon^{\mu\nu} x_{\nu})$$

Expandindo o argumento do lado direito até termos de 1ª ordem (desprezando os termos de 2ª ordem)

$$\delta\psi(x') = \left(-i \epsilon_{\alpha\beta} \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{4}\right) \psi(x') (-\epsilon^{\alpha\nu} x'_\nu) \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}(x') \quad 74$$

Usando agora o teorema de Noether, a quantidade conservada é f^μ , pois satisfaz a $\partial^\mu f_\mu = 0$.

$$f^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi^\alpha)} \delta\psi^\alpha - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu\psi^\alpha)} \partial_\nu\psi^\alpha - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right) \delta x^\nu$$

Quando é satisfeita a eq. do campo $\mathcal{L}=0$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi^\alpha)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu$$

$$\delta\psi^\alpha = -i\sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} \psi^\beta \quad \delta x^\nu = \epsilon^{\nu\mu} x_\mu$$

Obtemos então

$$f^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu (-i\frac{\sigma_{\alpha\nu}}{4}\psi(x))\epsilon^{\alpha\nu} - i\bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} x_\nu \epsilon^{\alpha\nu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-i\bar{\psi}\gamma^\mu x_\nu \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\sigma_{\alpha\nu}}{4}\psi\right) \epsilon^{\alpha\nu} = 0$$

Podemos antisimetrizar o primeiro termo, ao passo que o segundo é simétrico

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \left[x_\nu \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} - x_\alpha \frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}\right] + \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\sigma_{\alpha\nu}}{4}\psi\right) = 0$$

Seja

$$M^{\mu\nu\alpha} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \left(x_\nu \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} - x_\alpha \frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}\right) + \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\sigma_{\alpha\nu}}{4}\psi$$

Os geradores da transformação de Lorentz infinitesimais são as grandezas 75

$$J_{\nu\alpha} = -J_{\alpha\nu} = \int M^{\mu}_{\alpha\nu} d\sigma_{\mu}$$

Esses 6 geradores podem ser obtidos a partir de

$$J_{\nu\alpha} = \int M^0_{\nu\alpha} d^3x \quad (\text{uma vez que } J_{\mu\nu} \text{ é conservada podemos calculá-la numa superfície a } t = \text{cte.})$$

com a lei de conservação

$$\frac{d}{dt} J_{\nu\alpha} = 0$$

Todas as 6 componentes são conservadas.

A primeira parte de $M^{\alpha\beta}$ é o tensor orbital

$$M^{\mu\nu}_{\text{orbital}} = x^{\nu} T^{\mu\alpha} - x^{\alpha} T^{\mu\nu}$$

A outra contribuição é da parte de spin

A conservação diz respeito à soma das duas partes. Por exemplo, a parte puramente espacial tem a componente

$$J_{12} \equiv J_3 = \int \{ \pi_0 I_{12}^{\alpha\beta} \psi_{\beta} + \pi_{\alpha} (x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1) \psi_{\alpha} \} d^3x$$

Esta equação mostra que J_3 tem duas componentes: o momento angular orbital e o momento angular de spin

$$J_3 = L_3 + S_3$$

J_3 são as componentes do momento angular total. S_3 não depende da escolha da origem do sistema mas é determinada unicamente pelas propriedades de transit. das funções do campo.

76

Usando agora o teorema de Noether, a quantidade conservada é t^μ , pois satisfaz $\partial^\mu t_\mu = 0$.

$$t^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi^\alpha)} \delta \psi^\alpha - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi^\alpha)} \partial_\nu \psi^\alpha - g_{\nu}^{\mu} \mathcal{L} \right) \delta x^\nu$$

(Quando é satisfeita a equação do campo $\mathcal{L} = 0$)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi^\alpha)} = i \bar{\psi} \gamma^\mu$$

$$\delta \psi^\alpha = -i \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \psi^\beta$$

$$\delta x^\nu = \varepsilon^{\nu\mu} x_\mu$$

Obtemos então

$$t^\mu = i \bar{\psi} \gamma^\mu \left(-\frac{i \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}}{4} \psi(x) \right) \varepsilon^{\alpha\beta} - i \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} x_\nu \varepsilon^{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-i \bar{\psi} \gamma^\mu x_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} + \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}}{4} \psi \right) \varepsilon^{\alpha\beta} = 0$$

Podemos antisimetrizar o primeiro termo, ao passo que o segundo é simétrico

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \left(x_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \right) + \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}}{4} \psi \right) = 0$$

Seja

$$M^{\mu\nu\alpha} = -\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \left(x_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} - x_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \right) + \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}}{4} \psi$$

[77]

Os geradores de transformações de Lorentz infinitesimais são as grandezas

$$J_{\nu\lambda} = -J_{\lambda\nu} = \int M_{\nu\lambda} d^3x$$

Esses 6 geradores podem ser obtidos a partir de

$$J_{\nu\lambda} = \int M_{\nu\lambda}^0 d^3x \quad (\text{Uma vez que } J_{\nu\lambda} \text{ é conservada podemos calculá-la numa superfície } \sigma t = \text{cte})$$

Com a lei de conservação

$$\frac{d}{dt} J_{\nu\lambda} = 0$$

Todas as seis componentes são conservadas

A primeira parte de $m^{\alpha\beta}$ é o tensor orbital

$$M_{\text{orbital}}^{\mu\nu\lambda} = x^\nu T^{\mu\lambda} - x^\lambda T^{\mu\nu}$$

A outra contribuição é da parte de spin

A conservação diz respeito a soma das 2 partes

Por exemplo, a parte espacial puramente tem 3 componentes

$$J_{12} \equiv J_3 = \int \left\{ \Pi_\alpha I_{12}^{\alpha\beta} \Psi_\beta + \Pi_\alpha (x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1) \Psi_\alpha \right\} d^3x$$

Esta equação mostra que J_3 tem duas componentes: o momento angular orbital e o momento angular de spin.

$$J_3 = L_3 + S_3$$

J^i são as componentes do momento angular total. S_i não depende da escolha da origem do sistema mas é determinado unicamente pelas propriedades de transformação das funções do campo.

[78]

Vamos agora considerar as idéias de Belinfante e Rosenfeld, mostrando como podemos construir a partir do tensor canônico, o tensor simétrico.

Usaremos aqui o fato de $J_{\mu\nu}$ ser conservada

$$\stackrel{(S)}{T}{}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{\partial f^{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\lambda} \quad \text{com } f^{\mu\nu\lambda} = -f^{\lambda\mu\nu}$$

Essa antissimetria faz com que as integrais sobre as componentes em zero sejam as mesmas. Queremos agora determinar $f^{\mu\nu\lambda}$.

$$\stackrel{(S)}{T}{}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ \bar{\psi} \gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu} \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \sigma^{\lambda\nu} \psi - \bar{\psi} \gamma^\nu \sigma^{\lambda\mu} \psi \right\}$$

Essa tensor é simétrico lembrando que

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\lambda} \gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu} \psi$$

Esses termos já são simétricos em μ e ν e não vão alterar o caráter da simetria. Assim construiremos o tensor simétrico (a partir).

A partir desse tensor podemos construir o mesmo \mathbb{P} e E totais. (ou seja obtemos o mesmo resultado que quando trabalhamos com $T^{\mu\nu}$)

$$\int M^{0\alpha\beta} d^3x = \int \left(x^\alpha \stackrel{(S)}{T}{}^{0\beta} - x^\beta \stackrel{(S)}{T}{}^{0\alpha} \right) d^3x$$

Notemos ainda que o tensor simétrico já descreve a parte do spin.

Podemos verificar integrando a expressão acima por partes, que a expressão acima chega a um termo sob a forma

$$\frac{\bar{\psi} \gamma^\mu \sigma^{\lambda\nu} \psi}{2}$$

179

Lá sabemos que

$$L = \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m) \Psi = 0$$

$$H = \int \Psi^\dagger (i \not{\partial} - m) \Psi d^3x$$

$$IP = \int \Psi^\dagger i \not{\nabla} \Psi d^3x$$

Em uma transformação de Gauge de 1a. ordem:

$$\Psi \rightarrow e^{i\alpha} \Psi$$

encontramos a conservação do momento

$$J^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$$

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\nu} = 0$$

Desde

obtemos que a "carga" é conservada.

$$Q = \int \Psi^\dagger \Psi d^3x$$

Em várias razões o formalismo anterior não se aplica diretamente a esse caso (campo de Dirac)

A primeira dessas razões é que nesse caso temos uma equação de primeira ordem, por isso

$$\pi_\Psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} = i \Psi^\dagger$$

$$\pi_{\Psi^\dagger} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}^\dagger} = 0$$

Isso não ocorre usualmente no formalismo - geralmente o momento canônico é diferente de zero. Essa degenerescência é devido ao fato de termos equação de primeira ordem (nessa caso).

Podemos continuar o problema trabalhando com Ψ e $\bar{\Psi}$ ou Ψ e Ψ^\dagger .

180

Numa primeira tentativa procuramos quantizar o campo usando o formalismo emparelhado até aqui. Impondo que os campos sejam operadores que satisfaçam a regra de comutação a tempos iguais:

$$[\psi(x), \psi^\dagger(x)] = \delta(x-y) \quad (\text{tempo-iguais})$$

Vamos decompor estes campos em modos normais (decomposição de Fourier dos campos livres), escrevendo

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i=\pm} \int \left[a(p, i) e^{i(p \cdot x - E(p)x_0)} u(p, i) d^3p + a(p, i) e^{i(p \cdot x + E(p)x_0)} v(p, i) d^3p \right]$$

onde $i=+$ spin para cima \rightarrow Energia positiva
 $i=-$ spin para baixo \leftarrow Energia negativa

$u(p, \dots)$ Solução onda plana no espaço dos momentos

Finalmente, observamos que os coeficientes devem ser encarados como operadores

Devemos ter

$$[\psi(x), \psi^\dagger(y)] = \delta(x-y)$$

$$[\psi(x), \psi(y)] = 0 = [\psi^\dagger(x), \psi^\dagger(y)]$$

Obtendo então

$$[a(p, i, \xi), a^\dagger(p, j, \zeta)] = \delta_{ij} \delta_{\xi\zeta} \delta(p - p')$$

Interpretando a e a^\dagger como operadores de criação de partículas com as características específicas (i, ξ etc.) chegamos às seguintes dificuldades

181

(a) Podemos construir estados a partir do vácuo

$(a^\dagger(p, \dots))^n |0\rangle$ estes estados são estados com n partículas com os mesmos números quânticos. Mas o elétron satisfaz o princípio de Pauli. Assim as regras de quantização que nos permitem construir estes estados violam o princípio de Pauli.

(b) Ao contrário do que acontece no caso da equação de Klein-Gordon (onde $E > 0$). Aqui podemos ter energias maiores do que zero, ou menores do que zero.

Obtêmamos para H o termo

$$H = \sum_{i=\pm} \int E(p) (a^\dagger(p, i, >) a(p, i, >) - a^\dagger(p, i, <) a(p, i, <)) d^3p$$

Como em tempo uma contribuição de energias negativas, pode-se ter estados com energia total negativa. Isto não é compatível com a estabilidade do universo.

Se em abandonar as soluções com energia negativa o conjunto de soluções não são completo e em não poderia satisfazer a condição:

$$[\psi(x), \psi^\dagger(y)] = \delta(x-y) \quad (\text{as funções não seriam locais})$$

Dessa forma não podemos excluir estados de energia negativa.

Para eliminar a primeira dificuldade Jordan e Wigner propuseram que o esquema de quantização para partículas que obedecem a estatística de Fermi-Dirac, seja diferente do esquema para quantizar o campo de Bosons.

Por meio da quantização até aqui considerada

$$[\psi(x), \psi^\dagger(y)] = \delta(x-y) \Rightarrow [a(m), a^\dagger(n)] = \delta_{mn}$$

82

Obtemos então que esse campo descreve bósons

Jordan-Wigner propuseram então que seja usado nesse novo esquema relações de anticomutação (ao invés de relações de comutação) introduzindo assim novos operadores de criação e aniquilação

$$[a(m), a^\dagger(n)]_+ = \delta_{mn}$$

$$[a(m), a(n)]_+ = 0 = [a^\dagger(m), a^\dagger(n)]_-$$

Esses operadores agora serão interpretados como operadores de criação e aniquilação de Fermions.

Por exemplo, para $m=n$, teremos

$$[a, a^\dagger]_+ = 1 \quad [a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger]$$

Consideremos o operador $a^\dagger a$ (que mostraremos ser o operador número de partículas)

$$N = a^\dagger a$$

$$N^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger (1 - a^\dagger a) a = a^\dagger a - \underbrace{a^\dagger a^\dagger a a}_0$$

$$a a + a a = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \quad (\text{analogamente para } (a^\dagger)^2 = 0)$$

Logo

$$N^2 = N$$

$$N^2 - N = N(N-1) = 0$$

83

Os autovalores de $N(n_i)$ são

$n = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ logo esse operador tem as propriedades de um número de ocupação de Fermions

De um modo geral se um operador é tal que $\Pi (A - a_i) = 0 \Rightarrow$ autovalores de $A = a_i$

Consideremos um estado ψ_0 tal que

$N\psi_0 \equiv 0$ (pode ser tomado como a definição de ψ_0)

esperamos que

$$a\psi_0 = 0 \text{ pois}$$

$$(a\psi_0, a\psi_0) = (\psi_0, a^\dagger a\psi_0) = 0$$

Se $|a\psi_0| = 0 \Rightarrow a\psi_0 = 0$

Queremos agora mostrar que o operador a^\dagger é o operador de criação

$$a^\dagger\psi_0 = ?$$

$$N a^\dagger\psi_0 = a^\dagger a a^\dagger\psi_0 = a^\dagger (1 - a^\dagger a)\psi_0 = a^\dagger\psi_0$$

$$N(a^\dagger\psi_0) = 1(a^\dagger\psi_0)$$

Logo $a^\dagger\psi_0$ é um estado com auto-valor de N igual a um. Ainda mais estes estados $a^\dagger\psi_0$ já têm norma igual a um, pois

$$\begin{aligned} (a^\dagger\psi_0, a^\dagger\psi_0) &= (\psi_0, a a^\dagger\psi_0) = (\psi_0, (1 + a^\dagger a)\psi_0) = \\ &= (\psi_0, \psi_0) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{logo } |a^\dagger\psi_0| = 1$$

84

ψ_0 - estado com 0 partículas com dados n^o quânticos.

$a^+ \psi_0 = \psi_1 \rightarrow$ estado com 1 partícula com dados n^o "

Como $a^+ \psi_1 = 0$. Conclui-se que só existem dois estados que têm o mesmo conjunto de n^o quânticos e esses estados são ψ_0 e ψ_1 . O primeiro é o estado com nenhuma partícula com os números quânticos dados e o segundo é o estado com apenas uma partícula.

Suponhamos agora que exista o vácuo $|0\rangle$ (estado) tal que:

$$a(m)|0\rangle = 0 \quad \forall m$$

Assim esse estado é o estado de ausência total de partículas. Um estado mais geral pode ser obtido a partir deste por sucessivas aplicações dos operadores de criação

$$|n_1 n_2 \dots n_j \dots\rangle = (a^+(1))^{n_1} (a^+(2))^{n_2} \dots (a^+(j))^{n_j} \dots |0\rangle$$

onde $n_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ assumindo somente dois valores

Esses auto-estados formam um conjunto ortogonal completo assim que posso expandir um vetor qualquer do espaço de Hilbert, escrevendo-o em termos desses vetores de base.

$$\psi = c_0 |0\rangle + \sum_i c_i a^+(i) |0\rangle + \sum_{i,j} c_{ij} a^+(i) a^+(j) |0\rangle + \dots$$

$$+ \dots + \sum_{i,j,k,\dots} c_{i\dots n} a^+(i) \dots a^+(n) |0\rangle + \dots$$

Essas funções de onda são anti-simétricas (observar que no caso de bósons elas são simétricas), pois

$$a^\dagger(i) a^\dagger(j) = -a^\dagger(j) a^\dagger(i)$$

Observemos estas que usando relações de anticomutação para quantizar o campo de férmions, obtemos funções de onda antisimétricas (que são as funções convenientes para descrevermos férmions).

As modificações introduzidas nas regras de quantização podem ser resumidas de acordo com o esquema abaixo.

$$[\psi(x), \psi^\dagger(y)]_+ = \delta(x-y) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{tempo iguais}$$

$$[\psi(x), \psi(y)]_+ = [\psi^\dagger(x), \psi^\dagger(y)]_+ = 0$$

É útil notarmos agora que esse novo esquema de quantização não altera o cálculo de determinantes comutadores envolvendo grandezas físicas. Assim o seguinte comutador

$$[\psi^\dagger(x)\psi(x), \psi(y)] \quad \text{dá o mesmo resultado qualquer que seja as regras de quantização.}$$

Um particular para quantidades bilineares, os comutadores são os mesmos pois sucessivas trocas cancelam os sinais. Por exemplo em H, P, Q , etc ocorrem expressões envolvendo quantidades bilineares.

$$H = \int \psi^\dagger (i\partial_t \psi + m\beta) \psi d^3x$$

$$P = \int \psi^\dagger (-i\nabla) \psi d^3x$$

Assim, a lei de movimento é

$$\dot{\psi}(x) = \frac{i}{\hbar} [\psi(x), H]$$

As pessoas que esperavam que aparecessem termos envolvendo relações de anticomutação (e não de comutação).

Os anticomutadores só aparecem quando temos termos envolvendo quantidades livres ψ e ψ^\dagger

Dessa forma a maior parte do formalismo canônico é conservado

Analogamente

$$\dot{\psi}^\dagger = \frac{\delta}{\delta \psi^\dagger} [\psi^\dagger(x), H]$$

$$\frac{\delta \psi}{\delta x^i} = \frac{\delta}{\delta x^i} [\psi(x), P^i]$$

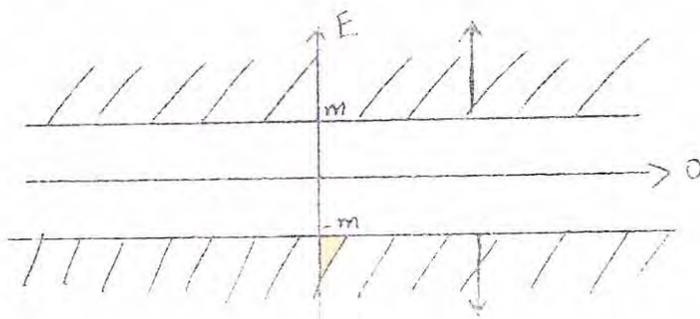
O formalismo canônico se altera de uma maneira pequena quando substituímos as regras de quantização (regras de comutação \rightarrow relações de anticomutação)

b) Energias negativas

Dizem por o problema a partir uma solução no sentido de dar conta da presença dos estados com energias negativas nas soluções de sua equação

Para um dado p existem quatro soluções, cada duas soluções diferem no sinal da energia. Para cada sinal da energia cada solução pode diferir na orientação do spin

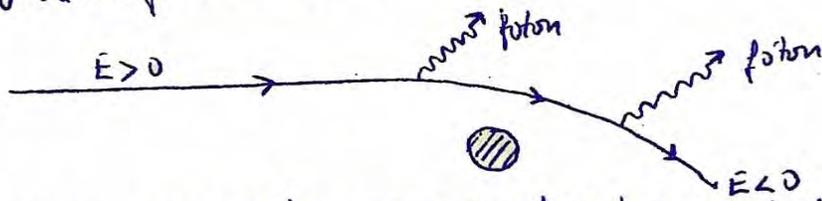
$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} E = \sqrt{p^2 + m^2} \\ E = -\sqrt{p^2 + m^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = \pm \\ S = \pm \end{array}$$



87

Com base na mecânica clássica poderíamos dar uma explicação para essas soluções: admitindo que no início do universo só existia $E > 0$ (Na mecânica clássica não existe probabilidade de transição)

No entanto, com base na mecânica quântica, sabemos que podem ocorrer bremsstrahlung, podendo assim o elétron ir perdendo energia até que (considerando-se que não existem níveis de seleção) tenhamos estados de fótons com energias (cada vez mais elevadas e elétrons em número cada vez maior no estado fundamental ($E = -\infty$))



Dessa própria ideia que o vácuo tem todos os estados de energia negativa preenchidos. Como os elétrons obedecem ao princípio da exclusão de Pauli, não é possível estas transições para os estados de energia negativa já estão todos ocupados.

Um buraco no mar de Dirac deve ser interpretado como uma partícula com energia positiva, carga positiva e momento $-\hbar p$ (momento oposto ao do elétron existindo).

Um buraco funciona como uma partícula.

Processos como a criação de um par têm uma interpretação muito simples de acordo com esta teoria

